

De laatste les



Samenvatting van de voorbereiding

Inleiding

Er is in het onderwijs vaak een laatste les. Een laatste les voor een vakantie, van een leerkracht aan een groep of van een groep 8 die de basisschool zal gaan verlaten.

Voor mij is dit de laatste les aan een groep 8 van de Jan Campertschool in Driehuis. Zij gaan binnenkort allemaal naar het voortgezet onderwijs. Ik heb ze dit schooljaar vijf keer les gegeven (zie: www.fi.uu.nl/publicaties/subsets/lesvandemaand) en dit wordt de laatste keer. En ook nu moet de wiskunde weer een grote rol spelen. Het wordt een les met raadsels, trucjes en kunstjes. Hier onder een lijst van tien activiteiten. Daaronder een uitgebreide beschrijving van de tien.

Beknopte lijst van tien activiteiten

1. Vijf willekeurige getallen optellen terwijl de uitkomst al vaststaat.
2. 20 lucifers: wie de laatste pakt heeft verloren.
3. Negen vakken en de geheime code.
4. Kun je wel tot tien tellen?
5. Wat staat er en wat komt er nu?
6. Vier boeren, vier vrouwen, vier heren en vier azen gaan op stap.
7. Blind de goede kaarten aanwijzen. Hoe kan dat?
8. Erin geluisd!
9. Optellen in plaats van aftrekken. Dat kan toch niet?
10. Handen gekruist: topologie met het lichaam.

Beschrijving van de tien activiteiten

1. Vijf willekeurige getallen optellen terwijl de uitkomst al vaststaat!

We gaan dit doen met getallen van drie cijfers (2, 1, of meer cijfers kan natuurlijk ook).

We vragen een leerling naar een willekeurig getal van drie cijfers. Stel: er komt 749. Ik schrijf op het bord: 749. Een andere leerling mag nog een getal van drie cijfers geven. Bijvoorbeeld 273. Ik schrijf op het bord:

749

273



Nu neem ik een blaadje papier en schrijf daarop: 2747. ($749 + 2 \times 999 = 2747$). Ik vouw het papier op en geef het aan een leerling om het als geheim te bewaren. Nu voeg ik zelf het derde getal toe: 726 (de aanvulling tot 999 van 273).

Op het bord komt:

749

273

726

Ik vraag een derde leerling om een getal van drie cijfers. Stel er komt 246. Ik schrijf op het bord:

749

273

726

246

Snel voeg er ik m'n eigen 753 aan toe (de aanvulling tot 999 van 246)

Er komt op het bord:

749

273

726

246

753

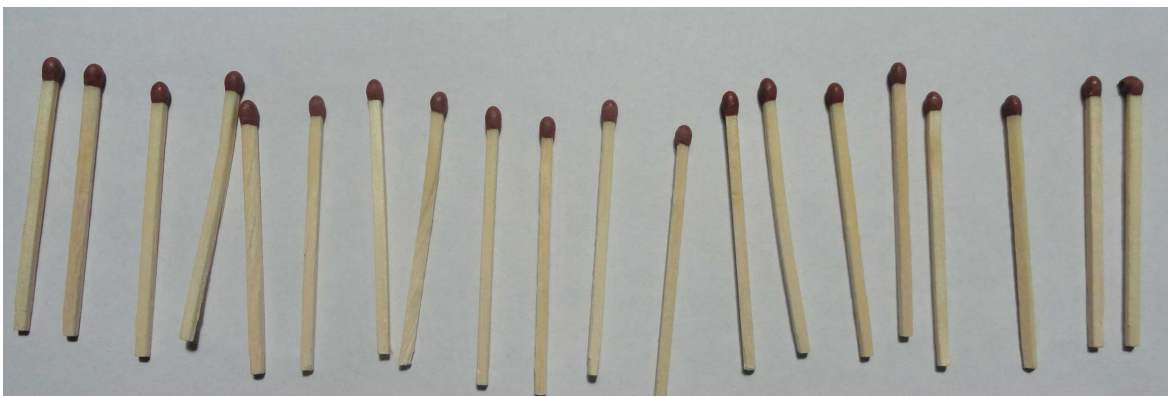


Ik vraag alle leerlingen deze vijf getallen op te tellen. Al of niet met een rekenmachientje. Ik inventariseer de antwoorden en vraag de leerling om het geheim te prijs te geven: 2747.

