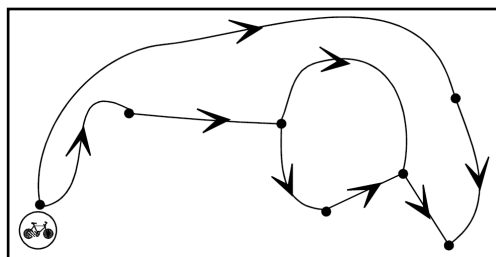
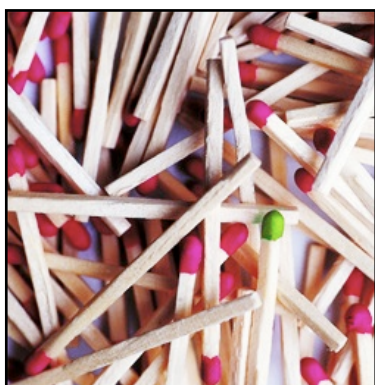
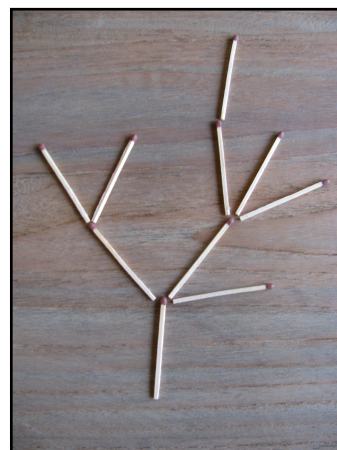


WISKUNDE B-DAG 2011

Vrijdag 18 november, 9:00-16:00 uur



De laatste zet



De Wiskunde B-dag wordt mede mogelijk gemaakt door



Vooraf

Deze Wiskunde B-dag opdracht gaat over spellen voor twee personen. Het zijn spellen waarbij toeval (bijvoorbeeld omdat er met een dobbelsteen wordt bepaald wat je mag doen) geen rol speelt. De spelregels zijn heel precies vastgelegd; bij elke spelsituatie ligt daardoor vast welke zetten toegestaan zijn. Spelers doen om beurten een zet. Wie niet meer kan zetten verliest. Maar je wilt natuurlijk wel winnen. Daarom ga je op zoek naar een plan om dat te bereiken, indien het mogelijk is. Zo'n plan heet een **winnende strategie**.

Opbouw van de opdracht:

Deel 1

Je krijgt vier spellen voorgelegd. Die zijn bedoeld om vertrouwd te raken met het zoeken naar een winnende strategie. Uiteraard kun je, met vier personen in je groep, de spelletjes verdelen over twee tweetallen. Zorg er in dat geval wel voor dat je de resultaten en ideeën onderling vergelijkt en met elkaar deelt! In de tekst van **Deel 1** staan opdrachten, herkenbaar aan het bolletje (•), die je op weg helpen. De degelijk uitgewerkte bevindingen daarvan beschrijf je in het eindverslag.

Deel 2

Hier wordt theorie aangedragen waarmee je diverse spellen kunt analyseren. Zorg dat je die theorie koppelt aan dat wat je in **Deel 1** zelf hebt bedacht. De techniek die in deel 2 wordt voorgesteld heet **Back-tracking**. Denken vanuit de eindpositie van een spel naar voorgaande posities is erg handig voor het vinden van een mogelijk winnende strategie. Ook de bevindingen van dit deel beschrijf je in je eindverslag.

Deel 3

Hier ga je met één van de spellen experimenteren aan de hand van een Excelbestand. Daarmee laat je de computer het domme werk voor jou doen, zodat je het denken mede kunt laten ondersteunen door de output van Excel. En weer beschrijf je je bevindingen in het eindverslag.

