Polygonen,

kapen en driehoeken

Wiskunde B-dag

23 november 2007

De Wiskunde B-dag wordt gesponsord door

Inleiding op de opdracht

Binnen en buiten als voorbeeld

Je wandelt een eindje vanuit huis en je komt weer terug. De verveling mag niet toeslaan en je zorgt daarom dat je niet twee keer hetzelfde punt passeert, begin- en eindpunt daargelaten. Niets bijzonders? Toch wel, want je hebt de wereld in twee stukken ingedeeld: het stuk binnen je wandelroute en het stuk buiten je wandelroute. Gesloten figuren zonder dubbelpunten (zo heten dit soort figuren wiskundig) hebben altijd die eigenschap. In deze Wiskunde B-dag gaat het over speciale gesloten figuren zonder dubbelpunten, figuren waarbij de route bestaat uit een eindig aantal rechte lijnstukken. Je kent ze wel: driehoeken, vier-, vijf-, en heelveelhoeken. De soortnaam is *simpele polygoon.* Maar ze kunnen ook best groot en ingewikkeld zijn. Zoals op de voorpagina: een lijn zonder uiteinden en zonder zelfdoorsnijdingen, een simpele polygoon. Dus is er een binnen- en een buitengebied. De voor de hand liggende vraag is of de tekst **Wiskunde B-dag 23 november 2007** in het binnengebied ligt of niet.

Neem een paar minuutjes om daar achter te komen.

Proberen ...

Met een beetje geduld en een potlood kom je er wel achter. Je begint bij de **W** en je trekt een lijn die nooit over de gedrukte lijn gaat. En dan merk je het wel of het ja-of-nee is. Nadeel: dat duurt lang en het is 'dom' werk.

... of redeneren!

Slim is: iets anders bedenken. Begin bij de **7** en stap nou eens toch dat zwarte lijntje over. Was je binnen, dan ben je nu buiten en andersom. Als je naar rechts doorgaat, stap je 13 lijntjes over en ben je echt buiten. Dan was je bij de **7** dus ... binnen de kromme.

Bedoeling van deze Wiskunde B-dag opdracht

De bedoeling van deze Wiskunde B-dag is dat je het niet bij de methode van het potlood laat, maar dat je strategieën bedenkt: een helder plan dat ook bij andere figuren, mogelijk nog veel groter en gecompliceerder, vlot het antwoord geeft op een vraag; andere vragen dan buiten/binnen! De binnen-buiten vraag werd bijvoorbeeld opgelost met een even-oneven beschouwing. Dat was een mooie en direct begrijpbare redenering. Probleem opgelost en je weet hoe je het bij andere, nog ingewikkelder, figuren ook kunt doen. Dáár gaat het om.

Hoe nu verder?

In het vervolg van deze opdracht kom je nog allerlei andere eigenschappen van simpele polygonen tegen. Je onderzoekt ze aan de hand van voorbeelden en kleinere *richtvragen* (aangegeven met **R**). Dat gebeurt zeker in de delen A en B, die een basis vormen voor de belangrijke vragen die in de volgende delen aan bod komen. Vanaf deel C vind je ook echte onderzoeksvragen. Ze staan in een grijs kader. Dat zijn de vragen die er echt toe doen in je onderzoek. Dat zijn ook vragen waar je misschien niet zo direct het antwoord op weet, en waarmee je wellicht ook in de middag van de Wiskunde B-dag verder kunt gaan. De richtvragen vormen als het ware de basis van je onderzoek. Met de onderzoeksvragen kun je echt scoren, laten zien dat je zelf invallen hebt, de zaak in een nieuw licht kunt zetten, enzovoort.

Iets over de toepassingen

Wiskundigen praten er niet zo vaak over dat hun werk wordt toegepast. Maar het is nu eenmaal zo: wat in deze Wiskunde B-dag aan de orde komt wordt toegepast; vaak en veelzijdig! En dat gebeurt op allerlei gebieden die met automatisering, robots, beweging van machines, indelen en bewaken van ruimtes, weergave van foto's in computerbestanden, medische beschrijvingen, noem maar op, te maken hebben. Ach, wat doet het er toe...
Wij doen het om mooie redeneringen te vinden, zoals bij de '**7**' op de voorpagina.

De opdracht

Globaal kan het geheel van deze opdracht als volgt worden ingedeeld:

- In de delen A en B worden vooral vragen gepresenteerd om over na te denken, wat zal helpen om de vragen die in de delen C tot en met F worden gesteld aan te kunnen. Zorg ervoor dat je als team voldoende tijd besteed aan de delen A en B om daarna wellicht werk te verdelen bij de onderdelen C tot en met F. Het is nadrukkelijk niet de bedoeling dat je in je verslag alle afzonderlijke **R**-vragen in volgorde gaat beantwoorden. Maak zelf een verantwoorde keuze welke elementen van die vragen je opneemt in het eindverslag!
- De delen C en F zijn onderling verbonden (met de onderzoeksvragen 1 en 4). ***De beantwoording van deze twee onderzoeksvragen vormen de kern van je verslag.*** Weinig of geen aandacht voor deze twee onderwerpen in je verslag kan dus niet!
- De delen D en E vormen interessante zijtakken van het geheel. De resultaten daarvan (onderzoeksvragen 2a, 2b en 3) dragen niet bij aan het begrijpen van de samenhang tussen de delen C en F. Maar er staan wel leuke, uitdagende activiteiten in die het onderzoeken zeker waard zijn! Als je daar aan toekomt in je verslag, dan kun je daar zeker mee scoren in de strijd om als beste uit de bus te komen!

Laat in je verslag zien dat je inzicht hebt opgebouwd in de basisgebieden van de simpele polygoonkunde. Dat doe je door een goede selectie van de opgaven helder uit te voeren, inclusief tekeningen. Toon, met gebruikmaking van het basismateriaal en je eigen ideeën, dat je ver komt bij de onderzoeksopdrachten 1 en 4, waarbij je redeneringen en strategieën moet ontdekken en helder verwoorden. Aanvullingen met een verslag van vondsten bij de onderzoeksvragen 2a, 2b en 3 zijn zeker in jouw voordeel!

Je levert in

Van je werk maak je een doorlopend verslag dat leesbaar en begrijpbaar moet zijn voor elke medeleerling, ook voor degenen die nog nooit van simpele polygonen hebben gehoord.

Verdere tips

- Bij deze opdracht moet je veel proberen en tekenen. Vaak zal je tekening bijna goed zijn, maar wil je nog net iets veranderen. Oplossing: veel papier en potlood en gum.
- Als je veel tekeningen gebruikt, kunnen die misschien beter, met verwijzingen in de tekst, in een bijlage worden gezet.
- Zorg dat het werk goed kopieerbaar is, dus gebruik zwarte schrijf- en tekenmaterialen.
- Denk ook aan de beschikbare tijd op deze dag! Het samenstellen van het verslag kost tijd. Zorg dus dat je daar tijdig mee start.
- Verdeel werkzaamheden wanneer je overeenstemming hebt over de aanpak.

