Discrete Analyse

Nieuwe wiskunde tweede fase
VWO
Algemene deel
Freudenthal Instituut

Discrete analyse

Project: Wiskunde voor de tweede fase
Profiel: Alle profielen
Domein: Discrete analyse
Klas: VWO 4
Staat: Versie 1
Ontwerp: Anton Roodhardt, Sieb Kemme, Monica Wijers

Inhoud

1: Instap: Veranderingen

Discrete Analyse gaat over het bestuderen en het in formules weergeven van 'veranderingen'. Allereerst gaan we kijken naar een aantal voorbeelden waarin veranderingen een belangrijke rol spelen.

In het krantenknipsel vind je een overzicht van de veel voorkomende vormen van criminaliteit tussen 1980 en 1995. Lees dit artikel aandachtig door.

Aantal diefstallen neemt toe

CBS telt minder geweldsdelicten, kleine delicten op hetzelfde niveau

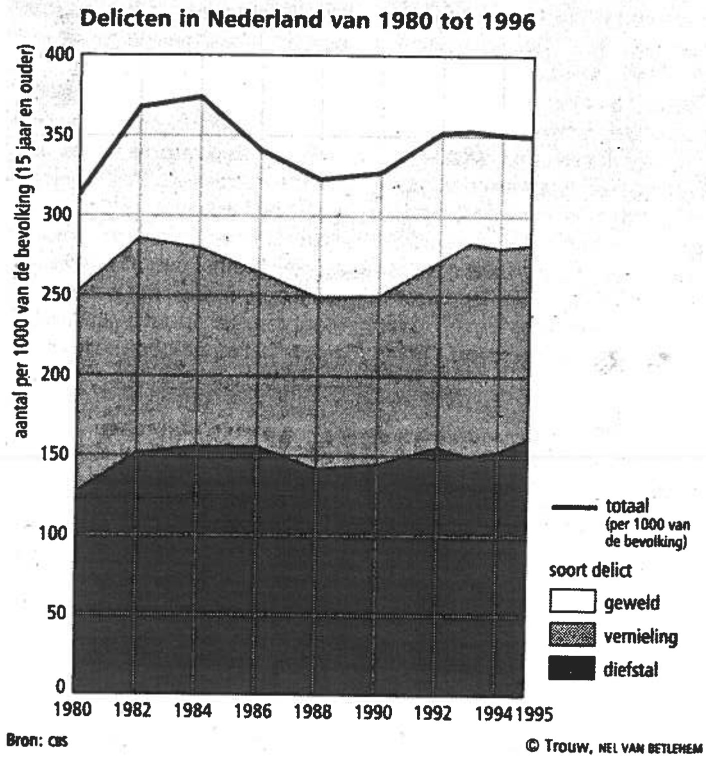
Van een onzer verslaggevers

DEN HAAG – Het aantal diefstallen is vorig jaar opnieuw sterk toegenomen. In 1995 zijn van de 1000 inwoners er 161 slachtoffer geworden van inbraak, fietsendiefstal, diefstal uit de auto en zakkenrollerij. Het diefstalcijfer is daarmee hoger dan ooit.

Dit blijkt uit de enquête rechtsbescherming en veiligheid die het Centraal bureau voor de Statistiek sinds 1980 jaarlijks houdt. Ongeveer 6000 personen zijn door het CBS ondervraagd. Gebleken is verder dat het aantal geweldsdelicten verder is afgenomen. Door deze afname ligt de veel voorkomende criminaliteit uiteindelijk op hetzelfde niveau als in de afgelopen drie jaar.

De bevolking van vijftien jaar en ouder is vorig jaar slachtoffer geweest van ongeveer 4,3 miljoen geweldsdelicten, diefstallen en vernielingen. Dit zijn ruim 350 delicten per 1000 inwoners.

De diefstallen namen tussen 1980 en 1984 al sterk toe van 127 tot 156 per 1000 inwoners. Daarna daalde het aantal diefstallen. Sinds 1988 vertoont de vermogenscriminaliteit echter een almaar stijgende lijn, zoals ook uit bijgaand grafiekje blijkt.



1 **a.** In de figuur stelt de bovenste dikke streep het totaal aantal delicten per 1000 inwoners voor. Hoe is deze grafiek getekend met behulp van de andere drie?

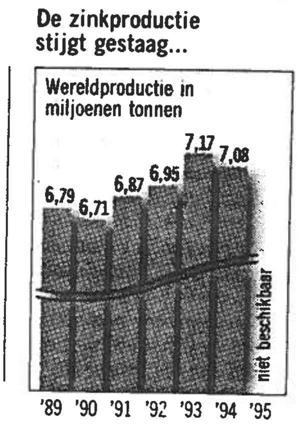
b. Wanneer was de toename van het aantal diefstallen per 1000 het sterkst? Hoe groot was die toename toen per jaar?

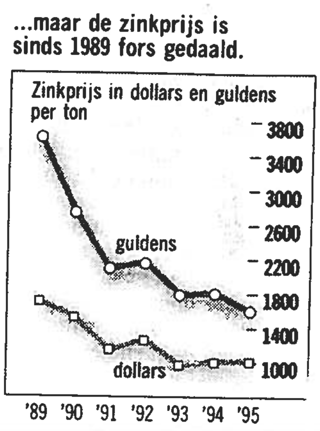
c. Je ziet dat het aantal diefstallen per 1000 inwoners tussen 1980 en 1995 gestaag is toegenomen. Hoe groot was de gemiddelde toename per jaar?

d. Maak een tabel waaruit je per twee jaar het aantal vernielingen per 1000 inwoners kunt aflezen. Voeg aan de tabel ook een kolom toe met het verschil tussen twee opeenvolgende jaren.
e. Doe hetzelfde als in opdracht **d** voor het aantal geweldsdelicten .
f. Wat kun je zeggen over de toe- of afname van het aantal vernielingen en geweldsdelicten tussen 1980 en 1995? Kloppen de koppen boven het artikel wel?
g. Wat is het voordeel van een tabel tegenover een grafiek?

2 In de volgende situaties wordt telkens een verband tussen twee variabelen gegeven. Soms gebeurt dat in woorden, soms met een grafiek, een formule of een combinatie van deze drie. Beschrijf het verband telkens in termen van veranderingen. Bijvoorbeeld of er sprake is van een gestage toename of afname. Of dat er sprake is van een plotselinge afname na een periode van groei.

