

Examen VWO

2016

tijdvak 2
woensdag 22 juni
13:30 - 16:30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

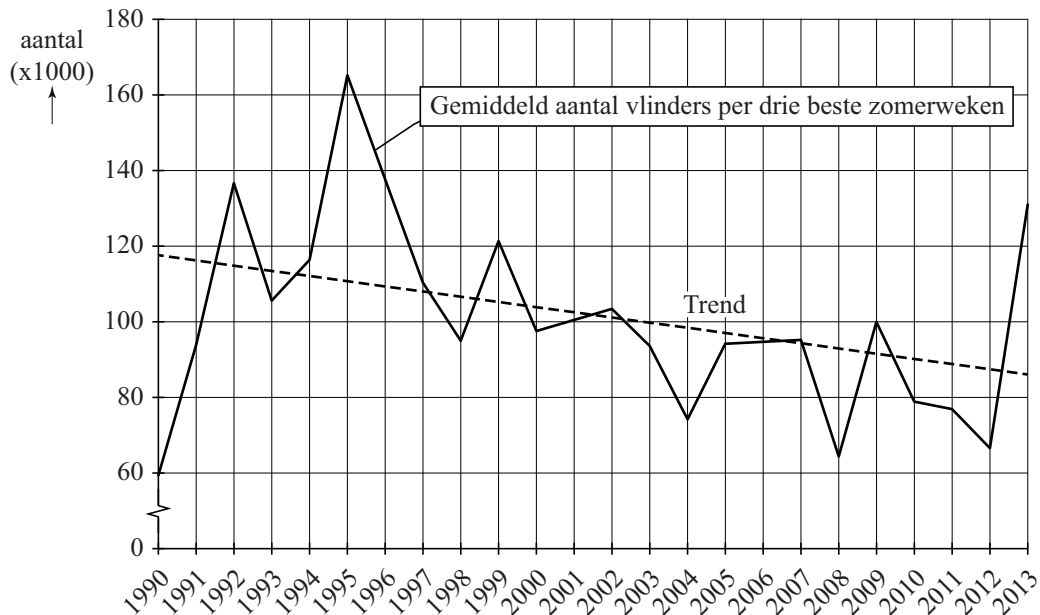
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Vlinders

De zomer van 2013 was een topzomer voor vlinders. Toch gaat het aantal vlinders in Nederland volgens de Vlinderstichting langzaam achteruit. In dagblad Trouw stond in augustus 2013 de grafiek van figuur 1.

figuur 1

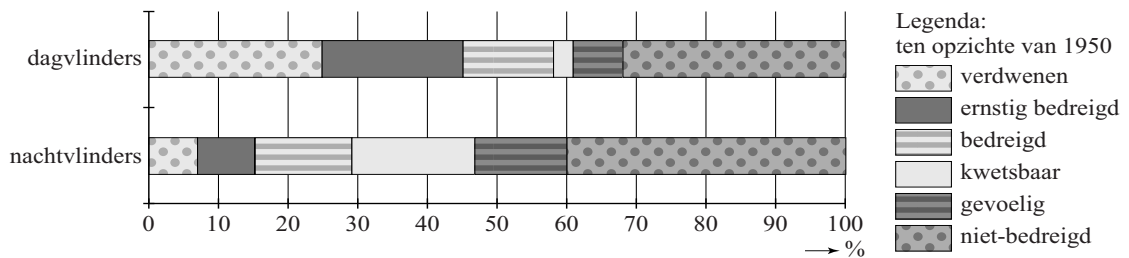


In figuur 1 is te zien dat het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken (dit zijn de drie weken met de meeste vlinders) een dalende trend vertoont. Deze trend wordt weergegeven door de gestippelde lijn. In figuur 1 is te zien dat 1995 zowel als 2013 goede vlinderjaren waren.

- 4p 1 Onderzoek of in 1995 het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken **in procenten** meer verschilde van het door de trendlijn voorspelde aantal dan in 2013.
- 5p 2 Stel een formule op voor de trendlijn van figuur 1 met t in jaren en $t = 0$ in 1995. Bereken daarmee in welk jaar er volgens deze trendlijn voor het eerst minder dan gemiddeld 60 000 vlinders in de drie beste zomerweken zullen zijn.

Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) publiceert regelmatig gegevens over de stand van zaken van de natuur in Nederland. In figuur 2 zie je een diagram waarin de mate van bedreiging is aangegeven van **vlindersoorten** in 2010. Uitgangspunt daarbij is het jaar 1950. Men beperkt zich daarbij tot soorten die in 1950 voorkwamen. Er is onderscheid gemaakt tussen soorten dagvlinders en soorten nachtvlinders. Je kunt in figuur 2 bijvoorbeeld aflezen dat 24% van het totale aantal soorten dagvlinders sinds 1950 uit Nederland verdwenen is.

figuur 2 bedreiging van vlindersoorten in 2010



Hieronder staan twee mogelijke conclusies:

- I Er zijn in 2010 meer niet-bedreigde soorten bij de nachtvlinders dan bij de dagvlinders.
- II Het percentage ernstig bedreigde, bedreigde en kwetsbare soorten samen is in 2010 bij de dagvlinders groter dan bij de nachtvlinders.

3p **3** Geef van elk van de twee bovenstaande conclusies aan of deze volgt uit figuur 2. Licht je antwoorden toe.

Om de bedreiging van soorten dagvlinders in Nederland te meten, gebruikt het CBS de volgende rekenmethode:

De **totale bedreiging** is de som van de volgende categorieën. Hierbij krijgen die categorieën de volgende gewichten: verdwenen = 5, ernstig bedreigd = 4, bedreigd = 3, kwetsbaar = 2 en gevoelig = 1. De niet-bedreigde soorten krijgen gewicht 0.

In de tabel staat voor 1995 en 2006 de onderverdeling in de genoemde categorieën voor de soorten dagvlinders die in Nederland in 1950 voorkwamen.

tabel

	aantal dagvlindersoorten						
jaar	verdwenen	ernstig bedreigd	bedreigd	kwetsbaar	gevoelig	niet-bedreigd	totaal
1995	17	5	11	7	2	29	71
2006	17	14	9	3	5	23	71

Voor soorten dagvlinders in 1995 resulteert de berekening van het CBS in een totale bedreiging van 154.

- 3p **4** Bereken met hoeveel procent de totale bedreiging voor soorten dagvlinders in 2006 is toegenomen ten opzichte van 1995.

De overheid wil dat de totale bedreiging teruggedrongen wordt. Men streeft ernaar dat voor dagvlinders de totale bedreiging 20% lager wordt dan in 1995.

- 4p **5** Geef een mogelijke verdeling waarbij afgerond de totale bedreiging 20% lager is dan in 1995 van de 71 dagvlindersoorten over de zes categorieën van de tabel. Ga er daarbij van uit dat het aantal verdwenen soorten gelijk gebleven is.

Prille groei

Gemiddeld duurt een zwangerschap bij de mens 38 weken. Een ongeboren kind van 8 weken of ouder wordt een **foetus** genoemd. In tabel 1 staat het (gemiddelde) lichaamsgewicht G in gram van een foetus bij een leeftijd van t weken.

tabel 1

Leeftijd t in weken	Lichaamsgewicht G in gram
8	4,7
10	21
15	160
20	480
25	990
30	1700
35	2700
38	3500

In deze opgave willen we onderzoeken welk model er bij tabel 1 zou kunnen passen.

Het eerste model dat we bekijken is dat van exponentiële groei:

$$G = b \cdot a^t \text{ met } a \text{ en } b \text{ constanten.}$$

Veronderstel dat de groei tussen week 8 en week 10 inderdaad exponentieel verloopt.

- 3p **6** Bereken met hoeveel procent **per week** het gewicht van de foetus dan toeneemt in die periode.

Exponentiële groei is echter geen goed model voor de groei van de foetus in de **gehele** periode van 8 tot 38 weken.

- 3p **7** Laat dat met een berekening zien.

Om een beter model voor de groei van de foetus te maken, berekenen we de logaritmes van de getallen in tabel 1.