Hoe kan dat? Zien ze de manier waarop je van getal eigenschappen en getal structuur gebruik kan maken? We spelen het nog een keer. Eventueel met getallen van twee cijfers. Of doe het later in de week nog eens.

Je kunt het lastiger maken door de aanvulling tot 999 te maken van het tweede getal.

2. 20 lucifers: wie de laatste pakt heeft verloren

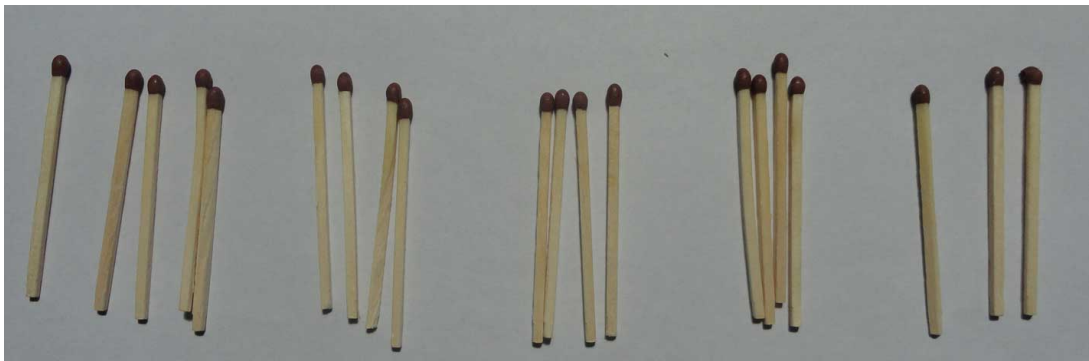


twintig lucifers

We spelen tegen de klas. Pak om beurten van de twintig lucifers er 1, 2 of 3 weg. Wie de laatste lucifer pakt heeft verloren. Wie begint? Maakt het uit?

Dit is een strategiespel. Vanuit de eindsituatie kun je het spel begrijpen. Al spelende kun je de strategie ontdekken.

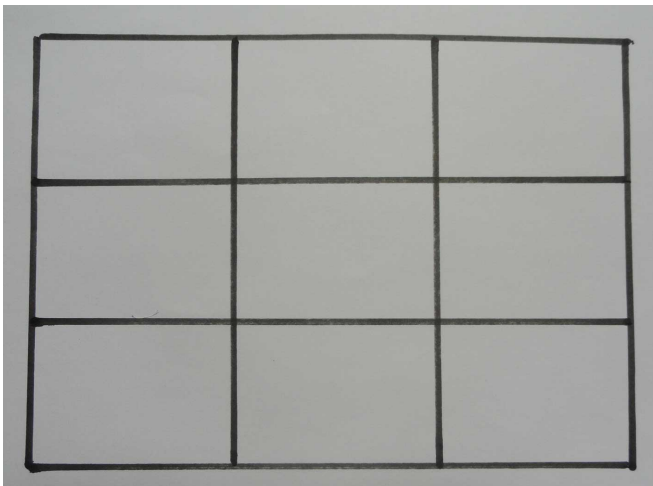
Ligt er voor de partij aan zet, nog één lucifer dan is het verloren. Liggen er voor de partij aan zet nog vijf lucifers, dan is het ook verloren (pakken zij er één, dan pak jij er drie. Pakken zij er twee dan pak jij er ook twee. Pakken zij er drie, dan pak jij er één. En dan blijft er één over). Daarmee is ook negen, dertien en zeventien een verloren situatie. Het begint met twintig lucifers. De winnende strategie is dus: beginnen met drie pakken en verder aanvullen tot vier.