Slotopdracht

Uiteindelijk krijg je een keuze tussen het verder analyseren van de spellen uit **Deel 3** of het analyseren van moeilijkere opdrachten bij één van de andere speltypen uit **Deel 1** en **Deel 2**. Ook hier zijn de diverse vragen en suggesties leidraad voor je eigen onderzoek en aangegeven met de bolletjes (•).

Het eindproduct

Het uiteindelijke verslag moet goed leesbaar zijn voor iemand die niet van te voren al weet waar de opgaven over gaan. Dat betekent dat je helder moet beschrijven wat de probleemstelling is en wat je als team hebt onderzocht. Natuurlijk mag je in het verslag de afzonderlijke opgaven uit de tekst volgen. Maar het is ook goed - en misschien zelfs wel beter - als je een verslag inlevert dat uitgaat van wat jij bij de **Slotopdracht** hebt gekozen, met daarbij een grondige verantwoording en uiteraard met gebruikmaking van elementen die in de delen 1, 2 en 3 zijn aangekaart en door jullie onderzocht.

Lever een goed kopieerbaar verslag in. Als je handgeschreven stukken toevoegt, zorg dan dat je een zwarte pen gebruikt omdat dat beter kopieert dan andere kleuren.

Suggesties voor een tijdsindeling van 9 uur tot 16 uur:

- | | |
|-------------|--|
| 9 - 11 uur | Deel 1: zelf doordenken van hoe een spel handig te spelen. |
| 11 - 12 uur | Deel 2: vertrouwd raken met Back-tracking en bijbehorende notatie. |
| 12 - 13 uur | Deel 3: eigen onderzoek met behulp van Excel. |
| 13 - 16 uur | Slotopdracht uitvoeren en schrijven van het verslag. |

Advies: Neem af en toe een pauze om wat te rusten en te eten en drinken.

Veel plezier en succes

Deel 1: 4 spelletjes voor 2 personen

Hier volgen vier spellen met de bedoeling dat je die in tweetallen speelt om samen greep te krijgen op winstmogelijkheden.

Spel 1: Het (1, 2, 3)-spel

Benodigd materiaal: *Een aantal lucifers of andere gelijksoortige voorwerpen.*
Vorbereiding: *Leg een aantal lucifers in een hoopje op tafel, bijvoorbeeld 17.*
Spelregels: *Een zet bestaat uit het wegnemen van 1, 2 of 3 lucifers.
De spelers zetten om de beurt.
Wie begint: wissel dat af.*
Winst/verliesregel: *Wie niet meer kan zetten verliest.*

Bij elke zet verdwijnt er minstens één lucifer van het hoopje. Uiteindelijk is dus altijd één van de twee spelers de verliezer: er liggen steeds minder lucifers op tafel en er komt een moment dat er geen toegestane zet meer mogelijk is.

- Speel dit spel een aantal keren. Doe het zeker ook met andere, kleinere startaantallen dan 17. Ga zo lang door tot je weet hoe je het spel kunt winnen, als het te winnen valt... En denk ook na over beginaantallen waarmee je als eerste speler *onmogelijk* kunt winnen, hoe slim jij ook speelt. Daarbij ga je er vanuit dat je tegenstander optimaal speelt.

De bedoeling is dat je het spel zo doorziet dat je precies kunt aangeven bij welke startaantallen de beginspeler kan winnen, ongeacht hoe slim de tegenstander ook is. Bij de andere startaantallen wint dan de tweede speler, hoe slim de beginspeler ook is.

Een speelwijze die zegt hoe je het spel speelt heet een **STRATEGIE**.

