

Opvermenigvuldigen is altijd beter dan delen



Samenvatting van de voorbereiding

“De juf heeft voor een handenarbeid les stukken touw nodig van 2,75 meter. Zij heeft een bol touw van 80 meter. Hoeveel stukken kan ze daar uithalen?”

Maak de opgave eerst zelf.

Het is een opgave uit de Cito-balans einde basisonderwijs uit 2005 (zie http://www.cito.nl/.../onderzoek/ppon/~media/.../cito_ppon_balans_32.ashx).

Uit de balans (pag. 103):

De percentiel-90 leerling beheerst de voorbeeldopgaven 1 tot en met 18 goed, de voorbeeldopgaven 19 tot en met 21 matig en de voorbeeldopgaven 22 tot en met 24 onvoldoende. Voorbeeldopgaven 20 en 21 zijn moeilijke toepassingsopgaven. Bij voorbeeldopgave 20 moeten de leerlingen uitrekenen hoeveel stukken touw van 2,75 meter uit een bol touw van 80 meter geknipt kunnen worden.

Ik was destijds getroffen door het lage resultaat van groep-achtleerlingen. Minder dan 10% van alle leerlingen kon deze opgave tot een goed einde brengen.

Ik heb de opgave heel vaak voorgelegd aan kinderen en volwassenen. Ook heb ik de opgave vaak gebruikt bij lezingen en presentaties.



Les van de maand

Ik wil graag een les geven over de touwopgave. Het zou een soort tweetrapsraket moeten worden. Beginnen met een startprobleem waarin opvermenigvuldigen veel profijt oplevert. Dat vervolgens heel goed nabespreken met oog voor *alle* strategieën van leerlingen. En natuurlijk de handige manieren benadrukken. En dan de tweede helft van de les gebruiken voor het probleem van het touw. In de hoop dat meer leerlingen een opvermenigvuldigstrategie gaan gebruiken. En dat ook in de rest van hun leven zullen blijven doen.

Startprobleem

Het denken over zo'n vergelijkbaar startprobleem is nog niet zo eenvoudig. Het moet voor kinderen een inleefbare context zijn. En een niet opgaande deling van het soort: hoeveel passen er in? En niet van het soort: hoeveel heb ik er nodig (4,5 m² behang op een rol; we moeten 21 m² behangen, hoeveel rollen heb ik nodig?). en het moet een niet opgaande deling zijn met als deler een kommagetal. Niet 0,75, want dat zit al in het touw. Niet 0,50, dat is misschien te makkelijk. Verdubbelen levert al een hele op. Misschien is 0,25 niet zo gek. Het liefst iets met geld.

We bedenken na overleg met kleinkinderen:

“Saar/Jonas wordt binnenkort 12 jaar. Zij/hij krijgt van haar/zijn ouders een nieuwe fiets om naar haar/zijn nieuwe school te fietsen. Van opa's, oma's, ooms, tantes, vrienden en vriendinnen vraagt zij/hij geld om..... Dat kost € 3,25 per keer. Aan het eind van haar/zijn verjaardag heeft zij/hij € 85. Hoe vaak kan zij/hij naar.....”. Maar we krijgen de stippeltjes niet ingevuld. Er is niks meer wat je per week of per keer moet betalen. Na lang nadenken komt er het volgende:

Juf krijgt voor haar verjaardag een nieuwe elektrische fiets. Dan kan ze voortaan met die fiets naar school. Een volle accu is goed voor 90 kilometer. Ze woont 6,25 kilometer van de school. Hoe vaak kan de juf heen en weer naar school fietsen voor ze de accu weer moet opladen?

Nog niet helemaal tevreden. Waarom weer juf. Het moet meester worden. En dan: 6,25 km van school. Dat zegt toch niemand. Je zegt: ruim 6 kilometer of iets meer dan 6 kilometer. Maar dan raakt de deling weer een beetje uit beeld.

Het wordt:

De meester krijgt voor zijn verjaardag een nieuwe elektrische fiets. Dan kan hij voortaan met die fiets naar school. Een volle accu is goed voor 90 kilometer. De meester woont 6,25 kilometer van de school. Hoe vaak kan de meester heen en weer naar school fietsen voor hij de accu weer moet opladen?

En na de nabespreking: het probleem van het touw.

Ik geef de problemen op papier. Eerst hardop voorlezen en kijken of iedereen het snapt. Aan het werk!

Verslag van de les

Heb nog nagedacht over de introductie van de les. Kan toch niet alleen maar twee werkbladen uitdelen. Maar de oplossing lag in de situatie zelf. Vandaag zijn we weer te gast in groep 8 van de Jan Campertschool in Driehuis.