De grootste zinkreserve ter wereld, in Queensland, Australië, zou wel eens de redding kunnen zijn van het Brabantse zinkbedrijf Budel Zink. Dat heeft schone (en dus de Australische) zink nodig. Het probleem: de aboriginees houden het miljardenproject tegen. De directeur: 'Wij kunnen het hier niet oplossen.'





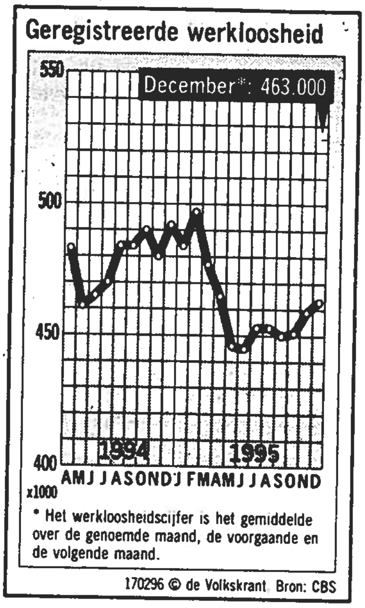
Vermindering van werkloosheid lijkt te stagneren

Van onze verslaggever

AMSTERDAM

De daling van de werkloosheid zet mogelijk niet verder door. Het aantal werklozen in het vierde kwartaal van vorig jaar was 460 duizend, tegen 453 duizend in het derde kwartaal van 1995. Dat blijkt uit cijfers van het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS), die vrijdag zijn gepubliceerd.

Het CBS is er niet zeker van of de lichte toename een incidentele hapering is in de tendens van daling, of dat er sprake is van een structurele verandering. Het CBS beschikt nog niet over alle gegevens over het vierde kwartaal van vorig jaar.



Archeologen proberen de grootte van de bevolking van een prehistorische nederzetting af te leiden uit de oppervlakte van de nederzetting. Voor een bepaalde streek gebruiken ze de formule:

$$P = 146.15\ A^{0.51}$$

P = populatie en A = oppervlakte in hectare.

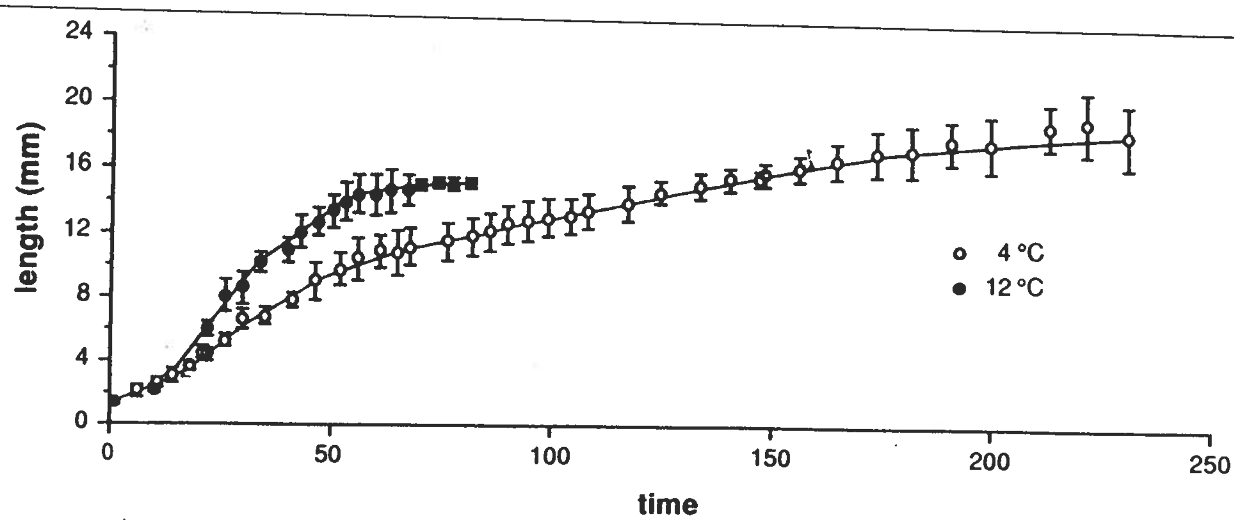
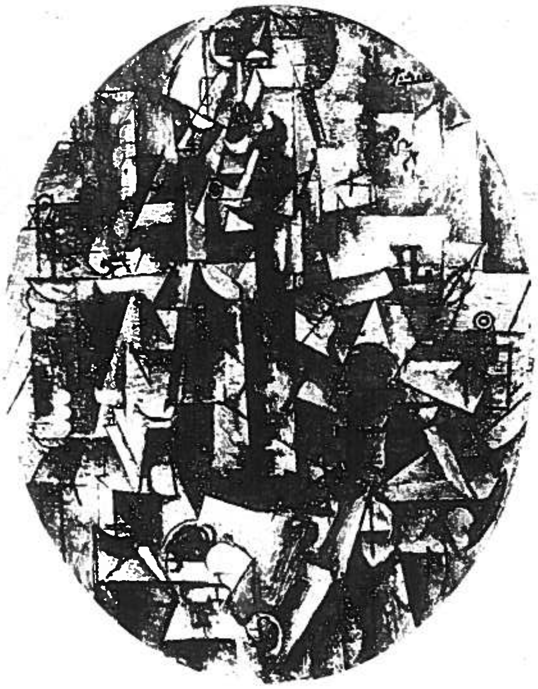
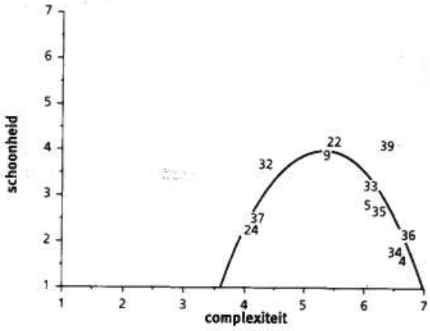


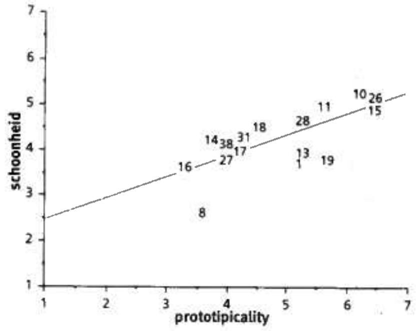
Fig. 5. Patterns of growth in the laboratory, at 4 °C (open circles) and 12 °C (black circles), with standard deviations. At the lower temperature, animals grew more slowly, towards a larger size, and lived longer. The curves are fitted by eye.