Variante op spel 1: het (3, 4)-spel

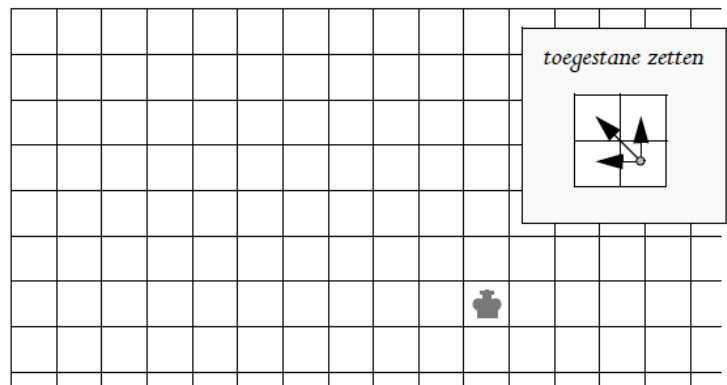
- Kun je ook een winnende strategie bedenken bij het wegneemspel als je van een hoopje met 65 lucifers steeds alleen maar óf 3 óf 4 lucifers mag wegnemen in plaats van 1, 2 of 3?

Spel 2: Een beperkte koning op het schaakbord

Benodigd materiaal: *Schaakbord of (beter) ruitjespapier en een koning; een muntje of stukje gum is ook goed.*
Vorbereiding: *Zet de koning op een veld. Dat is het startveld van het spel.*
Spelregels: *Een toegestane zet bestaat uit het verplaatsen van de koning over één vakje: naar boven, naar links of schuin naar linksboven.
De spelers zetten om de beurt.
Wie begint: wissel dat af.*
Winst/verlies-regel: *Wie niet meer kan zetten verliest.*

De koning is beperkt in zijn richting van bewegen: naar rechts of naar onder is niet toegestaan. Uiteindelijk zal hij dus in het veld linksboven eindigen en vandaar kan hij echt niet verder.

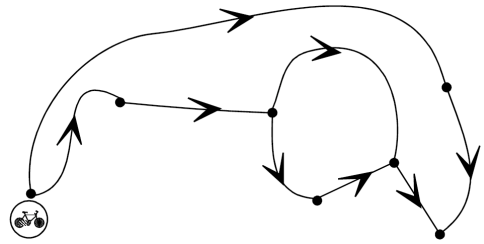
Het gaat er om dat je precies kunt aangeven bij welke startvelden de beginspeler kan winnen, ongeacht hoe slim de tegenstander is. Bij de andere startvelden wint dan de tweede speler, hoe slim de beginspeler ook is.



- Probeer de winnende en verliezende startvelden te vinden.

Spel 3. Het éénrichtingsverkeerspel

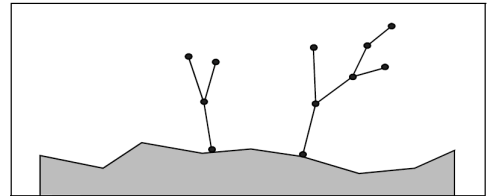
Bij dit spel verplaats je om beurten het fietsje over één etappe vanaf het beginpunt dat is aangegeven met het fietsje. Een etappe loopt van stip naar stip. Let op de pijlen: er is éénrichtingsverkeer! Wie niet meer kan zetten, verliest!



- Kan de beginnende speler hier winnen?