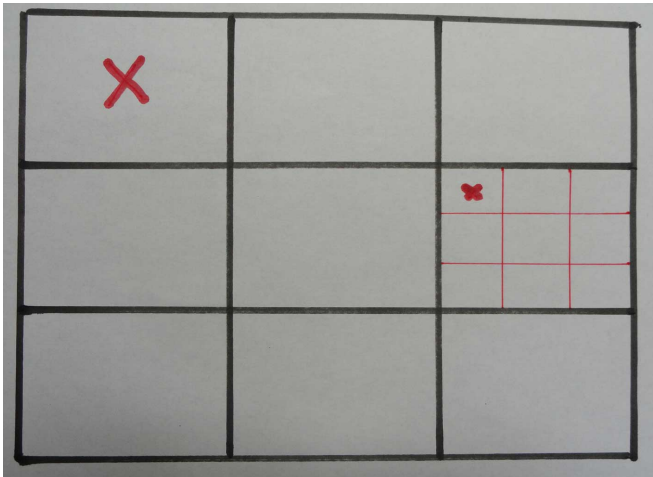
20 lucifers met de groepjes van 4

Maar je kunt, ook als je niet begint, tijdig op het winnende spoor komen. Ik laat mijn tegenspelers de keuze: wie begint? Als de tegenspelers niet beginnen met drie pakken is er alle gelegenheid om naar de winnende strategie toe te werken.

3. *Negen vakken en de geheime code*

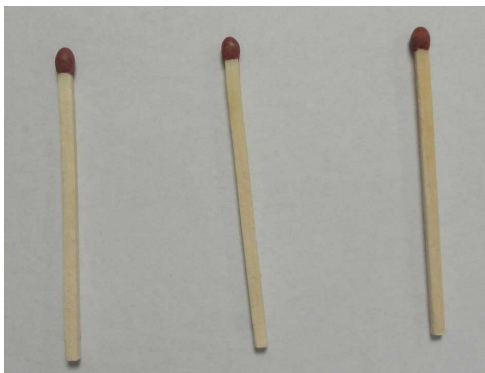


Ik teken op het bord bovenstaand plaatje. Ik neem twee leerlingen mee naar de gang en leg uit wat we gaan doen. Zij moeten als ik dat vraag hun ogen dicht doen. Ik wijs één van de negen vakken aan. Nadat ze hun ogen open hebben vraag ik ze naar het goede vak. Ik leg ze met behulp van onderstaand plaatje uit hoe het werkt.



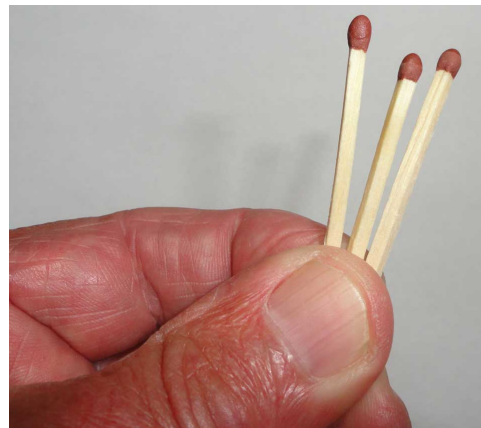
Als ze hun ogen open hebben wijs ik in het eerste willekeurige vak het goede vak aan. Dat is alles. Dat is de geheime code! Ook het eerste vak kan meteen goed zijn.

4. *Kun je tot tien tellen?*



Leg drie lucifers of stokjes of wat dan ook op tafel. Pak ze één voor één op en tel daarbij hardop tot drie. Leg ze vervolgens één voor één weer neer en tel hardop vier, vijf, zes. Pak ze weer één voor één op en tel zeven, acht, één laten liggen en leg de laatste stokjes uit je hand: negen, tien.