Meester Max is de leerkracht. We begonnen bij hem. Waar woon je? In Spaarndam. Hoe ver is dat van school? Dat hangt ervan af. Op de fiets is het veel korter dan met de auto. Hoe ben je vanochtend gekomen? Met de auto. Want er zou ook regen kunnen komen. Maar als het weer beter is, kom ik met de fiets. Hoe ver is het op de fiets? Ik schat een kilometer of vier, vijf. Een gewone fiets of een elektrische? Een gewone fiets.

Naam:

De meester krijgt voor zijn verjaardag een nieuwe elektrische fiets.

Dan kan hij voortaan met die fiets naar school. Een volle accu is goed voor 90 kilometer.

De meester woont 6,25 kilometer van de school.

- Hoe vaak kan de meester heen en weer naar school fietsen voor hij de accu weer moet opladen?

We hebben het eerste werkblad voorgelezen en uitgedeeld. Snappen jullie alles wat er in staat? Het was voor alle kinderen duidelijk. Aan het werk. Alleen op het werkblad schrijven en geen rekenmachientje gebruiken. Ik wil alle kinderen de tijd geven om het af te maken. Dus als je klaar bent ga je even rustig verder met je weektaak. Loop intussen koortsachtig rond om inzicht te krijgen in gebruikte strategieën. Zie een paar delingen $90 : 6,25$ opduiken. Maar toch ook veel verdubbelingen. Dat komt misschien door het "heen en weer". Heen 6,25 en terug ook. Samen 12,5.



Mooi is ook het werk van Famke. Zij onderstreept alle moeilijke woorden en vraagt mij welke som ze moet maken. Ik vraag haar of ze alles snapt. Ja, maar welke som? Hoe vaak de meester heen en weer kan op een volle accu. Dan gaat ze weer verder. En ze gaat heel netjes aan het werk.

En dan ziet ze de helft van 25 al voor zich. Ik krijg tijdens het rondlopen een aardig inzicht in gebruikte strategieën en kies m'n nabesprekers uit. Rosa eerst. Zij is de buurvrouw van Famke en gaat al snel van start. Zij start met een staartdeling, maar doet het vervolgens heel handig:

Naam: Famke.....

De meester krijgt voor zijn verjaardag een nieuwe elektrische fiets.
 Dan kan hij voortaan met die fiets naar school. Een volle accu is goed voor 90 kilometer.
 De meester woont 6,25 kilometer van de school.

- Hoe vaak kan de meester heen en weer naar school fietsen voor hij de accu weer moet opladen?

$$\begin{array}{r}
 6,25 \\
 6,25 \\
 6,25 \\
 6,25
 \end{array}
 > \text{ heen en terug is } = \begin{array}{r}
 12,50 \\
 12,50 \\
 25,00 \\
 12,50 \\
 25,00 \\
 62,50 \\
 25,00 \\
 \hline
 87,50
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 25,00 \div 12,50 = 2 \text{ heen terug heen terug} \\
 62,50 \div 25,00 = 2 \text{ x heen en weer} \\
 87,50 \div 25,00 = 3 \text{ x heen en weer}
 \end{array}$$

7 x heen en weer

Naam: Rosa

De meester krijgt voor zijn verjaardag een nieuwe elektrische fiets.
 Dan kan hij voortaan met die fiets naar school. Een volle accu is goed voor 90 kilometer.
 De meester woont 6,25 kilometer van de school.

- Hoe vaak kan de meester heen en weer naar school fietsen voor hij de accu weer moet opladen?

$$\begin{array}{r} 6,25 \overline{) 90} \text{ R.S.} \\ \underline{62,5} \quad 10 \times \\ 17,5 \\ \underline{12,5} \quad 2 \times \\ 5,0 \end{array}$$



$$12,5 \overline{) 90}$$

$$\begin{array}{r} \underline{12,5} \\ 77,5 \quad 1 \times \\ \underline{62,5} \quad 5 \times \\ 15,0 \\ \underline{12,5} \quad 7 \times \\ 2,5 \end{array}$$

7 R. 2,5

Dan de verdubbelingen (werk van Zara en Thijs):

Naam: Zara

De meester krijgt voor zijn verjaardag een nieuwe elektrische fiets.
 Dan kan hij voortaan met die fiets naar school. Een volle accu is goed voor 90 kilometer.
 De meester woont 6,25 kilometer van de school.

- Hoe vaak kan de meester heen en weer naar school fietsen voor hij de accu weer moet opladen?

$$6,25 \times 2 = 12,50$$

2 dagen = 25
 1 dag = 12,50
 4 dagen = 50
 6 dagen = 75

7 dagen = 87,50

~~8 dagen~~

~~14x~~

7x

~~8x~~

7x

Naam: Thijs

De meester krijgt voor zijn verjaardag een nieuwe elektrische fiets.
 Dan kan hij voortaan met die fiets naar school. Een volle accu is goed voor 90 kilometer.
 De meester woont 6,25 kilometer van de school.