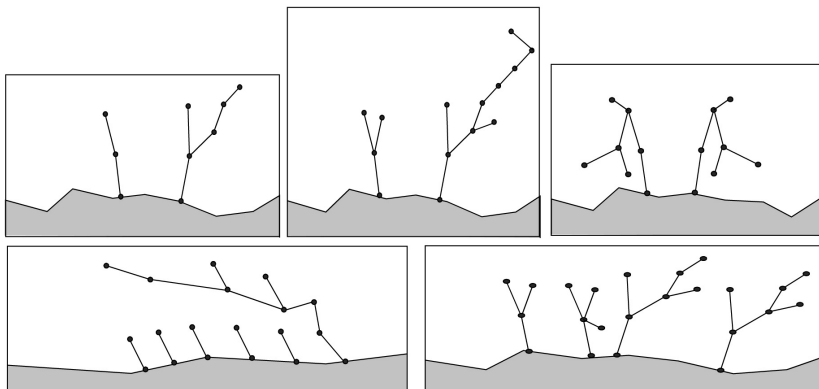
Spel 4. Het snoeispel

Bij dit spel gaat het om het snoeien van boompjes. Een boom bestaat uit twijgen en knopen. Elke twijg verbindt twee knopen en heeft daarbij geen tussenliggende knopen. In een knoop mogen wel meerdere twijgen samenkomen. Je ziet hier een voorbeeld van een tuintje met twee boompjes. Bij elke knoop is er precies één sapstroom van de grond naar die knoop. Een zet bestaat uit het wegknippen (snoeien) van een twijg direct boven de knoop waar hij begint. Je kunt dus bijvoorbeeld ook een boompje in één keer helemaal wegsnoeien door de twijg van het boompje direct bij de grond weg te knippen. Of je kunt in het rechter boompje in deze tuin het deel dat vanaf de tweede knop vanaf de grond naar rechts vertakt in één keer verwijderen door de twijg direct boven de tweede knoop weg te knippen.



Benodigd materiaal: *Papier en potlood.*
Vorbereiding: *Teken een tuin met een aantal boompjes.*
Spelregels: *Een zet bestaat uit het wegknippen van een twijgje met alles wat dan mee komt.*
De spelers zetten om de beurt.
Wie begint: wissel dat af.
Winst/verlies-regel: *Wie niet meer kan snoeien verliest.*

- Speel het snoeispel met zijn tweeën in deze vijf tuintjes.



Bij het vijfde tuintje (het rechter tuintje in de onderste rij) kun je een handige strategie volgen! Als eerste zet snoei je in het tweede boompje vanaf links gezien één van de twijgen bij de tweede knoop vanaf de grond.

Met deze eerste zet weet je zeker dat je uiteindelijk wint!

- Hoe kun je dat zeker weten? En met welke strategie?
- Lastig! (*overslaan is daarom niet erg*): bij een andere eerste zet kan je tegenstander winnen. Is dat altijd waar?

Deel 2: Onpartijdige spellen; de theorie

A Winnen door backtracking met 0 en 1

In dit deel wordt een techniek besproken die je waarschijnlijk al bij deel 1 hebt gebruikt. Met die techniek gaan we straks verder, maar nu eerst een stukje theorie!

Terugblik op het (1, 2, 3)-spel

Waarschijnlijk heb je de strategie bij het (1, 2, 3)-spel wel ontdekt. En anders leer je die nu! Met elke zet die jij doet, laat je een 4-voud aan lucifers achter. Bij de eerste zet vanaf 17 lucifers pak jij er 1; je laat 16 lucifers achter. Je tegenstander kan nu zeker niet een zet doen, waarmee er weer een viervoud aan lucifers op tafel overblijft. Maar jij kunt dat daarna op jouw beurt weer wel! Je tegenstander pakt namelijk 1, 2 of 3 lucifers en jij reageert daarop met het wegnemen van respectievelijk 3, 2 of 1 lucifers. De aantallen lucifers die jij achterlaat bij de starthoeveelheid van 17 lucifers zijn dus achtereenvolgens 16, 12, 8, 4 en 0.

1. We spelen het (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)-spel en er liggen 1000 lucifers op tafel.
 - a. Welke zet **moet** de beginspeler doen om zeker te zijn van de overwinning?
 - b. Na hoeveel zetten is het spel uit, als de beginspeler correct speelt?
 - c. Is het spel te winnen voor de beginspeler als de starthoeveelheid 374 lucifers is?
Neem aan dat beide spelers optimaal spelen.

