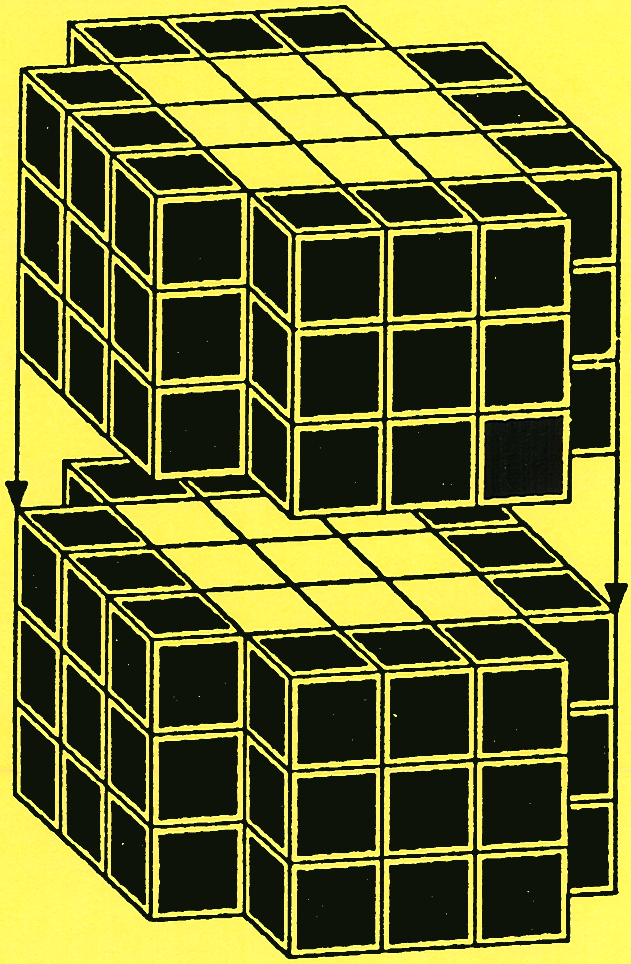
januari 1992

experimentele versie

W 12-16

Dubbel op

Docentenhandleiding



Publikatie van het team W12-16
onder verantwoordelijkheid van de
Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs

Ontwerp: Pieter van der Zwaart

Docentenhandleiding bij Dubbel Op

Plaats van Dubbel Op in het programma

Dubbel Op is een vervolg op het algebrapakket Winnende Formules. Het pakket is gepland voor ongeveer zes lessen in klas 3 mavo.
In het pakket wordt veelvuldig gebruik gemaakt van het model lengte * breedte = oppervlakte, waarbij lengte en/of breedte en daarmee ook de oppervlakte variabel worden gemaakt. Op bladzijde 7 wordt op dezelfde manier gebruik gemaakt van de formule $I = {}^1\!/_3 Gh$. Indien de leerlingen deze formule nog niet echt beheersen kunnen de betreffende opdrachten beter achterwege worden gelaten.
In Winnende Formules hebben de leerlingen geleerd dat je door slim naar de structuur van formules te kijken, uitspraken kunt doen bij het vergelijken van twee verschillende verbanden. Op een soortgelijke manier gaan leerlingen in Dubbel Op uitzoeken wanneer twee op het oog verschillende formules toch hetzelfde verband beschrijven.
Winnende Formules komt voor Dubbel Op omdat de vraagstelling in Winnende Formules: 'Welk van deze twee verbanden wint op den duur en waar haalt de een de ander in?', gemakkelijker vanuit situaties te behandelen is en daarmee in eerste aanzet minder formeel van karakter is dan de vraagstelling in Dubbel Op.

Doelen in Dubbel Op

Algemeen

Formele manipulaties met formules zijn expliciet doel van het onderwijs in het mavo D-programma. Met andere woorden: leerlingen moeten op grond van de uiterlijke vorm van de formule conclusies kunnen trekken, zonder dat ze direct steun zoeken in een achterliggende situatie of model. Winnende Formules en Dubbel Op geven beide de mogelijkheid om op dat niveau uit te komen. De beide pakketten bevatten ook een opbouw naar het gevraagde niveau toe. Die opbouw gebeurt wel vanuit situaties en modellen omdat anders de gevraagde manipulaties betekenisloos blijven en daardoor minder toepasbaar zijn in nieuwe situaties.