Tenslotte

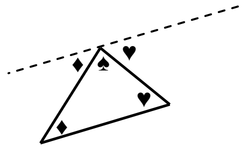
Omdat vaak zorgvuldige formuleringen nodig zijn, worden er in de opdracht op diverse plaatsen omschrijvingen en definities gegeven. De belangrijkste definities en omschrijvingen worden apart vermeld op een "definities en omschrijvingen blad" dat je bij de opgave hebt ontvangen.
Ook zijn twee werkbladen bijgevoegd (bij de richtvragen **R25** en **R31**) waarop je een gevraagde constructie kunt uitvoeren.

Succes en veel plezier bij deze Wiskunde B-dag!

Deel A Hoek(punt)en van polygonen

We gaan er van uit dat je weet dat de drie binnenhoeken van een driehoek samen 180° zijn. Anders gezegd:

de som van de binnenhoeken van elke driehoek is 180°

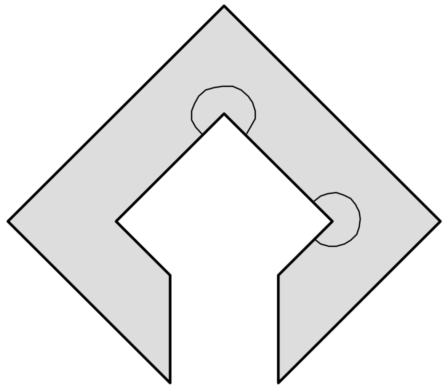


Dat mag je ook steeds gebruiken.
Het bekende bewijs zie je gesuggereerd in de figuur hiernaast.

R1 **a.** Teken een vierhoek en bepaal de som van de binnenhoeken. Geldt dat voor alle vierhoeken, dus ook als er een inspringende hoek is?

b. Kun je een formule bedenken voor de som van de binnenhoeken van een veelhoek met *n* hoekpunten zonder inspringende hoeken? (De formule moet de hoekensom uitdrukken in het aantal punten *n* van de polygoon).

Bij de 10-hoek (tel maar even na!) met een inspringend gedeelte, zoals in de figuur hiernaast, moet je goed weten over welke hoeken het gaat. Het zijn de hoeken in het ***binnengebied*** van de veelhoek; dus binnen het grijze stuk. Daar zijn twee hoeken aangegeven die 270° graden zijn.



c. Controleer of de totale som van de hoeken weer aan de formule van **b** voldoet.

Waarschijnlijk heb je bij **a** en **b** gewerkt met een opdeling van de figuren in driehoeken. Dat kan hier misschien ook.

d. Deel de 10-hoek op in driehoeken; de hoekpunten van de driehoeken zijn daarbij ook hoekpunten van de 10-hoek.

Definities

In deze Wiskunde B-dag opdracht gaat het over allerlei bijzonderheden bij veelhoeken. Precies taalgebruik is daarbij belangrijk. Daarom geven we definities van de belangrijkste begrippen. Hier volgen er al een paar; alle belangrijke definities worden op een aparte bladzijde nog eens opgesomd. We houden ons aan de ingeburgerde wiskundige namen; vandaar dat we vanaf nu spreken van polygonen in plaats van veelhoeken. Met enkele richtvragen zetten we de definities op scherp: kijk uit!

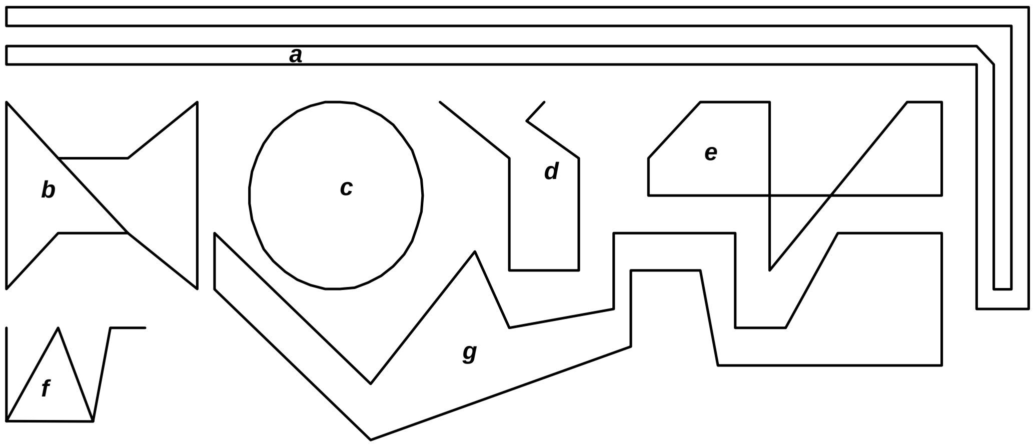
polygoon met n hoekpunten (n > 2)

Een polygoon is een gesloten lijn die uit n (dus een eindig aantal) lijnstukken bestaat.
Er zijn n verschillende punten $p_1, p_2, \ldots, p_n$; dit zijn de hoekpunten van de polygoon.
De polygoon heeft n zijden: $z_1 = p_1p_2$, $z_2 = p_2p_3$, ... , $z_{n-1} = p_{n-1}p_n$ en $z_n = p_np_1$

Merk op:

- Hoekpunten worden meestal met hoofdletters aangeduid. In deze opgave gebruiken we hoofdletters om een polygoon mee aan te duiden. De kleine letters (vaak met indices) worden gebruikt voor het benoemen van hoekpunten en zijden.
- p_np_1 is de zijde van de polygoon die het laatste punt p_n verbindt met het beginpunt p_1, waarmee de polygoon wordt gesloten.
- Een polygoon heeft evenveel hoekpunten als zijden.

R2. Welke van de volgende figuren zijn polygonen?



Een polygoon kan zichzelf doorsnijden; dat gebeurt in één van deze voorbeelden. Voor ons onderzoek sluiten we dat uit. Daarom geven we de volgende omschrijving:

simpele polygoon

Een simpele polygoon heeft geen zelfdoorsnijdingen.

R3. Welke van de figuren hierboven zijn simpele polygonen?

Als in deze opdracht soms '*polygoon*' staat, dan wordt zeker '*simpele polygoon'* bedoeld.
Het volgende is je bekend.

binnen- en buitengebied

Een simpele polygoon verdeelt het vlak in twee aaneengesloten delen: het binnen- en het buitengebied. Kenmerk van het buitengebied: het is onbeperkt groot. De polygoon zelf hoort per definitie NIET tot het binnen- of buitengebied.