Achteruit denken: back-tracking bij spel 1

Hoe ontdekte je de 4-vouden-strategie bij spel 1? Ongetwijfeld ongeveer op de volgende manier. Je weet: als er 0 lucifers op tafel liggen, dan is de speler die aan zet is de verliezer. Als jij wilt winnen, moet je aan het eind dus niet 0 lucifers voor je neus krijgen, maar wel 1, 2 of 3. Dat betekent dat degene die bij 4 lucifers aan zet is, verliest. Want die is gedwongen één van de winstposities 3, 2, of 1 achter te laten. Dat betekent weer dat de situaties met 5, 6, en 7 lucifers voor je neus winst betekenen! Want in die gevallen kun je de verliespositie 4 achterlaten voor je tegenstander. Dat betekent dat je met 8 lucifers aan zet enzovoort.

Je denkt als het ware *achteruit* vanuit het einde van het spel.

Deze strategie heet **BACK-TRACKING**. Via back-tracking kunnen we de spelletjes van deel 1 goed analyseren en nog veel meer andere spelletjes ook.

Winstposities en Verliesposities

In de theorie over dit soort spelletjes wordt gesproken over spelposities, kortweg *posities*. Het zijn de toestanden waarin het spel zich bevindt. Bij het (1, 2, 3)-spel is de spelpositie het aantal lucifers dat nog op tafel ligt. Bij het éénrichtingsspel is het de plek waar het fietsje staat.

Je hebt gezien dat de aantallen 0, 4, 8, 12, enzovoort *verliesposities* zijn bij het (1, 2, 3)-spel. Als je aan zet bent in een verliespositie kun je niet winnen als de tegenstander geen fouten maakt. De posities 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, enzovoorts zijn de *winstposities*. Maak je als speler in die posities geen fout, dan heeft je tegenstander het nakijken.

Een algemene definitie van winst- en verliespositie bij spellen waarbij geldt "wie niet kan zetten verliest" is:

- *Winstpositie*: er is vanuit deze positie ten minste één toegestane zet naar een verliespositie
- *Verliespositie*: er zijn vanuit deze positie alleen maar toegestane zetten naar een winstpositie mogelijk.

Merk op dat je vanuit een winstpositie soms ook wel naar winstposities kunt gaan, maar er is altijd ten minste één verliespositie bereikbaar. Kies je toch voor een zet naar een winstpositie, dan blunder je, omdat je dan de regie over het spel overdraagt aan je tegenstander!

Posities aangeven met de waarden 0 en 1.

Je kunt de twee soorten posities op het "speelveld" noteren met W (inst) en V (erlies), maar het gebruik van de waarden **1** (voor een winstpositie) en **0** (voor een verliespositie) zie je vaak in de literatuur over deze spellen.

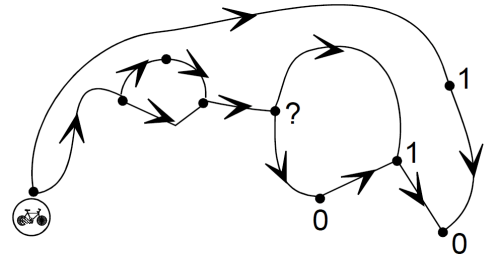
We bekijken hier, als voorbeeld voor het plaatsen van de waarden 1 en 0, een speelveld van het éénrichtingsverkeerspel met het fietsje.

Je werkt daarbij als volgt:

- Als er vanaf een positie een pijl naar een positie met een 0 gaat, dan zet je bij die positie een 1. Immers: als toekomstig winnaar zet je de tegenstander natuurlijk op een verliespositie.
- Als er vanaf een positie geen enkele pijl naar een positie met een 0 gaat, dan zet je bij die positie een 0. Vanaf die positie heb je immers geen mogelijke zet naar een verliespositie voor de tegenstander.

2. Gebruik de figuur hiernaast om te zien of je het bovenstaande begrijpt en kunt toepassen aan de hand van de vragen **a**, **b** en **c**

- a. Controleer of de al gegeven 0'en en 1'en bij de posities in dit speelveld goed zijn aangegeven.



De waarde van de positie bij het vraagteken (?) is 1, want je kunt vanaf daar de tegenstander een verliespositie aanbieden. Je kunt vanaf daar ook naar de positie met waarde 1, maar dat is niet erg slim ...