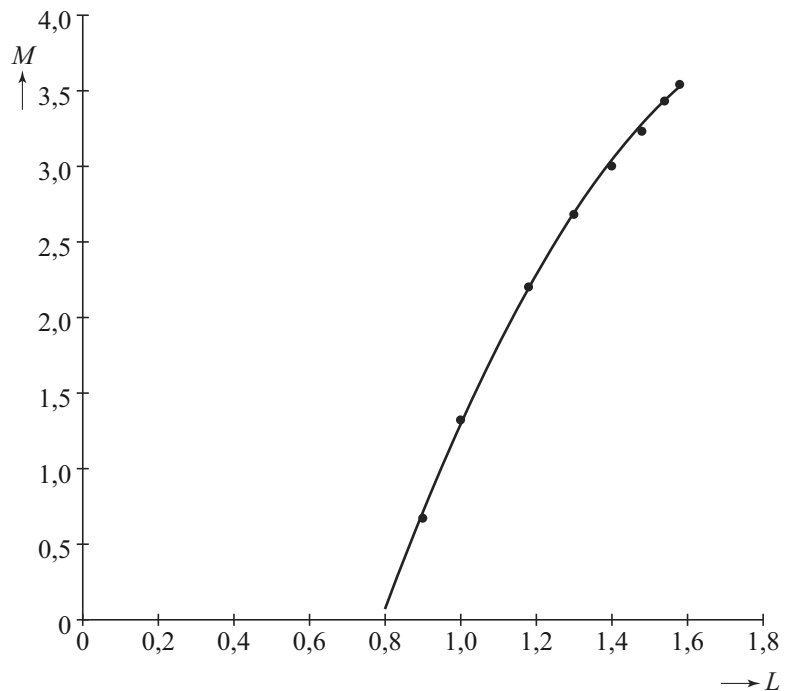
We bekijken dus de waarden van $M = \log(G)$ ten opzichte van $L = \log(t)$.

Zie tabel 2 en de bijbehorende punten in de figuur.

tabel 2

$L = \log(t)$	$M = \log(G)$
0,90	0,67
1,00	1,32
1,18	2,20
1,30	2,68
1,40	3,00
1,48	3,23
1,54	3,43
1,58	3,54

figuur



De punten in de figuur liggen bij benadering op een bergparabool. Deze parabool is in de figuur getekend. Bij deze parabool hoort de volgende formule:

$$M = -7,131 + 11,305 \cdot L - 2,892 \cdot L^2$$

Het gewicht van een foetus van 30 weken kan met deze formule worden berekend: bij $t = 30$ hoort $L = \log(30) \approx 1,48$. Met de formule kun je de waarde van M en daarna de bijbehorende waarde van G berekenen. Die waarde wijkt af van de waarde volgens tabel 1.

3p **8** Bereken hoeveel deze afwijking bedraagt.

Als de parabool van de figuur de groei goed beschrijft, dan zou de grafiek moeten stijgen gedurende de hele zwangerschap.

4p **9** Bereken de waarde van t waar de grafiek van M weer gaat dalen en leg uit dat dit voor het model geen bezwaar is.

Lampen

Sinds enkele jaren is de handel in gloeilampen verboden. Het is de bedoeling dat iedereen overstapt op spaarlampen of LED-lampen. In deze opgave houden we ons met gloei-, spaar- en LED-lampen bezig.

Spaarlampen bestaan al sinds 1982, maar hebben nooit de populariteit van de gloeilamp kunnen bedreigen. Toch is een gloeilamp op de lange termijn een stuk minder voordelig dan een spaarlamp: de levensduur van een gloeilamp is veel korter dan die van een spaarlamp én een gloeilamp gebruikt vijf keer zoveel energie als een spaarlamp om dezelfde lichtsterkte te produceren.

Het energieverbruik per tijdseenheid van lampen (het wattage) wordt uitgedrukt in watt (W). Er geldt dus dat een gloeilamp een vijf keer zo hoog wattage heeft als een spaarlamp die evenveel licht geeft. Zie ook de tabel.

tabel vergelijking gloei- en spaarlamp van dezelfde lichtsterkte

	levensduur	wattage	aanschafprijs
gloeilamp	1300 uur	75 W	€ 0,50
spaarlamp	7800 uur	15 W	€ 6,50

De prijs van elektriciteit is € 0,23 per kWh (kilowattuur). Dat wil zeggen dat het gebruik van 1 kW (= 1000 W) gedurende 1 uur € 0,23 kost.

Bijvoorbeeld: een lamp met een wattage van 100 W die drie uur brandt, zal $\frac{100}{1000} \cdot 3 \cdot 0,23 \approx € 0,07$ aan elektriciteit kosten.

De **gebruikskosten** van lampen bestaan uit de aanschafkosten en de kosten om ze te laten branden. Een spaarlamp van 15 watt zal tijdens zijn gehele levensduur van 7800 uur een stuk goedkoper zijn dan het gebruik van meerdere gloeilampen met dezelfde lichtsterkte die samen 7800 branduren hebben.