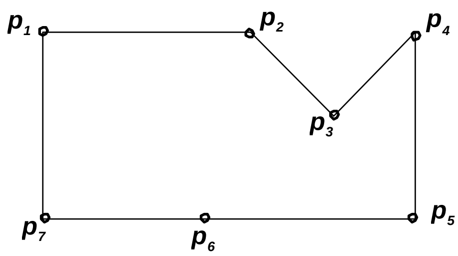
Hoeken nader bekijken

In richtvraag **R1** heb je het volgende al gezien:

hoeken van een simpele polygoon

De grootte van de hoeken van een simpele polygoon worden bepaald door de hoeken in het binnengebied

Hiernaast zie je een polygoon met 7 hoeken. Gestrekte hoeken, zoals bij hoekpunt p_6, zijn ook toegestaan!
Let op de indeling in soorten hoeken:



uitspringende hoek

Een hoek heet uitspringend als de hoek tussen 0° en 180° ligt.

inspringende hoek

Een hoek heet inspringend als de hoek tussen 180° en 360° ligt.

gestrekte hoek

Een hoek heet gestrek, als de hoek 180° is.

Merk op:
1. hoeken van 0° en van 360° zijn dus niet mogelijk bij simpele polygonen!
2. *hoek* en *hoekpunt* zijn verschillende begrippen. Het hoekpunt is een punt van de polygoon waar twee zijden samen komen. Die twee zijden maken een hoek in het binnengebied van de polygoon met een grootte die tussen 0° en 360° ligt.

R4. Je hebt polygonen gezien met, maar ook zonder inspringende hoeken. Hier valt wat uit te zoeken! Gebruik je creativiteit bij de volgende tekenopdrachten. Mocht je zeker weten dat de opdracht onmogelijk is, dan moet je uitleggen waarom.

a. Teken een polygoon met 4 uitspringende en 4 inspringende hoeken en doe het zo dat de in- en uitspringende hoeken elkaar afwisselen.
b. Teken een polygoon met 4 uitspringende en 4 inspringende hoeken en doe het zo dat de inspringende hoeken op elkaar volgen en dan pas de uitspringende hoeken.
c. Teken een polygoon met 3 uitspringende hoeken en 2 inspringende hoeken.
d. Teken een polygoon met 2 uitspringende hoeken en 3 inspringende hoeken.
e. Teken een polygoon met 3 uitspringende hoeken en 20 inspringende hoeken.
f. Teken een polygoon met 12 gestrekte hoeken en drie hoeken van 60 graden.

Stel je voor dat ...

Bij één onderdeel (**R4d**) heb je vast gemerkt dat het niet lukt. Een mooi moment om een redenering op te zetten die de volgende bewering echt onderbouwt:

Elke simpele polygoon heeft minstens drie uitspringende hoeken.

Bij zo'n bewering kun je niet zomaar zeggen: dat is logisch, want met minder dan drie kun je niet tekenen. Want: misschien kan iemand anders het wel met een ingewikkeld of zelfs met een simpel voorbeeld.
Je moet een redenering vinden dat het echt *nooit* kan. Dat kan bijvoorbeeld door zo te beginnen:

Stel je voor dat er een polygoon is met n hoekpunten, waarvan slechts 2 hoekpunten uitspringend zijn. Dat is waar voor een of andere waarde van n, je weet niet welke.

Nu gaan we daar gevolgen uit afleiden. Lopen we dan vast, dan volgt daaruit dat de aanname bij **stel je voor** niet goed is!
Eerste gevolg van de *Stel-je-voor* bewering:
Er zijn $n - 2$ hoeken, die inspringend of gestrekt zijn.
Die zijn samen minstens $(n - 2) \cdot 180$ graden

R5. **a.** Leg uit waarom dat laatste zo is.
b. Wat is het totaal van de hoeken volgens de bekende formule?
c. Nu gaat er toch iets wringen ... Maak de redenering zelf af.

Je mag dus voortaan in redeneringen gebruiken:

Stelling van de uitspringende hoek
Elke simpele polygoon heeft minstens 3 uitspringende hoeken.

Toch wel merkwaardig: een simpele polygoon zonder inspringende hoeken, dat kan best. Maar een simpele polygoon zonder uitspringende hoeken is onmogelijk.
Anders gezegd: er *is* altijd een uitspringende hoek te vinden bij een simpele polygoon!
Dit simpele resultaat heb je nodig bij deel C.

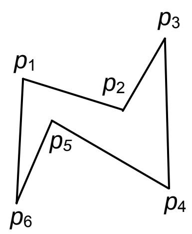
Deel B Diagonalen en kapen

In een simpele polygoon met n hoekpunten p_1 , p_2 , ... , p_n kan elk hoekpunt worden verbonden met elk van de $n - 1$ andere hoekpunten met een lijnstuk. De twee verbindingslijnstukken van dat hoekpunt met zijn ***buurpunten*** zijn ***zijden*** van het polygoon.
Een verbindingslijnstuk dat geheel in het binnengebied van het polygoon ligt, op de hoekpunten zelf na, noemen we een ***diagonaal***.
Voor alle andere verbindingslijnstukken geldt dat ze (op de hoekpunten na) geheel buiten de polygoon liggen of dat ze deels binnen en deels buiten de polygoon liggen.

R6. We verkennen simpele polygonen voor $n = 4$, $n = 5$ en $n = 6$.
Bij elk van de volgende vragen kun je vermoedens krijgen en die toetsen door gewoon voorbeelden te tekenen en daarover na te denken.

a. Hoeveel verbindingslijnstukken (afgezien van de zijden) heeft een simpele polygoon in totaal?
b. Is het mogelijk om een simpele polygoon te tekenen met precies één diagonaal? Als dat niet mogelijk is, hoeveel diagonalen krijg je dan minimaal? En hoeveel diagonalen zijn er maximaal mogelijk?
c. Kun je elke willekeurige simpele polygoon met behulp van diagonalen opdelen in niet-overlappende driehoeken? Hoeveel diagonalen heb je daarvoor nodig?

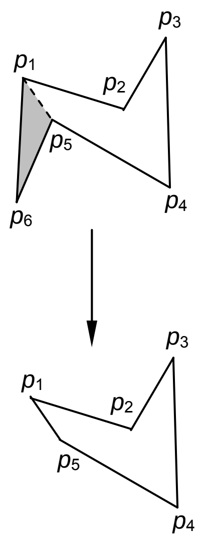
Elk hoekpunt p_i van een polygoon heeft twee buurpunten p_{i-1} en p_{i+1}. Als het verbindingslijnstuk waarmee deze twee buurpunten worden verbonden een diagonaal is, dan noemen we hoekpunt p_i een ***kaap***.
Elke kaap is dus een uitspringende hoek, maar het omgekeerde is niet altijd waar!
De polygoon die hier ter illustratie is getekend heeft vier uitspringende hoeken (p_1, p_3, p_4 en p_6) waarvan er twee ook kaap zijn (p_3 en p_6).



R7. Bekijk andere simpele polygonen dan in de illustratie, met $n = 6$.

a. Construeer een zeshoek met precies twee kapen. Hoeveel uitspringende hoeken zijn er dan? Zijn er meerdere mogelijkheden?
b. Construeer een zeshoek met evenveel kapen als uitspringende hoeken. Zijn er meerdere mogelijkheden?