Vervolgens pak je ze alle drie op en geef je ze aan de persoon die het ook moet proberen: NU JIJ. Omdat je ze in de hand geeft is er een startprobleem. Begin hardop te tellen bij het neerleggen van de eerste lucifer. Dan klopt het niet meer bij acht, één laten liggen?



Nu jij!

5. *Wat staat er?*

We schrijven op het bord:

1

Wat staat er?

Eronder:

1 1

Ja, er staat één één.

Daar weer onder:

2 1

Ja, twee énen
En daar onder:
1 2 1 1
En zo ontstaat:

1
1 1
2 1
1 2 1 1
1 1 1 2 2 1
3 1 2 2 1 1
1 3 1 1 2 2 2 1
Enzovoorts.....

Als je hardop leest wat er staat, dan ben je er.....

Laatste regel: één één, één drie, twee enen, drie tweeën, één één: 1 1 1 3 2 1 3 2 1 1
Enzovoorts.....

6. Vier boeren, vier vrouwen, vier heren en vier azen gaan op stap



Neem uit een stok kaarten de vrouwen, de boeren, de heren en de azen.

Bij een herberg melden zich vier vrouwen die vragen om onderdak. Dat komt goed uit: er zijn nog precies vier kamers over.

Leg de kaarten van de vrouwen blind naast elkaar op tafel. De vrouwen hebben hun jas nog niet eens uit en er melden zich vier heren bij de herberg. Ook zij vragen om onderdak. De herbergier legt ze uit dat de laatste vier kamers net aan vier vrouwen vergeven zijn.

Misschien mogen zij bij de vrouwen intrekken. Het mocht.

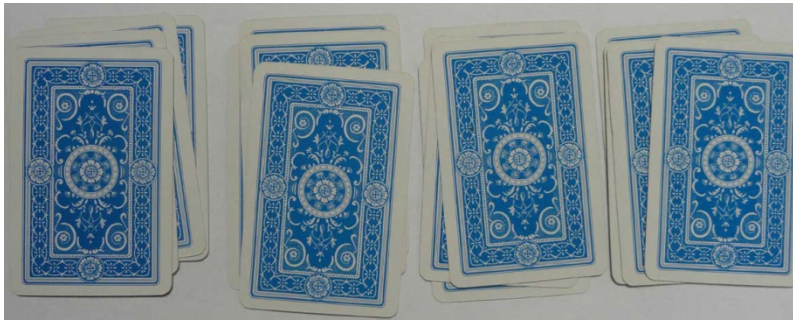
Leg de kaarten van de vier heren blind op de vier vrouwen. De heren hebben hun hoed nog niet opgehangen of er melden zich vier azen die ook om onderdak vragen. Misschien mogen zij er ook bij? Ja, het mocht.

Leg de kaarten van de vier azen blind op de stapels. De azen hebben hun jas nog niet uit of er melden zich vier boeren. Mogen die er ook nog bij? En ja hoor. De kaarten van de vier boeren ook op de stapeltjes. De boeren hebben hun klompen nog niet uit of één van de heren vraagt de herbergier of het niet anders kan.

De herbergier neemt de vier stapeltjes kaarten en legt ze op elkaar.

Couperen, zegt hij. Niet schudden.

Couperen is de stapel in twee willekeurige delen splitsen en het ene deel voor het andere deel plaatsen.



Zo vaak als je wilt. De volgorde V, H, A, B, V, H, A, B,..... blijft zoals die is.

De herbergier legt nu de kaarten weer blind uit. Hij maakt vier stapeltjes van vier.

En ja, de vrouwen bij elkaar, de boeren bij elkaar, de heren en de azen ook. Hoe kan dat?

7. *Blind kaarten aanwijzen en het toch goed hebben*



Neem uit een stok kaarten een stuk of tien kaarten. Leg ze blind op tafel. Onthoud van de eerste kaart die je neerlegt waar die ligt (kan natuurlijk ook met de tweede of een andere kaart). Maar één moet je er weten te liggen. Hussel ze eventueel nog wat door elkaar, maar hou de kaart die je weet te liggen in het oog.