Expliciet

Leerlingen kunnen bij situaties eenvoudige lineaire en machtsformules opstellen en controleren of een gegeven formule bij de situatie past.
Leerlingen kunnen herleidingen van formules controleren met behulp van situatie, tabel en grafiek, de laatste twee eventueel met behulp van een geschikt computerprogramma.
Leerlingen kunnen op grond van de vorm van formules:

- Splitsen en samennemen van termen bij eenvoudige lineaire en machtsformules.
- Eenvoudige herleidingen van machten uitvoeren.

Opbouw van de leerstof

De vraag: 'Wanneer beschrijven twee formules hetzelfde verband?' heeft gedurende het werken door het pakket op z'n minst de volgende antwoorden:

- Als je in de achterliggende situatie ziet dat het verschillende manieren zijn om hetzelfde uit te rekenen.
- Als de formules bij dezelfde waarde voor de variabele steeds dezelfde uitkomst geven.
- Als de bijbehorende grafieken hetzelfde zijn.

Leerlingen ontdekken tijdens het werken met Dubbel Op dat er ook andere, formele regels zijn die je hanteert bij het manipuleren van formules. En minstens even belangrijk is dat de leerling vertrouwen opbouwt in het hanteren van die regels. Dit betekent dat de leerling lang terug moet kunnen vallen op een manier van redeneren waarvan hij/zij zeker weet dat die klopt.
Uiteindelijk wordt het formeel manipuleren 'afgedwongen' door de manipulaties uit te laten voeren op formules waar nauwelijks of in het geheel geen situatie of model bij te bedenken is. (Een leerling kan altijd grafieken en tabellen blijven maken bij twee formules, het werk wordt echter veel efficiënter naarmate hij meer gebruik maakt van formele redeneringen.)

Rollen van formules

Bij het leren omgaan met formules is het mogelijk om drie verschillende rollen te onderscheiden waarin formules ten tonele worden gevoerd.
De eerste rol is die van handige samenvatting van een steeds terugkerende serie rekenstappen. Bijvoorbeeld: Om de hoogte van de gasrekening te bepalen neem je het aantal m^3 verbruikt gas. Dat vermenigvuldig je met *f* 0,25; de prijs per m^3. Dan tel je *f* 30,- vastrecht er bij op. Dit wordt als formule: rekeningbedrag = 0,25 * verbruik + 30.
De tweede rol is die van beschrijver van een verband. Redeneringen gaan over de samenhang tussen variabelen. Bijvoorbeeld: Bij lengte * breedte = $5000 m^2$ kun je zien dat bij een grotere lengte een kleinere breedte past. (Als je bij een constant produkt één factor groter maakt moet je de andere kleiner maken.)
In de derde rol treedt de formule op als zelfstandig object.
Redeneringen gaan hier over manipulaties met de formules op grond van formele regels. Bijvoorbeeld: $3a^2 + 4a^2 = 7a^2 = 10a^2 - 3a^2$. Dit is correct, op grond van de distributieve eigenschap.
In Dubbel Op krijgen leerlingen de kans om zelf regels te formuleren. Deze formuleringen zullen sterk afhangen van hetgeen leerlingen al weten van formules. Ook hier liggen redenen om eerst de inhoud van Winnende Formules te behandelen en daarna die van Dubbel Op; de leerlingen gaan met een groter kennisrepertoire over formules van start in Dubbel Op.
Bij de derde rol past ook een formele notatie als $3a * 4a = 12 a^2$. Dit in plaats van bijvoorbeeld: $3a * 4a$ en $12a^2$ beschrijven hetzelfde verband. Je werkt in die derde rol met zelfstandige objecten en niet meer met beschrijvers van verbanden, dus met die zelfstandige objecten kun je ook operaties uitvoeren. Aan het eind van Dubbel Op wordt dan ook een formele notatie gebruikt.