Een kaap kan altijd worden verwijderd uit een simpele polygoon met n hoekpunten, zonder dat dit het uiterlijk van de polygoon wezenlijk verandert. Je knipt als het ware de driehoek gevormd door de kaap en zijn twee buurpunten weg, waardoor de diagonaal die de twee buurpunten verbond een zijde wordt van de nieuwe polygoon.
De nieuwe polygoon heeft één hoekpunt en één zijde minder. Hiernaast zie je een illustratie van deze procedure.
Deze procedure van het wegknippen is bij andere hoekpunten dan kapen niet mogelijk!
Bij de volgende vraag gaat het om een eigen klein onderzoekje over kapen.



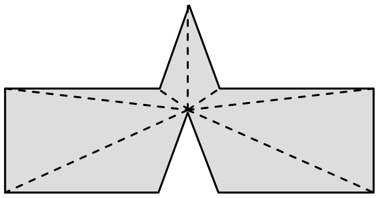
R8. In de illustratie van het wegknippen van een kaap (driehoek $p_1 p_5 p_6$) ontstaat er meteen een nieuwe kaap bij p_1 en ook bij p_5.

a. Ga na dat het verwijderen van een kaap (p_1, p_3 of p_5) uit de nieuwe polygoon ook weer een nieuwe kaap oplevert bij de dan resterende polygoon.
b. Is dat een gevolg van het speciale voorbeeld dat is gebruikt bij de illustratie, of geldt dat algemeen? Kortom: onderzoek of het verwijderen van een kaap uit een simpele polygoon altijd leidt tot een nieuwe kaap in de dan ontstane polygoon.

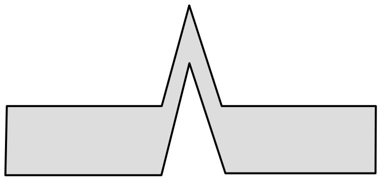
Deel C Triangulatie van polygonen

Bij het bepalen van de som van de hoeken van een polygoon met n zijden (in vraag **R1**) hebben we er gebruik van gemaakt dat de polygoon in $n - 2$ driehoeken verdeeld kon worden, waarbij geen nieuwe hoekpunten nodig waren. We hebben echter niet nagegaan of dat altijd wel kan, en dat is echt wel een zwak punt in de redenering!

R9. In deze figuur is in het bovenste voorbeeld (n = 10; 8 driehoeken) een mogelijke indeling al aangegeven.



a. Ook de onderste figuur (ook n = 10) kan in 8 driehoeken verdeeld worden, maar niet op de manier van de bovenste! Teken er tóch een verdeling in 8 driehoeken van, weer zonder een extra hoekpunt toe te voegen.



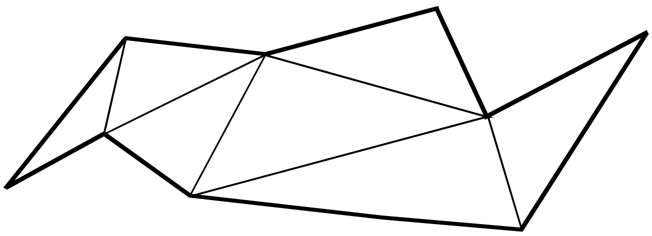
In deze voorbeelden kun je ook zonder een indeling wel laten zien dat de hoekensom 8×180 graden is, omdat de punt boven mooi in de inham daaronder past.

b. Geef een redenering die nu spijkerhard aantoont dat je deze figuren *niet* in 7 driehoeken kunt verdelen.

Na deze voorbereidingen is de volgende definitie heel begrijpelijk:

triangulatie van een simpele polygoon

Een ***triangulatie*** *van een polygoon P is een volledige overdekking van P en van het binnengebied van P met driehoeken waarvan de hoekpunten steeds hoekpunten van P zijn en waarbij de driehoeken elkaar niet overlappen.*



Het is nu nog een open vraag of er bij elke polygoon wel zo'n triangulatie bestaat en of, als die er is, er altijd precies $n - 2$ driehoeken nodig zijn.
Dit deel van de opdracht zal dan ook uitmonden in de te bewijzen stelling:

(Te bewijzen) stelling over triangulatie

bij elke simpele polygoon met n hoekpunten is er een triangulatie met n − 2 driehoeken.

Als voorbereiding daarop zullen we eerst wat bijzondere gevallen bekijken: convexe en bijna-convexe polygonen.

convexe polygonen

Het begrip convexe polygoon speelt een belangrijke rol bij een aantal activiteiten van deze dag. Normaal wordt een convexe simpele polygoon omschreven als een polygoon zonder inspringende hoeken. Daarmee zijn ook gestrekte hoeken toegestaan.
Voor deze Wiskunde B-dag geven we de voorkeur aan een meer strikte omschrijving:

convexe polygoon

Een simpele polygoon met alleen maar uitspringende hoeken heet een convexe polygoon.

Het aardige van een convexe polygoon is dat je vanuit elk hoekpunt diagonalen kunt tekenen naar alle andere hoekpunten (behalve naar de twee buurpunten, want dan krijg je zijden van de polygoon).

R10. Geef een *recept* hoe bij een convexe polygoon een triangulatie gemaakt kan worden. Het recept kan zo beginnen:
1. Gegeven een convexe polygoon met *n* hoekpunten.
2. Kies een van de hoekpunten uit.
3. Trek ...
4. …

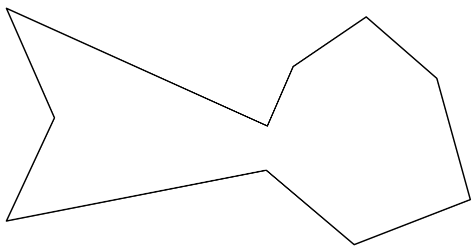
a. Maak het recept af.
b. Geef er enkele voorbeelden bij.

bijna-convexe polygonen

Een ***bijna-convexe*** *polygoon is een polygoon waarvan op één na alle verbindingslijnstukken tussen niet-buurpunten volledig binnen de polygoon liggen.*

R11. Ook bij bijna-convexe polygonen is een trianguleer-recept te bedenken.
a. Laat zien dat je één van de stappen in het recept voor convexe polygonen moet en kunt aanpassen.
b. Geef enkele overtuigende voorbeelden van bijna-convexe polygonen en hun triangulatie.

Splitsen en lijmen!



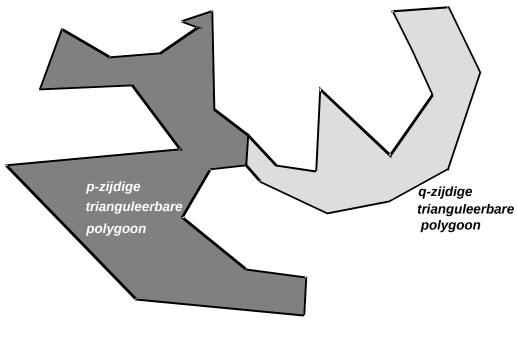
Bij de polygoon hiernaast is het ook niet moeilijk een triangulatie aan te geven. De polygoon is namelijk handig op te splitsen in een convex en een bijna-convex deel.

R12. **a.** Geef die stukken in de figuur aan.
b. Hoe weet je op grond van de voorgaande ervaringen dat die stukken apart te trianguleren zijn?