- Hoe vaak kan de meester heen en weer naar school fietsen voor hij de accu weer moet opladen?

90 km

$$1 \times = 6,25$$

$$2 \times = 12,50$$

$$4 \times = 25$$

$$8 \times = 50$$

$$12 \times = 75$$

$$14 \times = 87,50$$

7 x heen en weer

14 x heen

en de tien-keer (werk Caithlin en Ties).

Naam: Cathrin

De meester krijgt voor zijn verjaardag een nieuwe elektrische fiets.
Dan kan hij voortaan met die fiets naar school. Een volle accu is goed voor 90 kilometer.
De meester woont 6,25 kilometer van de school.

- Hoe vaak kan de meester heen en weer naar school fietsen voor hij de accu weer moet opladen?

5x 31,25
10x 62,50
15x 93,75
14x 87,50



Ik wacht tot alle leerlingen klaar zijn. Famke rondt haar werk heel netjes af.

Naam: T.J.S

De meester krijgt voor zijn verjaardag een nieuwe elektrische fiets.
Dan kan hij voortaan met die fiets naar school. Een volle accu is goed voor 90 kilometer.
De meester woont 6,25 kilometer van de school.

- Hoe vaak kan de meester heen en weer naar school fietsen voor hij de accu weer moet opladen?

1 | 6,25
10 | 62,5
2 | 12,50
12 | 75
14 | 87,50
17 | 112,50

7
200

Dan de nabespreking. Op het bord leggen verschillende leerlingen hun gebruikte strategie uit. Verdubbelen en het gebruik van de 10-keer voeren de boventoon. Als ik het werk van alle kinderen doorblader, zie je op alle antwoordbladen 7 keer als antwoord staan.

In enkele gevallen kan ik helemaal niet traceren hoe ze dat gevonden hebben. Maar dat is ook niet zo simpel in een klas met meer dan 20 leerlingen.

Ze zitten in groepjes van drie of vier bij elkaar aan tafel. Dat antwoord zingt ook een beetje rond.

Hieronder op het bord de strategieën van enkele leerlingen:

$$\begin{aligned}
 1x &= 12,5 \\
 2x &= 25 \\
 4x &= 50 \\
 6x &= 75 \\
 7x &= 87,5
 \end{aligned}$$

62,5	10
31,25	5
93,75	15
87,50	14

$$\begin{array}{r}
 12,5 \\
 12,5 \\
 \hline
 25,00 \\
 12,5 \\
 25,00 \\
 \hline
 62,5 \\
 25,00 \\
 \hline
 87,5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 12,5 / 8 \\
 \hline
 62,5 \quad 5x \\
 \hline
 27,5 \\
 \hline
 25,0 \quad 2x \\
 \hline
 2,5
 \end{array}$$

7

Ik prijs ze voor hun handige aanpakken zoals het verdubbelen en het gebruik van 10 keer. Dan gaan we naar de volgende opgave: Het Touw.



Aan de slag met het probleem

We benadrukken nog eens te denken aan de handige manieren waarop je zoiets kunt oplossen.

Ga gauw bij Famke kijken. Kennelijk weet ze wel meteen de som. Ze schrijft op: $80 : 2,75$ in de traditionele schrijfwijze.

Naam: Famke

De juf heeft voor een handenarbeid les stukken touw nodig van 2,75 meter.
Zij heeft een bol touw van 80 meter.

- Hoeveel stukken kan ze daar uithalen?

~~$2,75 / 80 =$~~

$2,75 > 2,75 \rightarrow 2x = 4,50 \text{ meter}$

$2,75 \rightarrow 2,75 \rightarrow 2,75 \rightarrow 2,75 \rightarrow 4x = 9,00 \text{ meter}$

$2,75 \rightarrow 2,75 \rightarrow 2,75 \rightarrow 2,75 \rightarrow 2,75 \rightarrow 2,75 \rightarrow 6x = 13,50 \text{ meter}$

$12x = 27,00 \text{ meter}$
 $24x =$

nog niet klaar

Naam: Rosa

De juf heeft voor een handenarbeid les stukken touw nodig van 2,75 meter.
Zij heeft een bol touw van 80 meter.

- Hoeveel stukken kan ze daar uithalen?

$2,75 / 80$

$\underline{- 79,75} \quad 29x$

21
27,5
27,5
27,5
 $\frac{79,75}{27,5} \quad 10$
 $\underline{27,5}$
79,75

29

Haar buurvrouw Rosa doet dat ook, maar gaat anders te werk. Famke streept door en gaat het anders proberen. Ze verdubbelt en maakt een fout. De verdubbeling van 0,75 leidt tot een half en dat houdt ze tot twee keer vol.