- b. De positie van waaruit de pijl naar het vraagteken vertrekt, krijgt waarde 0.

Want als je daar staat

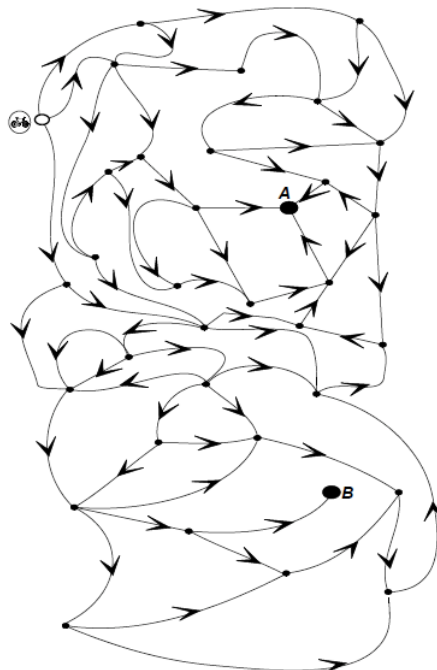
- c. Wie wint dit spel bij het volgen van de goede strategie: de eerste speler of de tweede?

3. Gebruik je kennis van het plaatsen van de waarden 0 en 1 om het volgende meer ingewikkelde éénrichtingsverkeer-speelveld te onderzoeken. De twee mogelijke eindposities zijn gemarkeerd met **A** en **B**, daar begin je dus met een 0 te zetten.

Dit speelveld is op een werkblad groter weergegeven.

- a. Kan de beginnende speler winnen?

- b. De verliezer komt altijd terecht op **A** of **B**. Kan de verliezer zorgen dat het **B** wordt?



Deel 3: Wegneem-spellen: experimenteren met Excel

Dit weet je nu al:

Bij spel 1 moet de speler die aan de beurt is 1, 2 of 3 lucifers wegnemen. Er wordt begonnen met een hoop van bijvoorbeeld 25 stuks.

In de volgende tabel zie je het aantal resterende lucifers in de bovenste rij en in de tweede rij de bijbehorende nullen (de verliesposities) en enen (de winstposities) aangegeven voor de aantallen lucifers 0 tot en met zover je wilt. De rij begint vanaf links met het einde van het spel:

0 lucifers.

<i>aantal lucifers</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>waarde (0 of 1)</i>	0	1	1	1	0	1	1	1	0

De theorie van de winstroute

Het setje $\{1, 2, 3\}$ in het spel heet de **pakset** van het spel; het is de verzameling van toegestane zetten. De rij van nullen en enen heet de **winstroute**. Als je een eenvoudige beschrijving van de winstroute hebt (zoals hier), dan heb je een winnende strategie voor de speler die begint, tenminste als de startpositie waarde 1 heeft.

Je doet namelijk steeds 1, 2 of 3 stapjes naar links in de winstroute. Dat is alsof je 1, 2 of 3 lucifers van de hoop wegneemt.

Als toekomstig winnaar laat je na elke zet een positie met waarde 0 in de winstroute achter voor jouw tegenspeler. Je kunt dan altijd naar links in de winstroute naar de eerstvolgende 0. De verliezer kan dat niet. Want van een 0 is er geen toegestane zet naar een volgende 0.

De rij bestaat uit een zichzelf steeds herhalend blokje: '0111'. De lengte van dat herhalende blokje is 4. Daarom noemen we deze winstroute **periodiek met periode 4**.

Natuurlijk ga je onderzoeken wat er bij andere paksets gebeurt.

Daarbij horen onderzoeksvragen zoals:

- *Hoe ziet de winstroute eruit?*
- *Is er een winnende strategie voor de speler die begint?*
- *Waarom krijg je (soms?) periodiciteit?*

7. Vooroefening.

Oefen jezelf in het maken van winstroutes bij de volgende paksets.