In het boek *Natuurkunde van het vrije veld* beschrijft de auteur Dr. M. Minnaert de aangroei van ijs: 'De aangroei geschiedt des te langzamer naarmate de ijslaag dikker wordt en een grotere 'warmteweerstand' biedt; de ervaring leert, dat de tijd nodig om een bepaalde dikte E cm te bereiken ongeveer evenredig is met E(E+2)'.





Het omgekeerd U-vormigverband tussen schoonheid en complexiteit voor abstracte kubistische schilderijen.



De lineaire relatie tussen schoonheid en herkenbaarheid voor figuratieve kubistische schilderijen.

2: Rijen

Regelmaat

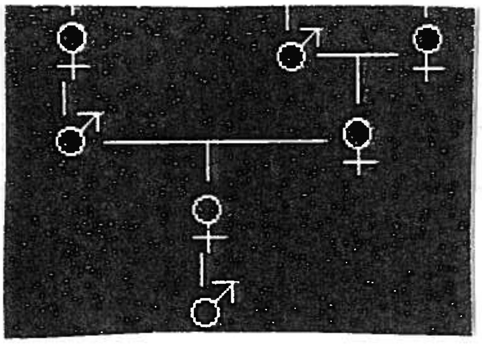
1 Vul elk van de onderstaande rijen aan met de volgende drie getallen
a. 2, 5, 8, 11, 14, ...
b. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,.........
c. 2, 6, 18, 54,..........
d. 1, 6, 16, 36, 76,.......

Elke rij uit opdracht **1** heeft een bepaalde regelmaat.
Voor rij **a.** kun je die bijvoorbeeld als volgt beschrijven:
'Elk volgend getal vind je door bij het voorgaande 3 op te tellen'.

2 Beschrijf voor de andere drie rijen uit opgave **1** de regelmaat.

Bijen

Niet alle bijen hebben twee ouders. Mannetjesbijen - ofwel: darren - komen uit de onbevruchte eitjes van de bijenkoningin en hebben dus alleen een moeder. Vrouwtjesbijen, ook wel werksters genoemd, komen uit de bevruchte eitjes en hebben dus twee ouders: een vader en een moeder.
De stamboom met de voorouders van een mannetjesbij ziet er als volgt uit:



Je ziet dat deze mannetjesbij 1 ouder, 2 grootouders, en 3 overgrootouders heeft.

3 Zet de stamboom voort en zoek uit hoeveel bet-overgrootouders en betbetovergrootouders deze bij heeft.

In plaats van te praten over ouders, grootouders, overgrootouders, betovergrootouders enz. nummeren we de generaties. De mannetjesbij is generatie 1, zijn ouders zijn generatie 2, zijn grootouders generatie 3 enzovoorts.

4 **a.** Vul in de tabel de aantallen voorouders van deze mannetjesbij in. Ga daarbij minstens tot generatie 10.

generatienr.										
aantal voorouders										

b. Maak eenzelfde tabel voor de voorouders van een vrouwtjesbij.

c. Vergelijk de twee tabellen en verklaar overeenkomsten en verschillen.

De rijen met de aantallen voorouders van de bijen uit opgave 4 vertonen een duidelijke regelmaat. De getallen in deze rij heten Fibonaccigetallen, genoemd naar de Italiaanse wiskundige Leonardo van Pisa wiens bijnaam Fibonacci was. Fibonacci leefde rond 1200 en 'ontdekte' de Fibonaccigetallen toen hij onderzocht hoe een konijnenpopulatie onder ideale omstandigheden groeit.

5 **a.** Beschrijf hoe je in de rij van Fibonaccigetallen het honderdste getal kan vinden.
b. Maak een grafiek van de aantallen voorouders (de Fibonaccigetallen) die je in opdracht 4a hebt gevonden. Zet het nummer van de generatie op de horiziontale as.
c. Welke type groei vertoont de rij van Fibonaccigetallen?

termen van een rij

De getallen in een rij worden de *termen* van een rij genoemd.

Bij de rij van Fibonacci kunnen we de termen als volgt aangeven:
1 geven we aan met $F(1)$
1 geven we aan met $F(2)$
2 geven we aan met $F(3)$
3 geven we aan met $F(4)$
5 geven we aan met $F(5)$
8 geven we aan met $F(6)$
enzovoorts.

De F in de naam is afkomstig van Fibonacci. In plaats van een F kan elke andere letter gebruikt worden. Vaak wordt een 'u' of een 't' gebruikt.
Het getal tussen haakjes is het nummer van de term. Het zesde Fibonaccigetal geef je aan met $F(6)$ en het is 8.
Het n-de getal in de rij geven we aan met $F(n)$.

De eerste term is hier $F(1)$ genoemd. Soms wordt de eerste term van een rij aangegeven met $F(0)$. In situaties die bijvoorbeeld te maken hebben met groei is dit dan de startwaarde of het startgetal.

Voor de rij van Fibonaccigetallen geldt:

de vierde term = de tweede term + de derde term

of korter:

$F(4) = F(2) + F(3)$.

6 Een formule bij de rij Fibonaccigetallen kan nu als volgt worden opgeschreven.

$F(n) = F(n-2) + F(n-1)$ en $F(1)=F(2)=1$.

a. Schrijf deze formule als een woordformule. Leg daarbij uit wat bedoeld wordt met $F(n-1)$ en $F(n-2)$.
b. Waarom is het nodig om aan te geven wat de waarde is van $F(1)$ en $F(2)$?
c. Ga na dat de formule klopt door steeds de geschikte waarden in te vullen.

recurrente betrekkingen

In opgave 6a zag je een voorbeeld van een formule waarin je voorgaande termen gebruikt om een nieuwe term te berekenen. Zo'n formule noemen we een *recurrente betrekking*. Recurrent betekent: 'teruglopen'. Een andere naam hiervoor is een *recursieve formule*.