2 keer 0,75 geeft een half, 4 keer geeft een hele en zes keer tot anderhalf. Ik heb haar niet genoeg tijd gegeven om het af te maken. Ze was gekomen tot 12 stukken uit 27 meter. En dan schrijft ze:

Nog niet klaar.

Rosa begint ook weer met een traditionele deling, maar haar rekenwerk in de linkerkantlijn laat zien dat ze de tien-strategie gebruikt. Van 30 keer trekt ze 1 keer af om onder de 80 te komen (zie werk Rosa).

Hieronder het werk van Katy, Hidde, Nigella en Caithlin

Naam: Nigella

De juf heeft voor een handenarbeid les stukken touw nodig van 2,75 meter.
Zij heeft een bol touw van 80 meter.

- Hoeveel stukken kan ze daar uithalen?

$$\begin{aligned} 2,75 \\ 2,75 \\ 2,75 = 1 \\ 27,5 = 10 \\ \del{10} \\ 55,0 = 20 \\ 82,5 = 30 \\ \del{82,5} \quad (29x) \end{aligned}$$

Naam: Caithlin

De juf heeft voor een handenarbeid les stukken touw nodig van 2,75 meter.
Zij heeft een bol touw van 80 meter.

- Hoeveel stukken kan ze daar uithalen?

$$\begin{aligned} 10 \times 27,5 \\ 20 \times 55 \\ 30 \times 82,5 \\ 29 \times 79,75 \end{aligned} \quad (29x)$$

Opvallend is dat in de oplossingen van het leerlingenwerk van het eerste probleem een klein tiental verdubbelingen plaatsvonden en meer dan twintig keer 10-strategieën. In het werken aan het tweede probleem kom je bijna alleen de 10-keerstrategie tegen. Eline is de enige die de verdubbeling blijft gebruiken.

Naam : Eline

De juf heeft voor een handenarbeid les stukken touw nodig van 2,75 meter.
Zij heeft een bol touw van 80 meter.

● Hoeveel stukken kan ze daar uithalen?

Handwritten notes and calculations:

- 28 x
- 29 x
- 80
- 27,50 = 10 x
- 54 = 20 x
- 55
- 1 = 2,75
- 2 = 5,50
- 4 = 11,00
- 8 = 22,00
- 9 = 24,75
- 77
- 2,75
- 79,75
- 2,75
- 2,75
- 5,50

Ik weet niet waarom kinderen van strategie gewisseld hebben. Dat had ik na moeten vragen. Ik heb het niet gedaan. Ik zag het ook pas duidelijk na thuiskomst met het leerlingenwerk. Het zou kunnen zijn dat de verdubbeling van 6,25 een vriendelijker getal oplevert dan de verdubbeling van 2,75. Nogmaals, verdubbelen levert in het eerste geval 12,5 op en in het tweede geval 11. Ik heb ze het werk aan het touw af laten maken en ben daarna zonder nabespreking met al hun werk vertrokken.

Nabeschuwing

Het mooie is dat bijna alle kinderen het probleem van het touw niet delend oplosten. Bijna allen deden het via de 10-strategie. Bij enkele kinderen stond wel 29, maar was niet te achterhalen hoe ze het opgelost hadden. Ik denk toch “geleende antwoorden”.



Had het Cito met het vraagstuk van het touw een score onder de 10%, hier is de score bijna boven de 90%. Ik denk dat het werken aan dit soort problemen helpt om kinderen handige strategieën te laten kiezen.

Maak zelf contexten met gehele deeltallen en handige kommagetallen als delers. Zorg er voor dat verdubbelen en 10-keer zichtbare winst oplevert.

Hoe moet het dan met:

De meester heeft een nieuwe elektrische fiets. Met een volle accu kan hij 87.5 km fietsen en hij woont 5,23 km van school.

Doe die maar niet. De deling is gruwelijk. Afronden en handig oplossen gaat natuurlijk heel goed. (90 : 5,25). Maar ook dat zul je moeten oefenen en beoefenen met leerlingen.

Misschien is er in de afgelopen 13 jaar ook wel wat ten goede veranderd in de basisschool. Er zijn weer nieuwe methoden die dit soort aanpakken waarschijnlijker maken.

Dus: Opvermenigvuldigen is (bijna) altijd beter dan delen.

Met dank aan de leerlingen en leerkrachten van groep 8 van de Jan Campertschool in Driehuis.

Willem Uittenbogaard

Email: w.uittenbogaard@uu.nl

huispagina: <http://www.staff.science.uu.nl/~uitte104/>

Redactie en foto's: Sylvia Eerhart