- 5p 10 Bereken hoeveel goedkoper de spaarlamp is. Geef je antwoord in centen nauwkeurig.

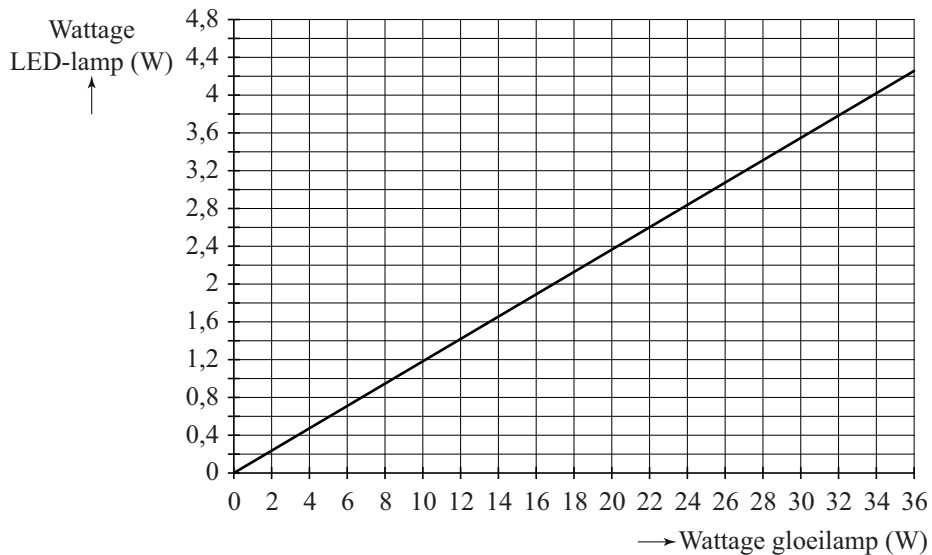
Stella heeft een spaarlamp gekocht van 12 W. Deze lamp kostte € 8,40. Een gloeilamp van 60 W, dus met dezelfde lichtsterkte, kost € 0,60. De spaarlamp is al goedkoper bij een aantal branduren dat kleiner is dan de levensduur van één gloeilamp met dezelfde lichtsterkte.

- 4p 11 Onderzoek na hoeveel branduren de gebruikskosten van de spaarlamp lager zijn dan die van één gloeilamp.

De laatste jaren is de LED-lamp steeds populairder aan het worden. Deze lampen zijn nóg zuiniger dan spaarlampen en gaan bovendien nog veel langer mee.

In de grafiek is het verband getekend tussen het wattage van gloeilampen en het wattage van LED-lampen met dezelfde lichtsterkte.

grafiek



Het is duidelijk dat een LED-lamp een veel lager wattage heeft dan een gloeilamp die dezelfde hoeveelheid licht geeft. Het verschil is zo groot dat je kunt inzien dat een LED-lamp een lager wattage heeft dan een spaarlamp die dezelfde hoeveelheid licht geeft.

- 4p 12 Bereken hoeveel procent meer wattage een spaarlamp nodig heeft, vergeleken met een LED-lamp die dezelfde hoeveelheid licht geeft.

IQ-test

Bij onderzoeken naar het vermogen tot logisch redeneren, zoals bijvoorbeeld in een IQ-test, worden vaak onzinnige uitspraken gebruikt die de kandidaat als waar aan moet nemen. Dit wordt gedaan, opdat de antwoorden op de vragen niet op basis van de werkelijkheid, maar op basis van logica gegeven worden. De volgende vraag komt uit zo'n test.

Ga ervan uit dat de volgende drie uitspraken waar zijn.

- 1 Alle vrouwen¹ worden op den duur kaal.
- 2 Alle vrouwen houden van alle mannen.
- 3 Alle mannen houden van winkelen.

- 4p 13 Geef van elk van de vier onderstaande beweringen aan of deze wel of niet uit de bovenstaande uitspraken volgt. Licht elk van je antwoorden toe.
- Bewering a: Iemand die kaal is, is geen man.
 - Bewering b: Als iemand niet kaal wordt, dan is het geen vrouw.
 - Bewering c: Kale vrouwen houden van winkelen.
 - Bewering d: Vrouwen houden van mannen die van winkelen houden.

We voeren de volgende afkortingen in:

- M:** De persoon is een man.
- W:** De persoon houdt van winkelen.
- K:** De persoon is kaal.