Stel dat de kaart die je weet te liggen Schoppen 4 is.

Vraag een leerling Schoppen 4 aan te wijzen. Niet kijken:

alleen aanwijzen. Neem de kaart op en kijk als enige en zeg dat het goed is. Als de leerling Schoppen 4 aanwijst kijk je niet en zeg je dat het goed is: afgelopen. Laat de kaart zien en begin eventueel helemaal opnieuw. Stel dat de leerling Hartenvrouw heeft aangewezen. Vraag de leerling nu om Hartenvrouw aan te wijzen. Niet kijken: alleen aanwijzen. Neem de kaart op en kijk als enige. Als de leerling Schoppen 4 aanwijst hoef je niet te kijken en zeg je sowieso dat het goed is. Laat beide kaarten zien : afgelopen. Begin eventueel opnieuw. Als de tweede kaart bijvoorbeeld Ruiten 8 is zeg je dat het goed is. Pak nu zelf als derde kaart Ruiten 8. Je pakt natuurlijk de ontbrekende Schoppen 4. Nu is het trio compleet. Vraag leerlingen of ze weten welke kaarten we van tafel hebben opgepakt. En leg ze alle drie op tafel. Hoe kan dat?

8. *Optellen in plaats van aftrekken: hoe kan dat?*

Schrijf een traditionele aftrekking op het bord:

831

574

---- -

We veranderen, omdat ik niet kan aftrekken, de opgave in een optelling.

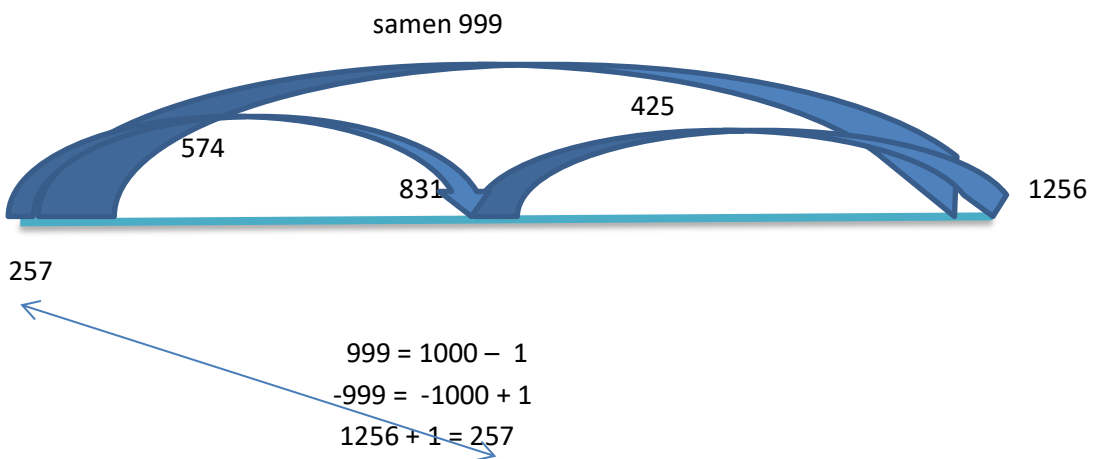
831

425 (de aanvulling tot 999 van 574)

---- +

Het antwoord van de optelling is 1256. Nu haal ik de één aan de voorkant weg en tel die op bij 256: 257. Het antwoord van de aftrekking. Hoe kan dat?

De mooiste uitleg is met een plaatje van de getallenlijn.



Natuurlijk kun je dit ook doen met getallen van 1, 2 of meer cijfers. Kies dan aanvullingen tot 9, tot 99 of tot 9999 bij 4 cijfers.

9. *Kaart overhouden: erin geluisd!*

Neem een heel pak speelkaarten. Kies er één uit en leg die onderop. Bijvoorbeeld Harten 3. Zonder dat leerlingen dat zien.

Doe de hele stapel in je (broek)zak, maar zo dat de Harten 3 tegen je lijf zit.