Bij zo'n formule is het altijd nodig een startwaarde te geven, anders weet je niet waar je moet beginnen. Je kunt de termen van de rij vinden door - beginnend bij de startwaarde(n) - herhaald de goede waarden in te vullen in de formule voor $F(n)$.

7 Schrijf bij elk van de volgende recursieve formules de eerste 10 termen op.
a. $u(1) = 2$ en $u(n) = 3 * u(n-1)$.
b. $v(1) = 7$ en $v(n) = 3 * v(n-1)$.
c. $t(1) = t(2) = 3$ en $t(n) = t(n-2) + 2*t(n-1)$
d. $w(1) = 9$ en $w(n) = 4*w(n-1) - 2$
e. Vergelijk de rijen u en v. Beschrijf en verklaar de overeenkomsten en verschillen.

8 Maak een recursieve formule bij elk van de rijen uit opdracht 1.

Je hebt nu gezien hoe je met behulp van recursieve formules rijen kunt maken, en omgekeerd hoe je bij een rij getallen een recursieve formule kunt vinden.

Een belachelijke zakgeldregeling

Stel je voor: je bent het geruzie met je ouders over de hoogte van je zakgeld zat. Je doet ze twee voorstellen waar ze een keuze uit kunnen maken:

Voorstel 1
Je begint met één stuiver zakgeld. Elke week wordt je zakgeld verdubbeld. Dus de eerste week één stuiver, de tweede week twee stuivers, de derde week vier stuivers, enzovoort.

Voorstel 2
Je begint met f10,- zakgeld. Elke week wordt je zakgeld met f2,50 verhoogd. Dus de eerste week f10,-, de tweede week f12,50, de derde week f15,- enzovoort.

Lachend gaan je ouders akkoord met voorstel ...... ?
Ja, dat hangt ervan af hoe slim ze zijn.

9 Ga na welk voorstel het beste resultaat oplevert voor jou en voor je ouders.

gebruik GR

Met de grafische rekenmachine (GR) kun je op eenvoudige wijze berekenen hoe het zakgeld volgens de twee voorstellen toeneemt.
Je voert eerst de beginwaarde in (voor voorstel 1 is dat 0,05) en drukt op [Enter].

Je ziet dan .05 rechts op het scherm verschijnen. Deze waarde zit nu in het werkgeheugen.
Als je nu het maalteken (*) intypt zie je op het scherm **Ans*** staan.
Ans is de afkorting van Answer, in dit geval heeft **Ans** de waarde 0,05.
Typ [2] en druk op [Enter].
Door vervolgens steeds op [Enter] te drukken wordt de procedure ***2** steeds toegepast op de steeds veranderde waarde van **Ans**.

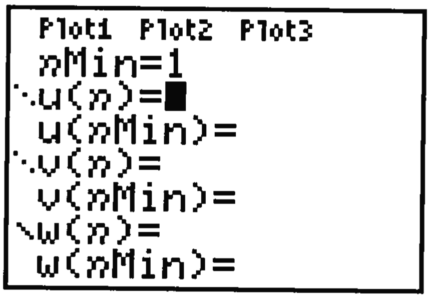
10 Voer de hierboven beschreven procedure uit, om met behulp van de GR de bij opdracht 9 voorgestelde zakgeldregelingen voor een flink aantal weken voort te zetten.
Noteer de bedragen die je zo krijgt.

11 a. Maak voor beide zakgeldvoorstellen een passende recursieve formule.

b. Vergelijk de recursieve formules met de procedure op de GR. Welk element in de formule speelt dezelfde rol als **Ans**?

Rijen op de TI-83

Op de GR kun je rijen ook maken door de (recursieve) formule in te typen.
Je moet op de TI-83 eerst de juiste mode instellen.
Druk op de MODE-toets, en kies op de vierde regel SEQ.
Seq is de afkorting van sequence, wat 'rij' betekent.
Als je nu op Y= toets drukt, verschijnt het scherm waarin je rijen in kunt voeren.
Dat ziet er zo uit:



Je kunt nu drie rijen definieren *u*, *v* en *w*.
Bovenaan het scherm zie je *n*Min = 1 staan. Dat betekent dat 1 de kleinste waarde (minimumwaarde) van *n* is.
Dit kun je desgewenst aanpassen. Verander je het bijvoorbeeld in *n*Min = 0, dan begint de eerste term bij $n = 0$, de 'nulde' term.
De (recursieve) formule typ je in achter u(*n*) =...
De beginwaarde achter u(*n*Min) =...

12 a. Van een rij *u* is de recursieve formule $u(n) = 1.5 * u(n-1)$ en $u(0)=2$. Voer deze formule in op de TI-83.
Let op: de kleine letter u krijg je door [2nd][7] in te toetsen. De *n* zit op de toets [x, T, Θ, *n*].

b. Bekijk de waarden van de rij door [2nd][TABLE] te typen. Welke waarde heeft *u* (50) en welke *u*(100)?
TIP: met [2nd][TBLSET] kun je het nummer van de term waarmee de tabel op het scherm begint (TblStart) en de stapgrootte in de tabel (ΔTbl) zonodig aanpassen.

c. Bekijk ook de grafiek van deze rij onder [GRAPH]. Beschrijf de soort toename.
TIP: met [WINDOW] kun je de vensterinstellingen aanpassen om de grafiek in beeld te brengen.

13 a. Voer nu de twee recursieve formules voor de zakgeldregelingen in op de GR. Gebruik daarvoor *u*(*n*) en *v*(*n*). Noteer wat je hebt ingevoerd.

b. Bekijk de waarden in de tabel. Bij hoeveel weken is welk van de regelingen voordeliger voor jou ?

c. Stel bij [2nd][TBLSET] de stapgrootte van de tabel (ΔTbl) in op 0.5 en bekijk de tabel. Verklaar het resultaat van deze actie.

d. Verander het beginbedrag van voorstel 1 in 1 cent en het toenamebedrag van voorstel 2 in *f* 5,-. Pas de formules aan en zoek opnieuw uit, met behulp van de

GR, vanaf wanneer welk van de regelingen meer zakgeld oplevert.

14 De recursieve formule voor de rij van Fibonacci kun je niet op deze manier invoeren bij $u(n)$ op de GR. Probeer hiervoor een verklaring te geven.