- 3p 14 Schrijf de bewering "als een vrouw kaal is, dan houdt ze van winkelen" op in logische symbolen. Gebruik daarbij alleen de bovenstaande afkortingen.

noot 1 We gaan er in de gehele opgave van uit dat elke persoon óf een man óf een vrouw is.

We bekijken de volgende logische bewering: $\neg K \Rightarrow W$

Deze bewering volgt niet uit de drie uitspraken aan het begin van de opgave. Hieronder staan twee extra uitspraken:

- 4 Alle mannen hebben haar.
- 5 Vrouwen die van mannen houden, houden van winkelen.

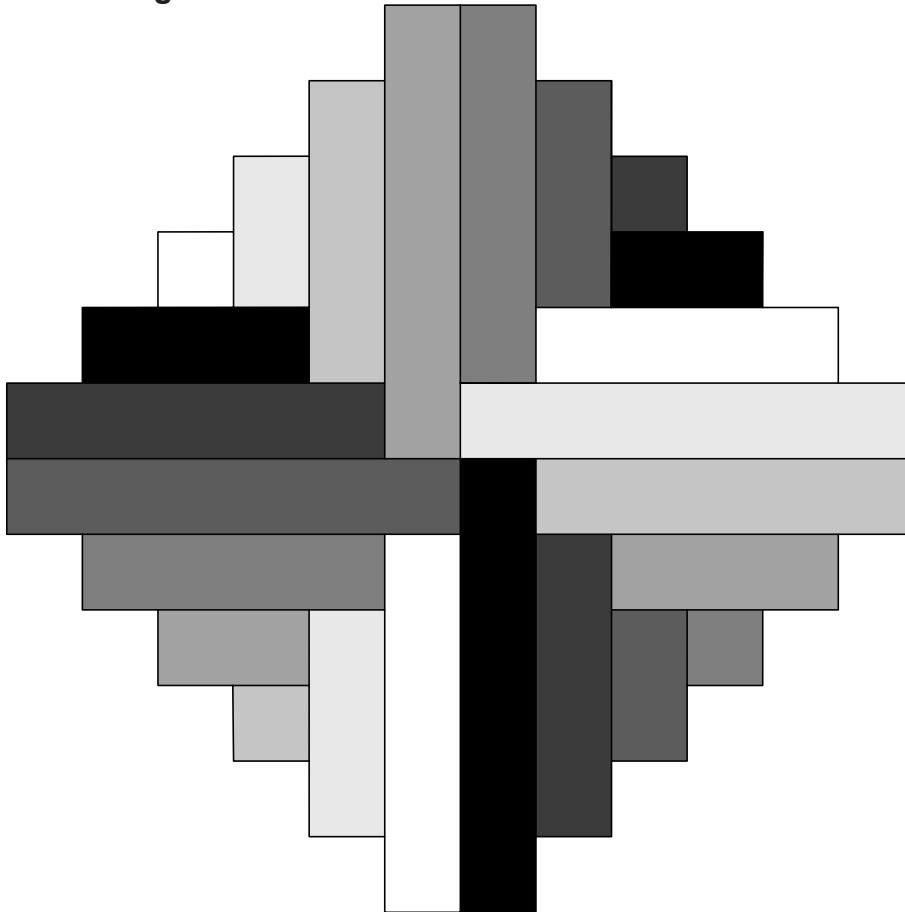
Als één van deze twee extra uitspraken toegevoegd wordt aan het lijstje uitspraken 1, 2 en 3 dan volgt de bewering $\neg K \Rightarrow W$ wel uit dat lijstje uitspraken.

- 3p **15** Beredeneer welke van deze twee uitspraken moet worden toegevoegd aan het lijstje uitspraken.

Serigrafia

De kunstenaar Max Bill paste geometrie toe in zijn werk. Het kunstwerk Serigrafia heeft hij in 1979 gemaakt. Het werk is oorspronkelijk in diverse kleuren uitgevoerd. In onderstaande afbeelding zijn die vervangen door diverse tinten grijs (waaronder ook wit en zwart).

afbeelding



We gaan kijken hoe dit kunstwerk is opgebouwd.