In het werken met formules als zelfstandige objecten hebben leerlingen in eerste instantie geen mogelijkheden om hun redeneringen te controleren binnen de formele structuur. De behoefte aan zo'n controle treedt echter zeer vaak op. Bijvoorbeeld bij:

21a. Maak een formule die steeds twee keer zoveel uitrekent als **4 *a + 6 *a + 2**.

(Zie blz. 4 leerlingentekst)

Uit een groep van vier leerlingen kwamen vier verschillende antwoorden:

4 *a + 6 *a + 2 + 4 *a + 6 *a + 2

8 *a + 12 *a + 4

(4 *a + 6 *a + 2) * 2

20 *a + 4

Over het derde antwoord voelden de leerlingen zich zeer onzeker. Er staat wel keer twee, maar klopt het nou eigenlijk wel? Is het wel op een goede manier keer twee? De stapel tegels hielp hen niet verder, de haakjes waren niet naar de situatie toe te praten. (De andere drie formules waren volgens de leerlingen geheid goed, alles kon precies met stapels tegels worden beredeneerd.)

De leerlingen voelden zich een stuk zekerder toen de computer bij **8 *a + 12 *a + 4** en bij **(4 *a + 6 *a + 2) * 2** tabellen en grafieken produceerde die precies gelijk waren. Daarbij was het voor hun duidelijk dat je met het uitrekenen van een aantal waarden geen absolute zekerheid krijgt, maar dat je je er wel zekerder door kunt voelen. De steun lag in de andere twee rollen van formules. De tabel gaf aan dat de twee formules steeds hetzelde uitrekenen en de grafiek gaf aan dat het verloop bij een veranderende variabele hetzelfde was.

Kort samengevat: terug gaan naar de eerste twee rollen van formules geeft de leerlingen een mogelijkheid om binnen een (inmiddels) vertrouwd terrein hun redeneringen over de vorm van formules te controleren. Met het hulpmiddel tabel en grafiek achter de hand krijgen leerlingen meer mogelijkheden om te experimenteren met de vorm van formules; ze hebben controlemogelijkheden waar ze op vertrouwen.

Rol van de computer

Als een leerling formele manipulaties wil controleren met behulp van tabel en grafiek, kan de computer een goede rol spelen. Bij het experimenteren in een kleine groep stond het computerprogramma Tabel (Freudenthal instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht) steeds ter beschikking van de leerlingen. Dit programma levert tabellen en grafieken bij gegeven formules. Het gebruik van de computer zorgt ervoor dat het maken van berekeningen en het tekenen van grafieken vlot verloopt, zodat een leerling na het maken van tabel en grafiek niet hoeft te denken: 'Wat was het probleem ook al weer?' Verder voorkomt het problemen door voorkomende rekenfouten.

Met een transviewer is het goed mogelijk om bij klassikale besprekingen de computer te gebruiken. Dit als alternatief voor het individueel gebruik van de computer.

Noot

Natuurlijk zijn er diverse trucs te verzinnen om op een beperkt domein, verschillende formules tot op grote nauwkeurigheid dezelfde uitkomst te laten hebben.

Bijvoorbeeld:

In het computerprogramma tabel is het volgende mogelijk.

Neem als de kop van de tabel:

x	A	B

Kies voor A: een willekeurige formule in x.

Kies voor B: 0.001 * A * (x + 1000).

En de formules A en B zullen in de buurt van 0 vrij dicht bij elkaar in de buurt liggen.

Als je B leest als n^{-1} * A * (x + n), dan kun je zien dat voor kleine waarden van x, de factoren n^{-1} en ($x + n$) elkaar opheffen: $x + n$ is vrijwel gelijk aan n. Is het verschil tussen de formules A en B niet klein genoeg, dan maakt u n gewoon wat groter.

Ver verwijderd van 0 hebben de formules totaal verschillende uitkomsten.

Je kunt van deze noot natuurlijk ook een deugd maken. Dan gebruik je dit voorbeeld in de klas als je aan wilt geven dat uitrekenen en grafieken bekijken geen absolute garantie geeft dat twee formules hetzelfde verband beschrijven. Aan de andere kant laat dit voorbeeld zien, dat twee verschillende formules lokaal hetzelfde verband kunnen beschrijven. Over een groot domein tonen ze echter een totaal verschillend beeld.