Notaties

het rangnummer

Tot nu hebben we de termen van een rij steeds aangeduid met $F(n)$, $u(n)$ of $t(n)$.
Het rangnummer van de term staat tussen haakjes.
Een andere veel gebruikte notatie is t_n. Het rangnummer hangt onder de rijnaam.
t_8 duidt dan de term met rangnummer 8 aan, en t_{n-1} de term met rangnummer $n-1$, ofwel de term voorafgaand aan de n-de term.

de beginterm

Al eerder is opgemerkt dat de beginterm van een rij soms rangnumer 1 krijgt en soms rangnummer 0. Dat betekent dat je steeds goed op moet letten en zonodig op de GR *nMin* anders moet instellen.

vooruit of terug kijken

Tenslotte zijn er twee opvattingen bij het maken van recursieve formules:

- de waarde van $u(n)$ berekenen vanuit $u(n-1)$, of
- de waarde van $u(n+1)$ berekenen vanuit $u(n)$.

Bij wijze van spreken: 'van gisteren ($n-1$) naar vandaag (n) gaan'of 'van vandaag (n) naar morgen ($n+1$) gaan'.
Wij hebben tot nu toe steeds gekozen voor de eerste mogelijkheid, dat zie je aan het type formule namelijk: $t_n =$ ...... t_{n-1}....... Deze manier wordt ook gebruikt op de TI-83.

Vanaf nu zullen we de verschillende notaties door elkaar gebruiken.

15 a. Bekijk nog eens de formules voor de zakgeldregelingen en schrijf ze op de andere manier beginnend met $u_{n+1} =$ ...
b. Welke manier heeft je voorkeur? Waarom?

16 Bepaal de recursieve formules voor de volgende rijen. Kies zelf welke notatie je wilt gebruiken.
a. 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...
b. De rij met: $t_2 = 4$, $t_8 = 14$ en $t_{14} = 23$
c. 20, 10, 5, 2.5, 1.25, ...
d. 3, 8, 18, 38, 78, ...
TIP: gebruik, indien mogelijk, de GR om te controleren of je formules inderdaad de goede rijen opleveren.

Twee rijen met faam

Je hebt in de voorgaande opgaven een aantal verschillende soorten recursieve formules met bijbehorende rijen gezien. Twee belangrijke typen formules zijn:

- formules waarbij de nieuwe term ontstaat door bij de voorgaande een vast getal op te tellen
- formules waarbij de nieuwe term ontstaat door de voorgaande met een vast getal te vermenigvuldigen.

rekenkundige rij

Een rij die ontstaat door bij het voorgaande getal telkens hetzelfde getal op te tellen (negatieve getallen mogen ook), heet een *rekenkundige rij*.

meetkundige rij

Een rij die ontstaat door het voorgaande getal telkens met hetzelfde getal te vermenigvuldigen, heet een *meetkundige rij.*

17 a. Veronderstel dat je een rij getallen hebt. Bedenk een snelle test om vast te stellen of het een rekenkundige of een meetkundige rij is of geen van beide.
b. Ga na welke van de rijen die je tot nu toe in de voorgaande opdrachten gezien hebt rekenkundig en welke meetkundig zijn.

18 Van een rij is gegeven $t_0 = 2$ en $t_4 = 32$.
a. Veronderstel dat dit een *rekenkundige* rij is. Geef de passende recursieve formule.
b. Veronderstel nu dat het hier gaat om een *meetkundige* rij. Geef de daarbij passende recursieve formule.
TIP: Om na te gaan of je formules juist zijn, kun je ze gebruiken om - op de GR- de eerste vijf termen van de rij te maken en die te vergelijken met de gegevens.

19 a. Maak een algemene recursieve formule van de vorm $t_{n+1} = \ldots\ldots t_n \ldots\ldots$, voor een rekenkundige rij. Vermeld de betekenis van de letters en getallen die je in je formules gebruikt!
b. Doe hetzelfde voor een meetkundige rij.

Met de recursieve formules van rekenkundige rijen en meetkundige rijen kun je de waarden van de rij *stap voor stap* berekenen.

$$t_0 \longrightarrow t_1 \longrightarrow t_2 \longrightarrow t_3 \longrightarrow t_4 \longrightarrow \ldots\ldots\ldots$$

Dat is wel erg omslachtig als je de waarde van een term met een hoog rangnummer bijvoorbeeld t_{100} wilt bepalen. Het is dan nuttig om ook sprongberekeningen te kunnen maken.

$$t_0 \quad - - - - - - - - - - - - - - - - - - - \quad t_4$$

Het zou in zo'n geval handig zijn als je een formule had die de waarde van t_n direct in in n (het rangnummer) uitdrukt in plaats van in t_{n-1} (de voorgaande term).

directe formules

Een formule waarmee dat kan, noemen we een *directe formule.* De volgende opgaven gaan daarover.

20 De recursieve formule $t_n = t_{n-1} + 4$ *en* $t_0 = 5$ is gegeven.
Bij deze formule kun je het vinden van de termen stap voor stap uitschrijven:
$t_1 = t_0 + 4$
$t_2 = t_1 + 4 = t_0 + 4 + 4$
$t_3 = t_2 + 4 = t_1 + 4 + 4 = t_0 + 4 + 4 + 4$
enzovoort.
a. Schrijf nog een aantal termen volledig uit en verklaar daarmee dat $t_n = 5 + 4n$ de directe formule bij deze rij is.
b. Ga na dat beide formules dezelfde rij geven. Schrijf de eerste 7 termen op.
c. Wat stelt de 5 in de directe formule voor? Wat is de betekenis van de 4? En wat die van de n?

21 Ook directe formules voor rijen kunnen ingevoerd worden in de GR als die in de SEQ-mode staat.

a. Voer de directe formule uit opgave 20b in en bekijk de tabel. Waarom is het niet nodig om een beginwaarde in te voeren?

b. Bepaal de waarde van t_{100} op de volgens jou eenvoudigste manier. Beschrijf deze manier.

22 a. Schrijf de eerste acht termen van de rij op die hoort bij het voorschrift: $t_n = 1 + 3n$.

b. Is de rij van **a** een rekenkundige of een meetkundige rij?

c. Geef de recursieve formule bij deze rij.

d. Doe hetzelfde voor de rij met voorschrift: $t_n = 2 * 3^n$.