Op de uitwerkbijlage zie je figuur 1, de startfiguur ($n = 1$). Deze figuur bestaat uit 4 rechthoeken¹ van 1 bij 1 cm. Figuur 2 ($n = 2$) bestaat uit de rechthoeken van figuur 1, uitgebreid met 4 rechthoeken van 2 bij 1 cm. Figuur 3 ($n = 3$) bestaat uit de rechthoeken van figuur 2, uitgebreid met 4 rechthoeken van 3 bij 1 cm. Op deze manier zou je het kunstwerk onbeperkt uit kunnen breiden.

In het midden van de figuren zie je steeds een draaipunt getekend. Als je niet op de grijs tinten let en de figuur over 90° draait, krijg je weer dezelfde figuur.

- 3p 16 Teken op de uitwerkbijlage het rechterbovendeele van figuur 5, het kwart dus dat bij de pijl hoort.

noot 1 Let op: een vierkant is ook een rechthoek.

Als het figuurnummer, n dus, groter wordt, wordt het bijbehorende aantal rechthoeken (inclusief vierkanten) in een figuur ook groter.

- 3p **17** Bereken bij welk figuurnummer n het aantal rechthoeken gelijk is aan 112.

Voor de oppervlakte (in cm^2) van figuur n geldt de volgende formule:

$$\text{Oppervlakte} = 4(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

- 5p **18** Toon aan dat deze formule juist is en bereken de oppervlakte van figuur 8.

Nu gaan we kijken naar de tinten grijs die in de kleurloze versie van Serigrafia gebruikt zijn.

Begin bij het witte vierkantje links en draai met de wijzers van de klok mee. Je telt dan 8 verschillende tinten grijs (van wit tot en met zwart). Max Bill heeft ervoor gezorgd dat die grijstinten zich telkens in dezelfde volgorde herhalen totdat je alle 24 rechthoeken tegengekomen bent. Je zou, op dezelfde manier werkend als Max Bill, die tinten grijs van de 'eerste 8 rechthoeken' ook in een andere volgorde hebben kunnen plaatsen. Door de grijstinten in volgorde te variëren, zou je heel veel verschillende kunstwerken kunnen maken.

- 3p **19** Bereken hoeveel verschillende kunstwerken er van Serigrafia (het kunstwerk van de kleurloze afbeelding) kunnen zijn.

Banken in Groningen

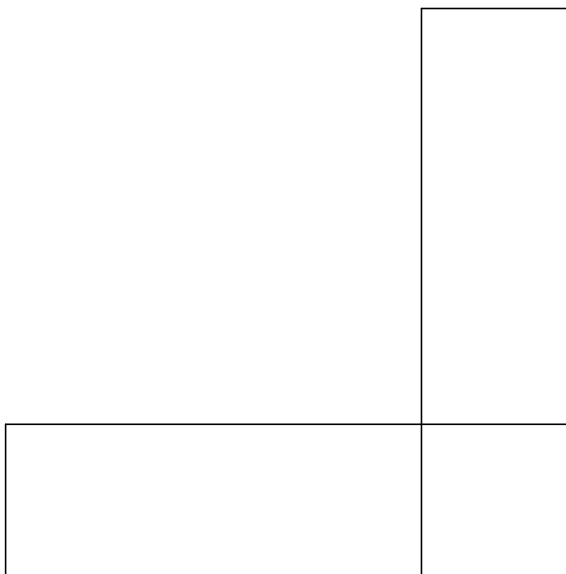
In Groningen staat een kunstwerk dat gemaakt is uit twee even grote rechthoekige banken waarvan de bovenkanten op gelijke hoogte liggen. Zie de foto. Op de uitwerkbijlage staat een tekening van deze situatie. De hoek tussen de twee banken is recht (90°). Dit kun je ook in het onderstaande bovenaanzicht zien.

Op de tekening op de uitwerkbijlage is ook een lijn getekend die de horizon voorstelt.

foto



bovenaanzicht



- 3p **20** Leg met behulp van het tekenen van hulplijnen op de uitwerkbijlage uit dat de getekende lijn inderdaad de horizon is die bij deze tekening hoort.

Een andere kunstenaar is van mening dat het kunstwerk wel wat aanvulling kan gebruiken en wil graag de voorste bank verlengen met een vierkant betonnen tafeltje dat net zo hoog is als de banken en precies past tegen de linkerzijde van de voorste bank. Het tafeltje is dus net zo breed als de zijde a (zie foto) van de bank.

- 5p 21 Teken in dezelfde figuur op de uitwerkbijlage de **bovenkant** van dit tafeltje erbij.