Uit Euclides (januari '92) komt dit artikel met enige ervaringen uit de klas:

● :Serie ● ● ● ●

Wiskunde 12-16 (experimenteel)

▶ Oude regels met de rekenmachine.

Wim Schaafsma

De discussie over het gebruik van rekenmachines bij het vak wiskunde is op onze scholengemeenschap al zo'n tien jaar aan de gang en heeft nog steeds geen consensus opgeleverd. Vanaf schooljaar 1988/89 kunnen onze leerlingen via de administratie een rekenmachine kopen en in de brugklas wordt deze gebruikt. In hogere klassen hangt het van de leraar af of de apparaten tijdens de les of de repetitie gebruikt mogen worden. Het voordeel van eenheid in machines is duidelijk al lukt dat ook bij ons nog niet helemaal. Vandaar dat rekenmachinelessen nogal arbeidsintensief zijn. Sommige machines hebben een x-tot-de-macht-y toets, andere a-tot-de-macht-x, bij weer andere moet eerst een inversetoets (inv, 2nd, F) worden ingedrukt enz.
Daarom is het goed om een aantal lessen te besteden aan het werken met de rekenmachine. Als de leerlingen de verschillende toetsen goed kennen zijn de korte ophaal-lesjes in de vierde klas Mavo geen irritante lessen meer als je pakketten als 'Winnende formules' of 'Dubbel op' behandelt. Op de werkbladen vindt u enkele voorbeelden uit de lespakketjes van het team W12-16 waar de rekenmachine wordt gebruikt. Deze opgaven zijn duidelijk onderdelen uit een groter geheel.
Al heel lang geldt in het (wiskunde)onderwijs de stelregel dat leerlingen regels beter onthouden als ze die regels zelf ontdekken. Bij het rekenen met machten heb ik die stelregel ook altijd gehanteerd. En eigenlijk zijn dat best leuke lessen voor de leraar:

* je deelt het middenbord in tweeën
* op de linkerkant schrijf je sommen met machten
* rechts voorbeelden en non-voorbeelden
* de leerlingen formuleren de regels
* je schrijft de regels op de klapborden

Maar iedereen weet dat veel leerlingen eigenlijk niet toekomen aan het formuleren van regels omdat ze onderweg rekenfouten hebben gemaakt. Vaak zijn ze nog zo aan het narekenen, of zit hun hoofd zo vol onzekerheden door de rekenfouten dat het klassikaal formuleren van regels een andere wereld is.
Een ander bezwaar van deze methode en van veel opdrachten uit de 'realistische' wiskunde is dat er veel rekenwerk moet worden verricht en dat de leerlingen door een overvloed aan werkzaamheden niet meer toekomen aan meedenken. Het overzicht en het inzicht gaan verloren door teveel 'ruis'.
Meestal beperkte ik me daarom tot eenvoudige getallen en kleine machten. Tenslotte moet je wel een barbaar zijn om leerlingen het produkt van 7^5 en 7^{11} met de hand te laten uitrekenen. (Overigens gaf mijn vroegere Mulodirecteur me dergelijke opdrachten vaak als strafwerk op. Vandaar misschien mijn aversie?) Soms kreeg je daarom in de les weleens de vraag: 'Gaat die regel nou wel voor alle getallen op?'

Met de rekenmachine wordt het anders maar zeker niet eenvoudiger. De leerling krijgt het gemakkelijker, de leraar krijgt het moeilijker. Om verschillende redenen blijf ik deze lessen klassikaal en zonder werkbladen doen. Er ontstaat wel een nieuwe 'ruis' in deze lessen met de rekenmachine, je loopt voortdurend van de ene rekenmachine naar de andere. Maar de verwondering is er voor meer leerlingen. Leerlingen die verder willen, die nieuwe sommen willen, die wiskunde soms zelfs leuk gaan vinden.

Over de auteur
Wim Schaafsma is docent wiskunde aan de ger. scholengemeenschap prof. dr. S. Greijdanus. Deze school is één van de experimenteerscholen in het project Wiskunde 12-16.