23 a. Maak directe formules voor de rijen bij de zakgeldvoorstellen. Controleer ze met behulp van de GR.

b. Ontwerp een algemene *directe* formule voor een rekenkundige rij met $t_0 = a$ en stapgrootte v. Welk type verband herken je in deze formule?

c. Doe hetzelfde voor een meetkundige rij met $t_0 = a$ en een vermenigvuldigingsfactor r. Welk type verband herken je in deze formule?

Een directe formule bij Fibonacci zoeken

Aan het begin van dit hoofdstuk heb je kennis gemaakt met de rij van Fibonacci. Deze rij kan worden beschreven met een recursieve formule. Het is behoorlijk veel werk om hiermee $F(100)$ te berekenen. Dat zou makkelijker zijn met een directe formule. Bestaat die ook voor deze rij en hoe ziet die er dan uit?
Uit de grafiek die je bij opgave 5b gemaakt hebt van de Fibonaccigetallen heb je misschien een vermoeden gekregen over het type 'groei' dat deze rij vertoont.

24 Maak of zoek een flink aantal Fibonaccigetallen. Ga na of er op den duur sprake is van een min of meer vaste toename of groeifactor. Zo ja, gebruik deze dan om een directe formule te maken die de rij van Fibonacci (in ieder geval voor hogere termen) zo goed mogelijk benadert. Probeer ook een uitspraak te doen over de nauwkeurigheid van je formule. Hierbij kan gebruik van de GR handig zijn.
Verwerk je bevindingen in een kort verslag.

TIP: de internetsite http://www.ee.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib/html bevat veel materiaal over Fibonacci-getallen.

Radioactiviteit

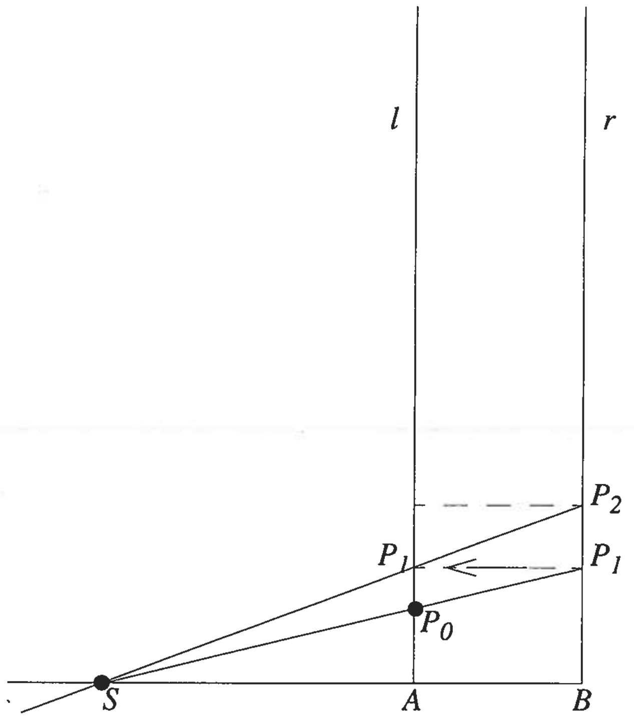
De radio-activiteit van lood neemt elke 22 jaar met de helft af. Daarom gebruiken natuurkundigen voor hun afscherming bij de allergevoeligste proeven het liefst antiek lood, uit oude waterleidingen bijvoorbeeld. Het lood van de zeebodem is voor hen een buitenkansje: 2000 jaar, dat zijn bijna honderd halfwaardetijden. Dat lood heeft in theorie dus nog maar 0.000000000000000000000000001 promille van de radio-activiteit van vandaag gewonnen lood. Bovendien is het al die tijd door het zeewater beschermd geweest tegen bronnen van extra radio-activiteit, stof uit Tsjernobyl bijvoorbeeld. Behalve geld krijgen de archeologen als dank voor hun hulp technische medewerking van de natuurkundigen: die zullen hun onderzoek van het lood ook gebruiken om erachter te komen of het allemaal uit dezelfde mijn komt.

25 Het artikel zegt dat de radioactiviteit van lood elke 22 jaar met de helft afneemt. Stel t_0 op 100 (procent) en laat n het aantal malen 22 jaar zijn dat sindsdien is verlopen.

a. Wat stelt t_3 voor? Bereken t_3.
b. Noteer de eerste 6 termen van de rij.
c. Wat stelt t_n voor?
d. Het lijkt erop dat de rij $t_0, t_1, t_2, \ldots$ een *meetkundige* rij is.Verklaar dit vanuit de situatie.
e. Geef een *recursieve* en een *directe* formule voor de rij.
f. Hoeveel procent radioactiviteit is er over na ongeveer een eeuw? Hoeveel is dat na 20 eeuwen?
g. De tekst geeft een benadering van de radioactiviteit die dat lood nu heeft. Is dat antwoord in overeenstemming met je voorgaande berekeningen?

Een groei-machine

Gebruik het volgende constructievoorschrift.
Op de linkerlijn l is de beginhoogte P_0 uitgezet.
Trek de lijn door S en P_0, deze snijdt lijn r in een punt, de hoogte daarvan is P_1.
Deze stap wordt telkens herhaald.
Om dat te kunnen doen moet je P_1 eerst verplaatsen van r naar l.
De hoogte wordt vanaf de grondpunten A en B gemeten.



26 a. Vervolg deze constructie tot P_5..
b. Maak een tabel van de hoogten. Ga door tot P_{10} en zet deze hoogten uit in een grafiek. Zet het rangnummer op de horizontale as.
c. Beschrijf de groei van de hoogte. Maak een formule voor de hoogte.
d. Laat met enige meetkundige kennis zien waarom bij deze constructie juist dit type groei hoort.

Samenvatting

Rijen getallen kun je vaak beschrijven met een eenduidig voorschrift dat vastlegt hoe je de rij kunt voortzetten.
Er zijn twee soorten voorschriften:
- *Recursieve*: de nieuwe term wordt berekend uit de voorgaande, bijvoorbeeld: $t_{n+1} = 4 + t_n$ met $t_0 = 1$
- *Directe*: uit het rangnummer van de term kun je direct de waarde van de term berekenen, bijvoorbeeld: $t_n = 4n$

Twee belangrijke rijen zijn de *rekenkundige rij* en de *meetkundige rij.*
Bij de rekenkundige rij wordt bij de voorgaande term steeds een vast getal opgeteld.
Bij de meetkundige rij wordt de voorgaande term steeds met een vast getal vermenigvuldigd.