Nu komt in een HOOG tempo het volgende vraag- en antwoordspel. Leg een leerling de volgende vraag voor: "We hebben rode en zwarte kaarten. Wat kies je?". Zegt de leerling rood dan zeg je: dan doen we de zwarte weg en houden we rood over. Zegt de leerling zwart dan zeg je: dan doen we zwart weg en houden we rood over. Je vraagt een tweede leerling: "We hebben de rode kaarten over: Harten en Ruiten. Wat kies je?"

Kiest de leerling Harten dan doen we de Ruiten weg en houden we de Harten over. Kiest de leerling Ruiten, dan doen we Ruiten weg en houden we Harten over. Volgende leerling: "We hebben nu alleen Harten over. Plaatjes of getallen? Wat kies je? Bij de keuze voor plaatjes doen we de plaatjes weg en houden we getallen over. Bij de keuze voor getallen doen we de plaatjes weg en houden we ook getallen over. Volgende leerling: 2 tot en met 5 of 6 tot en

met 10. Wat kies je? Zo houden we natuurlijk 2 tot en met 5 over. Nog een keer aan een volgende leerling: 2, 3 of 4, 5? Zo houden we Harten 2 en Harten 3 over. Volgende leerling: Harten 2 of Harten 3?

Zo houden we dus Harten 3 over. Laatste leerling: noem een getal tussen 1 en 10.

Laat het vier zijn. Haal de eerste drie kaarten van de bovenkant van de stapel en als vierde kaart de kaart die tegen je lijf zit: HARTEN 3.

10. Handen gekruist: topologie met het lichaam



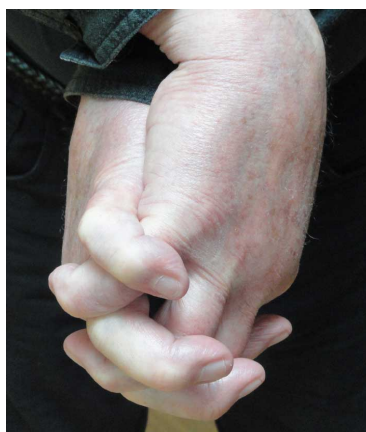
één



twee



drie



Zie je het verschil? En zit het daarin? Probeer maar!

Verslag van de les

Na een korte inleiding dat dit ècht de laatste les van mij aan deze groep 8 is, leggen we ook uit dat het leuk en ook nog leerzaam is. Het lijkt soms goochelen of toveren, maar straks kunnen jullie het ook.

20 lucifers



We beginnen met de twintig lucifers. Ik gebruik een krijtbordje dat nog in de klas hangt.

De twintig streepjes gaan snel met een krijtje en zijn nog sneller gewist met een wisser.

Op het digibord moet je de streepjes één voor één wissen.

“Wie begint?” is steeds de eerste vraag. Ik speel tegen de hele klas. Eén, twee of drie weghalen. Wie de laatste pakt heeft verloren. We spelen het snel een aantal keren achter elkaar. Ze verliezen steeds. Dat kunnen ze niet uitstaan. Ze krijgen al gauw door dat 5 lucifers voor hen aan zet een verloren situatie is. Ze proberen met vereende krachten er ook voor mij 5 over te houden. Langzaam breekt het inzicht door dat ook 9 een verloren situatie is. Omdat ik niet consequent tot 4 aan vul, duurt ook dat inzicht lang. Meestal neem ik de winnende beslissing bij 13. Waarom verliezen jullie steeds?

Ik teken de 20 streepjes in groepjes van vier en we spelen het nog een paar keer. Dat helpt. Langzaam maar zeker wordt de winnende strategie duidelijk: zelf beginnen met drie pakken en dan steeds aanvullen tot 4. Ik begin en pak er één. Zij nemen er meteen twee en verder vullen ze mij aan tot 4.

Erin geluisd!