De hier gegeven suggestie is een voorbeeld van het ***verdeel-en-heers principe***:
kun je een probleem niet direct oplossen, verdeel het dan in tweeën en los de deelproblemen apart op.

R13. Toch is er nog iets dat je moet uitzoeken! De polygoon heeft 10 zijden. Bij het verdelen krijg je twee polygonen, elk met minder zijden. Elk van die twee deel-polygonen heeft een aantal driehoeken nodig voor triangulatie. Klopt het totale aantal driehoeken dat je nodig hebt voor het 10-zijdige polygoon dan nog wel?

R14. Gegeven een polygoon met *n* zijden dat gesplitst kan worden in twee deel-polygonen via een diagonaal. De ene deel-polygoon heeft *p* zijden, de andere *q*. Neem aan dat beide delen aan de triangulatiestelling voldoen.
a. Druk het aantal driehoeken dat nodig is voor de triangulatie van de deelpolygonen in *p* en *q* uit.
b. Laat zien dat voor het weer samengevoegde polygoon nu een triangulatie is gevonden die aan de stelling voldoet.



Splitsen kan altijd!

Om het verdeel-en-heers principe te kunnen toepassen, moet je minstens één diagonaal kunnen vinden in je polygoon. Het is echter niet zo dat de diagonalen in een simpele polygoon altijd maar voor het grijpen liggen. In deel B heb je al wat geoefend met diagonalen. Een simpele polygoon zonder diagonalen kan niet. Maar er is wel een bewijs nodig voor de

Diagonaal-stelling
elke simpele polygoon heeft minstens één diagonaal.

De volgende opmerkingen geven een suggestie om een bewijs te vinden.

- *Stel je voor dat de polygoon een kaap heeft. Dan ben je klaar! (Waarom? Waar is die diagonaal dan?)*
- *Maar eigenlijk hebben we (nog) geen bewijs dat elke simpele polygoon een kaap heeft...*
- *We weten inmiddels wél (zie deel A) dat elke simpele polygoon een uitspringende hoek heeft.*
- *Bij een uitspringende hoek h die géén kaap is komen andere stukken van de polygoon in de buurt van h, stukken die er voor zorgen dat h geen kaap kan zijn ...*

R15. Toon aan: Als h een uitspringend hoekpunt is maar geen kaap, dan is er een diagonaal vanuit h.

R16. Formuleer nu zelf een bewijs voor de diagonaal-stelling

Onderzoeksopdracht 1

Met behulp van het voorgaande kun je nu een sluitend bewijs geven voor de eerder genoemde triangulatie-stelling:

stelling over triangulatie
bij elke simpele polygoon met n hoekpunten is er een triangulatie met $n - 2$ *driehoeken.*

In dat bewijs moet je dus aantonen dat er bij elke simpele polygoon een triangulatie met het juiste aantal driehoeken mogelijk is. Je kunt bij het bewijs gebruik maken van de ingrediënten die in de delen A tot en met C zijn aangedragen.

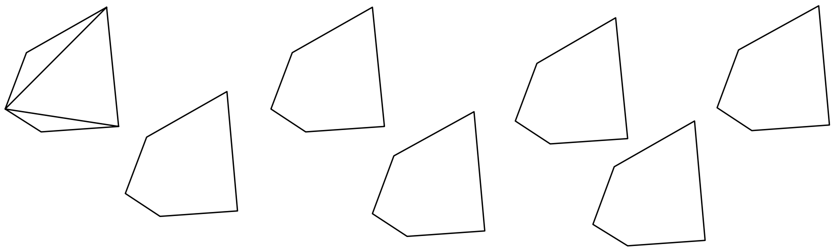
Deel D Triangulaties tellen

Afhankelijk van de vorm, kan een vierhoek één of twee triangulaties hebben:

niet convex: 1 triangulatie ***convex: 2 triangulaties***

Bij polygonen met meer dan vier hoekpunten zijn er nog meer mogelijkheden!

R17. Hieronder is een aantal malen dezelfde convexe vijfhoek getekend.
Teken zoveel mogelijk verschillende triangulaties; één is er al gegeven.



Bij convexe polygonen kun je voor een triangulatie uit alle diagonalen kiezen; dat geval onderzoeken we verder.

Convexe polygonen: het aantal triangulaties tellen.

Bij convexe polygonen hangt het aantal mogelijke triangulaties alleen af van het aantal hoekpunten n. Voor n = 3 is er natuurlijk maar één mogelijkheid; de polygoon zelf is een driehoek. Ook voor n = 4 is er geen probleem: 2 triangulaties. Elk van de twee diagonalen bepaalt er een.
Voor n = 5 heb je waarschijnlijk 5 triangulaties gevonden.

R18. Bedenk ook voor n = 5 een eenvoudige redenering dat er niet meer kunnen zijn.

Het aantal triangulaties bij gegeven n noemen we voortaan T_n

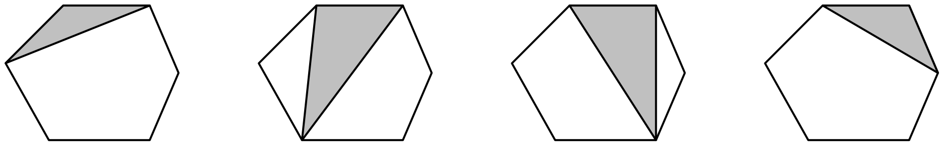
systematisch werken

Voor grotere waarden van n is het verstandig een systematiek te volgen, waarmee je zeker weet dat je geen mogelijkheden vergeet en waarbij je ook zeker geen dubbeltellers creëert.

R19. Probeer op een systematische manier het aantal mogelijke triangulaties voor n = 6 te vinden.

Van zo'n systematische aanpak geven we nu een voorbeeld; mogelijk heb jij al een andere (betere?) systematiek te pakken.
Er zijn 14 verschillende triangulaties van een convexe zeshoek mogelijk. Dat heb je net uitgezocht. Vond je ze niet alle 14 of kreeg je er meer, dan krijg je nu een herkansing!
Die 14 mogelijkheden kun je namelijk op allerlei manieren groeperen (of classificeren).

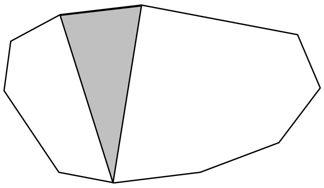
De volgende classificatie maakt gebruik van iets dat op het verdeel-en-heers principe lijkt. Hier wordt gewerkt vanuit één vastgekozen zijde van de polygoon. In het onderstaande schema is de bovenste zijde gekozen als vaste zijde en zijn de daarbij horende vier mogelijke driehoeken grijs getekend.



R20. Verdeel en heers: kijk wat er in elk van de witte veelhoeken nog mogelijk is voor het trianguleren. Die witte veelhoeken hebben uiteraard een kleiner aantal zijden dan 6.

R21. Leg uit dat je door deze manier van indelen zeker weet:
a. dat je alle triangulaties van de convexe zeshoek krijgt,
b. dat je geen dubbeltellingen doet.