27 $t_{n+1} = 2.5 * t_n$ is een recursief voorschrift.
- **a.** Waarom is dit voorschrift niet volledig?
- **b.** Neem $t_0 = 2$. Geef een directe formule voor deze rij. Controleer dit door enkele termen uit te rekenen.

28
- **a.** Welk type groei herken je in een meetkundige rij?
- **b.** Welk type groei herken je in een rekenkundige rij?
- **c.** De formules: $t_n = 4n$ en $y = 4x$ drukken eenzelfde soort verband uit. Toch is er een essentieel verschil. Welk?

29 Hoe maak je een meetkundige rij die niet toeneemt maar afneemt? Hoe doe je dat bij een rekenkundige rij?

Onderzoeksopdracht: De medicijnspiegel

Een voorlichter over het gebruik van medicijnen vertelt een verhaal met deze hoofdpunten:

- Van sommige medicijnen verdwijnt per dag 25% door de uitscheiding uit het menselijk lichaam.
- Een bepaald medicijn is pas effectief als een aangegeven peil is bereikt. Daarom duurt het een poosje voor de dagelijks ingenomen medicijnen echt werkzaam zijn.
- Sla geen dag over.
- Het kan zeer onverstandig zijn een overgeslagen dag de volgende dag te compenseren met een dubbele dosis.

N.B. De gegevens in dit verhaal zijn vereenvoudigd.

Onderzoek

- Maak enkele berekeningen voor het normale verloop van het 'peil'. Maak zelf benodigde aannamen en geef conclusies.
  Ga bijvoorbeeld eerst uit van een dagelijkse dosis van 1500 mg of 3 keer 500 mg.
- Geef in ieder geval formules voor het verloop van het peil en leg het verband met rijen.
- Zijn de gevolgen van overslaan werkelijk erg groot? Maakt het verschil wanneer dat overslaan plaatsvindt?
- Bekijk de consequenties van de genoemde compensatie met een dubbele dosis.
- Kan elk peil bereikt worden? Verklaar het antwoord.

Product

Schrijf een folder voor de patiënten waarin de antwoorden op bovenstaande vragen zijn verwerkt. Neem daarin in ieder geval een grafiek op met het verloop van de medicijnspiegel.

3: Verschilrijen

Om inzicht te krijgen in de verandering van een rij getallen is het vaak handig om naar de verschillen te kijken van opeenvolgende termen.

Zakgeld

In het vorige hoofdstuk konden je ouders kiezen uit twee voorstellen voor een zakgeld-regeling.

Voorstel 1

Je begint met één stuiver zakgeld. Elke week wordt je zakgeld verdubbeld. Dus de eerste week één stuiver, de tweede week twee stuivers, de derde week vier stuivers, enzovoort.

Voorstel 2

Je begint met f10,- zakgeld. Elke week wordt je zakgeld met f2,50 verhoogd. Dus de eerste week f10,-, de tweede week f12,50, de derde week f15,- enzovoort.

Je ouders zijn slimmer dan je dacht. Ze vertrouwen de voorstellen niet helemaal. Ze hebben dus nog steeds geen keuze gemaakt en willen eerst wel eens weten hoeveel er iedere week extra bij komt bij voorstel 1. Van voorstel 2 kunnen ze dat zo zien: dat is elke week *f*2,50 extra.

1 **a.** Maak een tabel bij voorstel 1. Zet in de eerste kolom weeknummers 1 tot en met 10, in de tweede kolom het zakgeld van die week, in de derde kolom het extra zakgeld dat er die week is bijgekomen.
b. Beschrijf het verloop van die toename.
c. Wanneer is deze toename per week de *f*2,50 grens gepasseerd?
d. Hoeveel weken zouden je ouders dit voorstel 1 kunnen volhouden?

Nog eens Fibonacci

Bij de rij van Fibonaccigetallen is een tabel gemaakt. In de meest rechtse kolom staan de verschillen van opeenvolgende getallen.

n	F_n	*verschillen*
1	1	0
2	1	1
3	2	1
4	3	2
5	5	3
6	8	

NB: De verschilkolom 'kijkt vooruit'. Het gaat om het verschil tussen de volgende term en de huidige.

2 **a.** Maak de tabel af tot en met de tiende term.
b. Wat valt je op aan de verschilrij? Heb je een verklaring?

verschillen nemen

Gegeven is de rekenkundige rij: 7, 15, 23, 31, 39, 47 .....
Bij deze rij kunnen we de rij van verschillen maken van opeenvolgende termen maken.
Deze 'verschilrij' staat onder de oorspronkelijke rij.

7		15		23		31		39		47	....
	8		8		8		8		8		......

Bij deze rekenkundige rij is het verschil telkens 8.

3 **a.** Schrijf de eerste tien termen op van de rij van machten van 2. Schrijf daaronder de rij van de verschillen van opeenvolgende termen.
b. Wat valt je op aan deze rij van verschillen?

notatie

De verschilrij is een nieuwe rij. De termen van die rij geven we aan met de letter v. De eerste term is het verschil van term 2 en term 1 van de oorspronkelijke rij. Dus in de tabel bij opdracht 2: $v_1 = F_2 - F_1$
De tweede verschilterm is term 3 min term 2 van de oorspronkelijke rij.
Dus $v_2 = F_3 - F_2$.
Enzovoorts. In het algemeen geldt: $v_n = F_{n+1} - F_n$

4 Schrijf deze laatste formule in gewone taal.

machten

De rij van de machten van twee met de directe formule $t_n = 2^n$ is wel de meest bekende meetkundige rij. In opdracht 1 heb je daarbij de verschilrij bekeken.