Vraag een leerling om even een heel pak kaarten te controleren. Niet of het compleet is (wat het is). Maar om even te kijken of ze allemaal verschillend zijn (jokers eruit). Stop de hele stapel in m'n linker broekzak met onderop Ruiten 4. Die zit tegen mijn been.

En daar gaan we! SNEL. Geef leerlingen niet te veel tijd om na te denken. In het eerste spel heb ik wel een beetje geluk. Kan bijna steeds bijhouden wat ze gekozen hebben. Als laatste keuze: acht. Dat moet dan Ruiten 4 zijn. En het klopt natuurlijk.

We spelen het spel nog een paar keer. Ze hebben langzamerhand het gevoel dat zij niet kiezen, maar ik. Dat komt ook door de steeds herhaalde vraag: WAT KIES JE? Nu moeten ze nog uit zien te vissen waarom je bij hun keuze voor een getal de goede kaart uit je broekzak tovert.



Eén leerling zegt: ik kan het ook. Die moet natuurlijk zijn truc gaan doen. Ik ga achter in de klas zitten en kijk het schouwspel aan. Het wordt echt hilarisch. Hij moet een paar keer in z'n broekzak kijken om te kijken om welke kaart het ook weer ging. Ook kost het hem soms moeite om de volgende vraag te stellen aan z'n klasgenoten. Maar uiteindelijk komt de kaart waar het om ging uit z'n broekzak. Applaus! De vragen die je stelt hangen af van de antwoorden van je publiek. En dan snel de conclusie trekken: doen we dat weg en houden we dat over... En dan moet je weer snel de volgende vraag stellen. En dat is nog niet zo eenvoudig voor een 12-jarige. Oefen vooral zelf ook!

Negen vakken en de geheime code



Neem twee leerlingen mee naar de gang. Ik leg ze het spel uit met tekeningen op een blaadje. Snappen jullie het? Ja, ze snappen het allebei. Terug in de klas teken ik op het digibord de negen vakken. Ogen dicht allebei. Ik wijs een vak aan. Ogen open. Deze? Deze? Die? De ene leerling blijkt het toch niet begrepen te hebben. Die denkt dat ik steeds een andere aanwijs.

Caithlin snapt het echt en heeft er vanaf het begin immens plezier in. Haar buurman haakt iets later aan en zegt het nu ook weer te snappen.

Je hebt natuurlijk één of (liever) meer kinderen in de klas nodig die de geheime code snappen. Het werd een theatrale voorstelling. Leerlingen gingen naast Caithlin staan om te kijken naar mijn geheime aanwijzingen. Andere leerlingen namen mijn rol voor het bord over om te kijken of Caithlin ook hun gedachten kon lezen. Dat kon Caithlin natuurlijk niet. Het zou liggen aan deze, deze, die. Of aan het aantal tikjes op het bord. Ook werd ik aan een onderzoek onderworpen: welk signaal geef je af?

Ik wilde wel een tip geven: het enige wat ik doe is het goede vak aanwijzen. Niks meer en niks minder. Wat iedereen bleef verbazen hoe ook het eerst aangewezen vak goed kon zijn. Hoe kan dat? Leerlingen en leerkracht waren het er over eens dat we niet meer mochten toelichten. Ze zouden het verder zelf spelen en uitzoeken. Het uur was voorbij. Slechts drie van de tien dingen gedaan.



Vaarwel: het ga jullie goed op je nieuwe school!

Achteraf

Niet erg dat er zo weinig kunstjes aan de orde zijn geweest. Neem de tijd. Niet haasten. Als u meer tijd heeft dan een lesuur is het goed om het te spreiden. Over meerdere dagen en meerder uren. Veel plezier er mee!

Met dank aan de leerlingen en leerkrachten van groep 8 van de Jan Campertschool in Driehuis. En aan Stijn Borst die activiteit nummer 10 demonstreert .

Willem Uittenbogaard

Email: w.uittenbogaard@uu.nl

huispagina: <http://www.staff.science.uu.nl/~uitte104/>

Redactie en foto's: Sylvia Eerhart