Als er een periodieke rij ontstaat, noteer dan meteen ook de periode.

- | | |
|---|---------------------------------------|
| a. $\{1, 2, 3, 4\}$ met winstroute 0 1 1 1 1 0 1 | e. $\{1, 3, 4\}$ met winstroute |
| b. $\{1, 2\}$ met winstroute | f. $\{2, 3, 4\}$ met winstroute |
| c. $\{1, 3\}$ met winstroute | g. $\{2, 4\}$ met winstroute |
| d. $\{1, 2, 4\}$ met winstroute | h. $\{3, 6\}$ met winstroute |

8. Een vermoeden met bewijs.

- De paksets bij **g** en **h** bestaan uit de 2- en de 3-vouden van de pakset bij **b**. De winstroutes van **g** en **h** hangen daarom ook samen met de winstroute van **b**. Hoe bouw je vanuit de winstroute van $\{1, 2\}$ die van $\{4, 8\}$?
- Als je er nog niet helemaal zeker van bent dat jouw antwoord algemeen klopt, probeer je het met een andere pakset en veelvouden daarvan nog eens. Onderzoek bijvoorbeeld **e** en zijn dubbele $\{2, 6, 8\}$.

- c. Mogelijk onderzoek je nog meer zulke paren van paksets. Als je zeker bent van wat het verband is, moet je een verklaring kunnen geven waarom het verband algemeen geldt. Zo'n verklaring is een bewijs voor het verband dat je hebt gevonden.

9. *Blokken van nullen en blokken van enen in de winstroute.*

- a. Bij de pakrij $\{1, 2, 3\}$ komen er hooguit 3 enen na elkaar in de winstroute en hooguit 1 nul. 3 en 1 zijn precies het kleinste en het grootste getal van de pakset. Geldt dit algemeen?
- b. Is dit waar?
Als de lengte van het langste blok enen in de winstroute gelijk is aan het grootste getal van de pakset, dan is de pakset een blok van 1 tot en met dat grootste getal.

Andere vermoedens over winstroutes

Onderzoek met de computer: het programma PakWeg

Omdat het bepalen van de winstroute steeds hetzelfde klusje is, doe je dat vanaf nu met de computer. Open het excelbestand "PakWeg".

Bij het openen zie je de winst- en verliesposities bij de pakset $\{1, 4\}$. Ook krijg je informatie over de periode en vanaf welke positie die periode begint.

Vul je andere getallen in bij de pakset (maximaal 7 getallen), dan genereert het programma zelf de bijbehorende winstroute en informatie over periode en de startpositie van de periode.

Een korte handleiding voor het gebruik van PakWeg is apart bijgevoegd.

Bij dit gedeelte gaat het er om dat je zelf vermoedens bedenkt en die onderzoekt. Hier krijg je alleen wat suggesties. Wat je onderzoekt, welke voorbeelden je kiest en welke redeneringen je bedenkt, dat is verder jouw zaak ...

Daarom zijn de suggesties niet genummerd alsof het vragen zijn die je moet beantwoorden, maar worden ze alleen aangegeven met bolletjes.

Periodiciteit

Bij de voorbeelden met korte paksets van kleinere getallen zul je wel gemerkt hebben dat in de winstroute steeds hetzelfde blok herhaald wordt.

De lengte van zo'n blok noemen we de **periode van de winstroute**.

Een sluitende redenering waarom dat zo is wordt gewaardeerd!

- Bepaal voor alle waarden van n ($n = 2, 3, 4, 5, \dots$) de periode bij de pakset $\{1, n\}$. Formuleer een bewering als: "Bij pakset $\{1, n\}$ is de periode van de winstroute ...".
- Doe dit ook voor paksets van de vorm $\{2, n\}$.
- Bij de twee paksets $\{1, 3, 6\}$ en $\{1, 2, 3, 8\}$ vind je in de winstroutes periodes van lengte 9. Maar het blokje 0'en en 1'en dat herhaald wordt is niet hetzelfde. Kun je nog meer van zulke voorbeelden vinden?