R22. Als opstapje naar grotere veelhoeken oefenen we even deze tussenvraag over de getekende convexe 10-hoek. Hoeveel triangulaties van deze 10-hoek zijn er waar de grijze driehoek in voorkomt?



In de volgende tabel staan de al bekende getallen voor T_n

n	3	4	5	6	7	8	9
T_n	1	2	5	14			

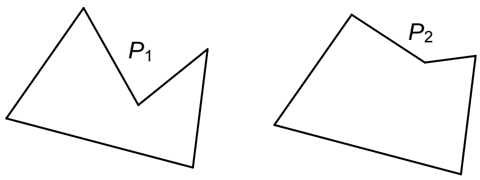
R23. Vul de tabel aan voor n = 7, n = 8 en n = 9.

Onderzoeksvraag 2a
Formuleer je werkwijze nu in de vorm van een recept. Mogelijk verwerk je het recept tot een programma voor de computer of de GR. Dan kom je vast veel verder.
Laat je uitdagen door T_{17} en grotere waarden van n.

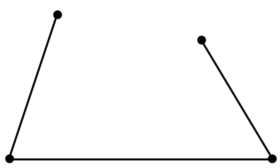
Bijna-convexe polygonen: het aantal triangulaties tellen

In zekere zin gedragen convexe polygonen zich veel meer voorspelbaar dan de niet-convexe. Dat komt onder andere doordat de niet-convexe polygonen meer verschillende verschijningsvormen kennen.

R24. Bekijk de twee niet-convexe vijfhoeken P_1 en P_2 hiernaast.
a. Hoeveel verschillende triangulaties heeft P_1?
b. Hoeveel verschillende triangulaties heeft P_2?



R25. Vier van de vijf hoekpunten van een vijfhoek zijn hiernaast gegeven (dezelfde figuur staat ook op het **werkblad R25**). De positie van het vijfde punt kan nog vrij worden gekozen. Natuurlijk wel zo dat er een simpele polygoon (dus geen zelf-doorsnijdingen!) ontstaat.



Afhankelijk van de keuze van de positie van dat vijfde punt kunnen er met de complete vijfhoek verschillende aantallen triangulaties worden gemaakt.

a. Zoek eerst uit in welk vlakdeel het vijfde hoekpunt kan liggen. Er mogen geen doorsnijdingen met de al getekende zijden ontstaan!

Voor sommige punten in het toegestane gebied heeft de vijfhoek die ontstaat na het toevoegen van het vijfde punt vijf triangulaties, voor andere drie, enzovoorts.

b. Verdeel het toegestane gebied voor de plaatsing van het vijfde punt op basis van het aantal verschillende triangulaties dat mogelijk is. Geef de verschillende gebieden duidelijk aan.

Bijna-convexe polygonen

Niet-convexe polygonen zijn minder goed algemeen in de greep te krijgen dan convexe polygonen. Dat heb je nu wel gemerkt. Daarom bekijken we hier alleen nog de al eerder genoemde bijna-convexe polygonen.
Herinner je de definitie:

*Een **bijna-convexe** polygoon is een polygoon waarvan op één na alle verbindingslijnstukken van niet-buurpunten volledig binnen de polygoon liggen.*

Populair gezegd is een bijna-convexe polygoon dus een convexe polygoon waarvan één hoekpunt een klein beetje naar binnen is geduwd. Daarbij wordt alleen het verbindingslijnstuk tussen de twee buurpunten overschreden. Polynoom P_2 (zie boven bij **R24**) is bijna-convex en P_1 is dat niet.

R26. Bepaal hoeveel verschillende triangulaties er voor bijna-convexe polynomen zijn voor $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ en $n = 7$. Vergeet de systematiek niet!

Ook hier krijg je de gelegenheid om je gevonden antwoorden te verbeteren (indien nodig!).
Er blijkt namelijk een verband te bestaan tussen de getallen T_n die je vond bij het convexe geval en de aantallen bij de bijna-convexe gevallen!
Het aantal verschillende triangulaties van bijna-convexe polygonen noemen we $\boldsymbol{B_n}$
De B-getallen blijken de verschillen tussen twee opeenvolgende T-getallen te zijn. Precieser:

$$\boldsymbol{B_n = T_n - T_{n-1}} \quad \text{voor } n > 3$$

Gebruik dit verband om de gevonden aantallen te controleren of te verbeteren.
Het is natuurlijk mooi dat je zo'n verband in de schoot krijgt geworpen, maar een echt wiskundig ingesteld persoon als jij neemt daar geen genoegen mee! Natuurlijk wil je weten *waarom* dat verband geldt. En je wilt dat ook aan niet-ingewijden overtuigend laten zien!
Kortom:

R27. Toon aan dat het gegeven verband tussen deze drie aantallen geldt.

Het zou kunnen zijn dat je nieuwsgierigheid nu echt gewekt is.

Hoe zit het met een polygoon die op twee kleine deukjes na convex is? Kan daar ook een dergelijk mooi verband worden gevonden voor het aantal mogelijke triangulaties en de T- en de B-getallen?

Onderzoeksopdracht 2b

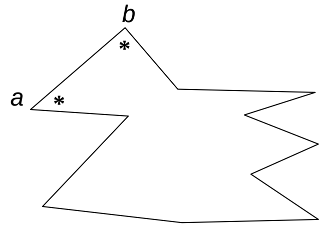
Onderzoek gevallen waarbij twee verbindingslijnstukken van niet-buurpunten geheel buiten de polygoon vallen en alle andere verbindingslijnstukken geheel binnen de polygoon liggen.
Zoek een verband in formulevorm voor het algemene geval.

Deel E De stelling van de twee kapen

Je weet dat je een polygoon met heel veel zijden kunt tekenen die toch maar *3 uitspringende* hoekpunten heeft. Een soortgelijke vraag kun je stellen over *kapen*.
Bij kapen onderscheiden we *verbonden* kapen en *gescheiden* kapen. In de volgende voorbeelden zie je het verschil.

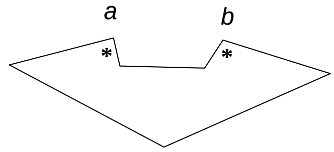
verbonden kapen

twee kapen a en b op een simpele polygoon heten verbonden als ab een zijde van het polygoon is.



gescheiden kapen

twee kapen a en b van een simpele polygoon heten gescheiden als ab geen zijde van het polygoon is.



R28. Probeer de volgende simpele polygonen te tekenen of geef een argumentatie dat het niet kan.
- **a.** een vierhoek met precies 3 uitspringende hoeken.
- **b.** een vierhoek met 2 uitspringende hoeken.
- **c.** een vierhoek met precies 3 kapen.
- **d.** een vierhoek met precies 2 kapen.
- **e.** een vierhoek met 2 gescheiden kapen.
- **f.** een vierhoek met precies 2 verbonden kapen.

R29. Probeer de volgende polygonen te tekenen of geef een argumentatie dat het niet kan.
- **a.** Een polygoon met 5 zijden en precies twee kapen.
- **b.** Een polygoon met 5 zijden en precies twee kapen, waarbij de kapen verbonden zijn.
- **c.** Een polygoon met 12 zijden en precies twee kapen.

Voor kapen geldt de volgende stelling, die lijkt op de stelling over de 3 uitspringende hoeken.

stelling van de twee gescheiden kapen

Elke simpele polygoon met meer dan drie zijden heeft minstens twee gescheiden kapen.

Deze stelling kan op verschillende manieren bewezen worden. Je kunt je eigen weg zoeken of de volgende tip oppakken.

R30. Teken ter oriëntatie wat verschillende simpele polygonen.
- **a.** Maak een triangulatie van deze polygonen. Je weet dat er steeds twee driehoeken minder zijn dan zijden.
- **b.** Markeer in de triangulaties de driehoeken die twee zijden op de polygoon hebben.
- **c.** Toon aan: minstens één hoekpunt van zo'n driehoek van vraag **b** is een kaap. Het is het hoekpunt tussen de twee zijden die ook zijden van de polygoon zijn.

Onderzoeksopdracht 3

Bewijs de

stelling van de twee gescheiden kapen

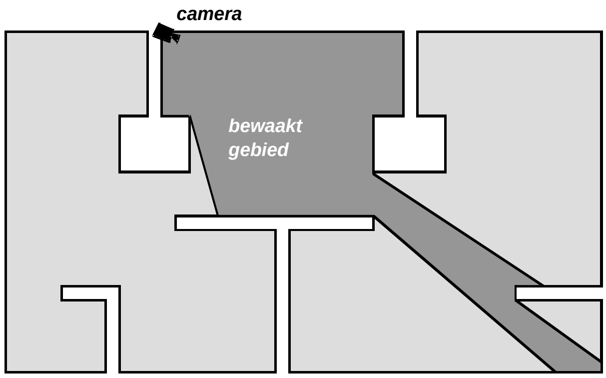
Elk simpele polygoon met meer dan drie zijden heeft minstens twee gescheiden kapen.

Deel F Bewaakte polygonen

Dit onderdeel van deze Wiskunde B-dag is van groot praktisch belang.
Het gaat over bewaking van ruimten. Je wilt camera's opstellen die alles kunnen overzien, maar niet meer dan echt nodig is. Ze kunnen alle kanten uit draaien. Tentoonstellingen met veel zijruimten en hoekjes en dure spullen, dat soort werk. De plattegrond van zo'n tentoonstellingsruimte is een polygoon.
In dit deel

- *is het te bewaken gebied steeds het binnengebied van een simpele polygoon,*
- *is het vereist dat de camera's alleen op de hoekpunten van de polygoon mogen staan.*

In de werkelijke toepassing is dat vaak ook zo. De polygoon zal dan deels langs verschillende kanten van de expositiewanden lopen, zoals in het voorbeeld hieronder te zien is.
In dit voorbeeld is al één camera opgesteld en het bewaakte gebied is donkerder aangegeven.
De voor de hand liggende vraag is: met hoe weinig camera's kan de hele ruimte overzien worden?



R31. Deze plattegrond is op **werkblad R31** nogmaals opgenomen, zonder de camera. Vind het minimaal benodigde aantal camera's.

Het minimale aantal camera's hangt uiteraard af van de vorm van de ruimte binnen de polygoon en van het aantal hoekpunten. Een aantal eenvoudige algemene beweringen zijn niet zo moeilijk aan te tonen of te weerleggen.

R32. Toon aan of geef een tegenvoorbeeld:
- **a.** Elke (bijna-)convexe polygoon kan door 1 camera bewaakt worden.
- **c.** Elke simpele 5-hoek kan door 1 camera bewaakt worden.
- **d.** Elke polygoon kan bewaakt worden door alleen camera's te plaatsen op alle uitspringende hoeken.
- **e.** Elke polygoon kan bewaakt worden door alleen camera's te plaatsen op alle inspringende hoeken.

Algemene stellingen over bewaakte polygonen
Een simpele stelling over een voldoende aantal camera's is deze:
elke polygoon met n hoeken kan door $n-2$ camera's bewaakt worden.

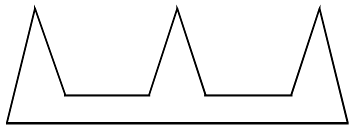
Dat is geen indrukwekkend scherp resultaat, maar het is wel een bewering die een verband legt tussen het aantal hoekpunten en het aantal camera's. Ook het bewijs is illustratief:
Trianguleer de polygoon. Dat gaat met $n-2$ driehoeken. Elke driehoek kan met 1 camera bewaakt worden vanuit een hoekpunt.

Een veel betere stelling, maar wel moeilijker te bewijzen, is de volgende.

Stelling van de bewaakte polygoon.
Een simpele polygoon met n hoekpunten kan altijd bewaakt worden door p camera's die in de hoekpunten zijn opgesteld, met p gelijk aan de kleinste gehele waarde waarvoor geldt $p > \frac{1}{3}n - 1$

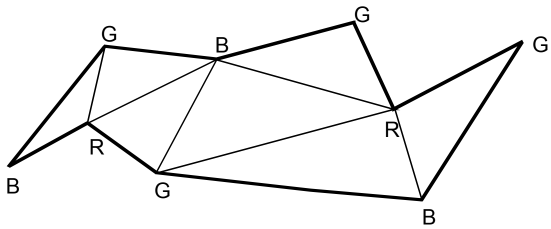
Het is duidelijk dat er veel polygonen zijn die met veel minder camera's bewaakt kunnen worden. Maar deze algemene stelling is niet te verbeteren!

R33. Toon aan dat $p = \frac{1}{3}n - 1$ echt te weinig is bij n = 9 voor een polygoon als hiernaast is getekend; en ga na, door andere voorbeelden te tekenen, ook voor andere waarden van n.



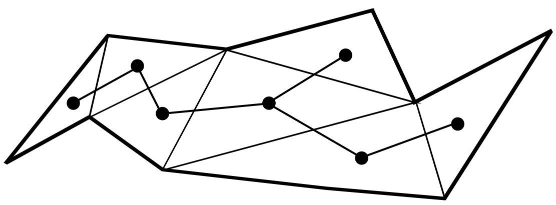
Twee andere representaties van polygonen helpen wellicht bij het onderzoek:
- het kleuren van een polygoon
- het representeren van een getrianguleerde polygoon met een boomgraaf.

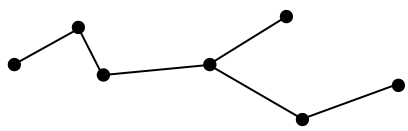
Een polygoon kleuren
In onderstaand voorbeeld zie je een kleuring van de hoekpunten van een polygoon met drie verschillende kleuren (**B**lauw, **G**roen en **R**ood). Spelregel bij de kleuring is dat twee hoekpunten die zijn verbonden via een zijde of een diagonaal die is gebruikt voor de triangulatie verschillende kleuren moeten krijgen. Het blijkt met drie verschillende kleuren mogelijk te zijn.