Slotopdracht 2 Andere Schaakbordspellen

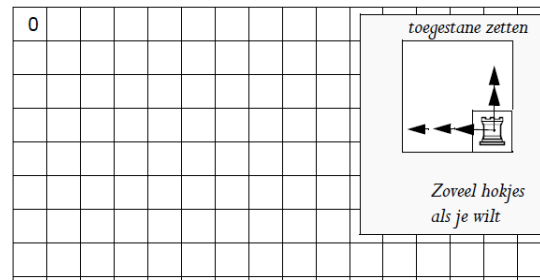
Eerder speelde je op ruitjespapier al met de beperkte koning en het beperkte paard. Hier volgen nog twee van dergelijke spellen. Kenmerk is dat het stuk waarmee je zet nu niet alleen maar beperkte sprongen maakt, maar ook zo ver als je maar wilt. In beide gevallen moet je de verdeling van de 0'en en 1'en over de hokjes te weten komen om het spel optimaal te kunnen spelen. Bij deze spellen is het lastig om dat ook echt te vinden. Je kunt je laten uitdagen een formulering voor de mogelijke verliesvelden te geven, maar je kunt ook streven naar een beperkter doel.

Het spel met de Noord-West toren

De toren mag een willekeurig aantal vakjes opschuiven, zolang het maar naar boven (noord) of naar links (west) is.

Onbeperkt naar Noord of West

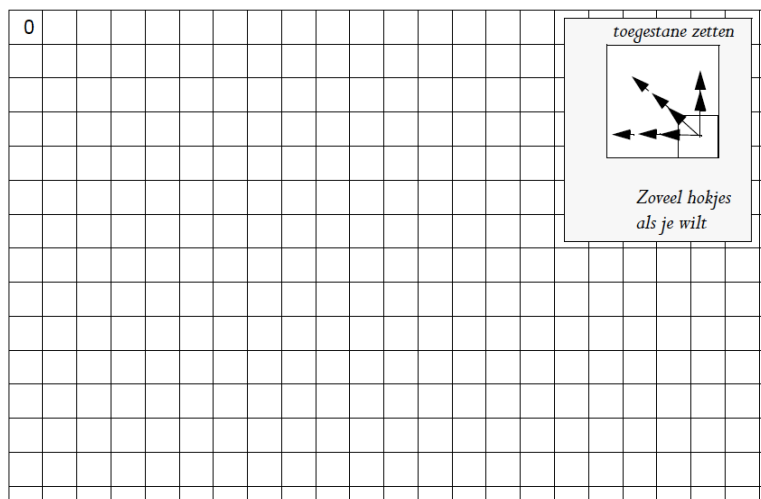
- Bepaal de winst- en verliesposities op het hele veld.
- Is er altijd een winnende strategie voor de beginnende speler?



Het spel met de Noord-Noordwest-West dame

De dame mag een willekeurig aantal vakjes opschuiven naar boven (noord), diagonaal naar linksboven (noordwest) of links (west).

Onbeperkt naar Noord, Noordwest of West



- Zet om te beginnen 1-tjes op de velden waar je in één zet naar de 0 kunt gaan.
- Nu kun je weer enkele verliezende velden aanwijzen.
- Vind uit hoe je verder kunt backtracken.
- Speel het spel met de dame in startvakje (20, 40)
- Bepaal weer de winst- en verliesposities van het hele veld.
- Je vindt misschien een karakteristieke beschrijving van de verliezende velden. Dat zou heel mooi zijn!
- Het is zeker ook al mooi als je bij de volgende startvelden de winnende zet kunt aangeven: (15, 31); (20, 21); (100, 200).
- Hoe meer je over het patroon van de verliezende velden kunt zeggen, hoe beter!