Je kunt aantonen dat een kleuring nooit met twee kleuren kan en dat meer dan drie kleuren nooit nodig zijn. Misschien heb je om dat zeker te weten daarbij behoefte aan de volgende representatie van een getrianguleerde polygoon.

Een boomgraaf bij een getrianguleerde polygoon
Een getrianguleerde polygoon kan worden gekarakteriseerd met een boom-graaf. Dat is een verzameling punten waarvan er een aantal direct met elkaar verbonden zijn door een lijnstuk. In de polygoon wordt in elke driehoek van de triangulatie een punt gezet. De punten in de driehoeken die een zijde gemeen hebben worden verbonden. Voor bovenstaande polygoon levert dit de volgende boomgraaf op (eerst getekend in de polygoon en daarnaast zonder de polygoon):





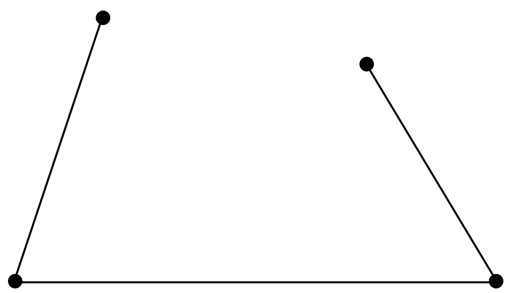
Van een boomgraaf die op de beschreven manier een triangulatie van een simpele polygoon voorstelt kun je aantonen dat
- er nooit meer dan drie lijnstukken vanuit één punt vertrekken,
- het aantal punten altijd één meer is dan het aantal lijnstukken,
- er altijd tenminste twee punten zijn met slechts één verbindingslijnstuk,
- het nooit mogelijk is om vanuit een punt via verbindingen met andere punten weer terug te keren in het vertrekpunt.

Onderzoeksopdracht 4

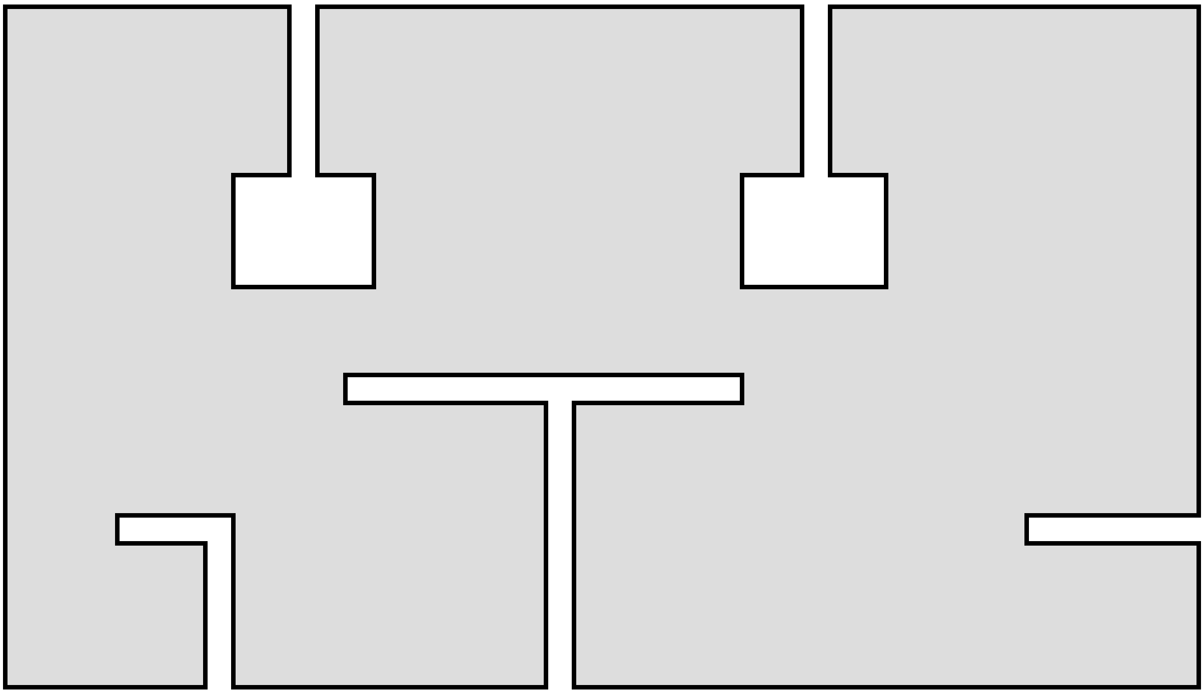
Bewijs de ***Stelling van de bewaakte polygoon.***

Een simpele polygoon met n hoekpunten kan altijd bewaakt worden door p camera's die in de hoekpunten zijn opgesteld, met p gelijk aan de kleinste gehele waarde waarvoor geldt $p > \frac{1}{3}n - 1$

Werkblad bij vraag R25



Werkblad bij vraag R31



Definities en omschrijvingen

Binnen- en buitengebied van een simpele polygoon.

Een simpele polygoon verdeelt het vlak in twee aaneengesloten delen: het binnen- en het buitengebied. Kenmerk van het buitengebied: het is onbeperkt groot. De polygoon zelf hoort per definitie NIET tot het binnen- of buitengebied.

Buurpunten en niet-buurpunten

Ieder hoekpunt van een polygoon heeft twee buurpunten, de eindpunten van de twee zijden die vanuit het punt vertrekken. Alle andere hoekpunten heten niet-buurpunten.

Convexe polygoon

Een simpele polygoon waarbij alle hoekpunten uitspringende hoeken zijn.

Diagonaal van een simpele polygoon

Een verbindingslijnstuk van een hoekpunt en een niet-buurpunt dat, op de hoekpunten na, geheel binnen de polygoon ligt.

Gestrekte hoek

Een hoek heet gestrekt, als de hoek 180° is.

Inspringende hoek

Een hoek heet inspringend als de hoek tussen 180° en 360° ligt.

Kaap

Een hoekpunt p_i *van een polygoon waarbij* $p_{i-1}p_{i+1}$ *een diagonaal is.*

Polygoon met n hoekpunten (n > 2)

Een polygoon is een gesloten lijn die uit eindig veel rechte lijnstukken bestaat.
Er zijn n verschillende punten $p_1, p_2, \dots, p_n$*; de hoekpunten van het polygoon.*
De polygoon heeft n zijden $z_1 = p_1p_2$, $z_2 = p_2p_3$, ..., $z_{n-1} = p_{n-1}p_n$ *en* $z_n = p_np_1$.

Simpele polygoon

Een polygoon zonder zelfdoorsnijdingen heet een simpele polygoon.

Triangulatie van een simpele polygoon met n zijden

Een triangulatie van een polygoon P is een volledige overdekking van P en van het binnengebied van P met driehoeken waarvan de hoekpunten steeds hoekpunten van P zijn en waarbij de driehoeken elkaar niet overlappen.

Uitspringende hoek

Een hoek heet uitspringend als de hoek tussen 0° en 180° ligt.