5 **a.** Bedenk een recursieve en een directe formule bij de verschilrij.
b. Maak nu een directe formule voor de verschilrij bij zakgeldregeling 1.

kwadraten

6 Ook de rij van kwadraten is geen onbekende. De directe formule is: $t_n = n^2$.
a. Maak van deze rij een tabel zoals in opdracht 1.
b. Welke directe formule past bij de verschilrij?

anders nummeren

De vorm van een directe formule voor een rij hangt af van de manier waarop je de rij hebt genummerd. Dat geldt ook voor verschilrijen.

n	$t_n = 2^n$	*verschilrij*
0	1	1
1	2	2
2	4	4
3	8	8
4	16	16
5	32	

7 **a.** De tabel begint met $n = 0$. De verschilrij 'kijkt weer vooruit', dat wil zeggen: de verschilterm is de volgende term min de huidige term.
Welke directe formule past hier bij de verschilrij?

b. Een verschilrij kan ook 'terug kijken', dat wil zeggen: de verschilterm is de huidige term min de vorige. Dus $v_1 = t_1 - t_0$, $v_2 = t_2 - t_1$ en zo verder.
Maak nu een tabel waarbij de verschilrij 'terugkijkt'.

c. Welke directe formule past nu bij v?

met de GR

8 Met de GR kun je snel de verschilrij bij een gegeven rij berekenen. Daarvoor zetten we de GR in de 'functie- mode' in plaats van de 'rij-mode'. De GR gebruikt dan wel de functie- notatie. Voor het rangnummer van de term gebruikt de GR de variabele X (in plaats van n). X krijgt dus de waarden 1, 2, 3, 4, ... of 0, 1, 2, 3, 4,... Voor de termen van de rijen gebruikt de GR de variabelen Y_1, Y_2 (in plaats van t en v).
Zet de GR allereerst op MODE FUNC.
Kies Y=
Typ: Y_1 = 2^X
Kies Y_2
Maak Y1 met de volgende toetsaanslagen:

VARS
Y-VARS
ENTER
1
ENTER

Maak nu de verschilrij met: $Y_2 = Y_1(X+1) - Y_1(X)$.
Om ervoor te zorgen dat X de waarden 1,2,3, ...krijgt, ga je naar TBLSET (instellen van de tabel):

TBLStart = 1
ΔTbl = 1 (de stapgrootte)

Ga nu naar TABLE.

a. In deze opzet kijkt de verschilrij vooruit. Hoe vind je dat in de formule voor de verschilrij terug?

b. Maak nu een verschilrij die 'terug kijkt'.

Onderzoek naar verschilrijen

9 De verschilrijen van de machten van 2 en van de kwadraten blijken interessante eigenschappen op te leveren. Hoe zit dat met andere rijen die afgeleid zijn van exponentiële functies? En hoe zit dat met rijen die afgeleid zijn van machtsfuncties?

a. Onderzoek de verschilrij bij de rij $t_n = 3^n$ door uit de regelmaat een directe formule af te leiden.
TIP: Probeer eerst een recursieve formule te maken en kijk terug naar hoofdstuk 1.
Gebruik de grafische rekenmachine bij je berekeningen.

b. Onderzoek de verschilrij van de derdemachten: $t_n = n^3$. Hoe gedraagt deze rij zich? Probeer weer uit de regelmaat een directe formule af te leiden.
Laat de grafische rekenmachine het werk doen!

c. Doe hetzelfde voor de rij van vierde machten: $t_n = n^4$.

d. Geef een vermoeden over de gedaante van de verschilrij van $t_n = n^{100}$. Het gaat niet om de preciese formule maar om wat voort soort rij de verschilrij is.

e. Doe hetzelfde voor de rij $t_n = 4^n$.

Handenschudden

Het blijft een merkwaardige gewoonte, maar we kunnen nog steeds niet zonder. Bij min of meer officiële gelegenheden schudden we elkaar de hand bij wijze van groet (of we zoenen, of we omhelzen elkaar). Bij een beetje grote bijeenkomst kan het aantal handenschuddingen toch aardig uit de hand gaan lopen.

10 a. Drie personen schudden elkaar voor een vergadering de hand. Hoeveel paren handen worden er geschud?

b. Een vierde persoon komt wat later binnen. Hij schudt de handen van de aanwezigen. Hoeveel handen moet hij schudden?

c. Hoeveel paren handen zijn er in totaal geschud bij vier personen?

d. Nummer 5 is een echte laatkomer. Ook zij schudt eerst alle aanwezigen de hand voor ze gaat zitten. Hoeveel handen schudt ze? Hoeveel paren handen zijn er dan in totaal geschud?

e. Maak de volgende tabel af (n is het aantal personen, H_n is het totaal aantal paren geschudde handen):

n	H_n
1	0
2	1
3	3
4	...
5	...
6	...

11 Voor het totaal aantal paren geschudde handen uit opdracht 10 geldt de formule:

$$H_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

a. Controleer de formule met je resultaten uit opdracht 10.

b. Voeg een kolom toe aan de tabel voor de verschilrij.

c. Wat voor type rij is de verschilrij? Geef recursieve en directe formules. Let op het nummer van de eerste term!

d. Wat stellen de getallen in deze verschilkolom voor in het handenschudverhaal?

e. Voeg nog een kolom toe met de verschillen van de verschilrij. Deze rij heet de rij van *tweede verschillen*. Wat valt je op?

f. Wat stelt deze rij voor in termen van het handenschudverhaal?

Van verschilrij naar oorspronkelijke rij

12 Uit de verschilrijen kun je veel informatie halen over de oorspronkelijke rij. Je ziet direct hoe rijen veranderen. Je ziet ook heel snel met wat voor soort rij je te maken hebt. Je kunt zelfs de oorspronkelijke rij terugvinden aan de hand van de verschilrij en een term uit de oorspronkelijke rij. Maak de volgende tabellen af en geef voor de rij t_n en de verschilrij telkens een passende formule.

n	t_n	eerste verschil
1	1	2
2	...	2
3	...	2
4	...	2
5	...	2
6	...	2

n	t_n	eerste verschil
1	1	1
2	...	2
3	...	3
4	...	4
5	...	5
6	...	6

n	t_n	eerste verschil
1	1	1
2	...	2
3	...	4
4	...	8
5	...	16
6	...	32

n	t_n	eerste verschil	tweede verschil
1	1	1	2
2	...	...	2
3	...	...	2
4	...	...	2
5	...	...	2
6	...	...	2

13 Maak de volgende beweringen af.

a. Als de verschilrij constant is, dan is de oorspronkelijke rij.....

b. Als de verschilrij van hetzelfde type is als de oorspronkelijke rij, dan is de oorspronkelijke rij.....

c. Als de verschilrij een rekenkundige rij is, dan is de oorspronkelijke rij.....

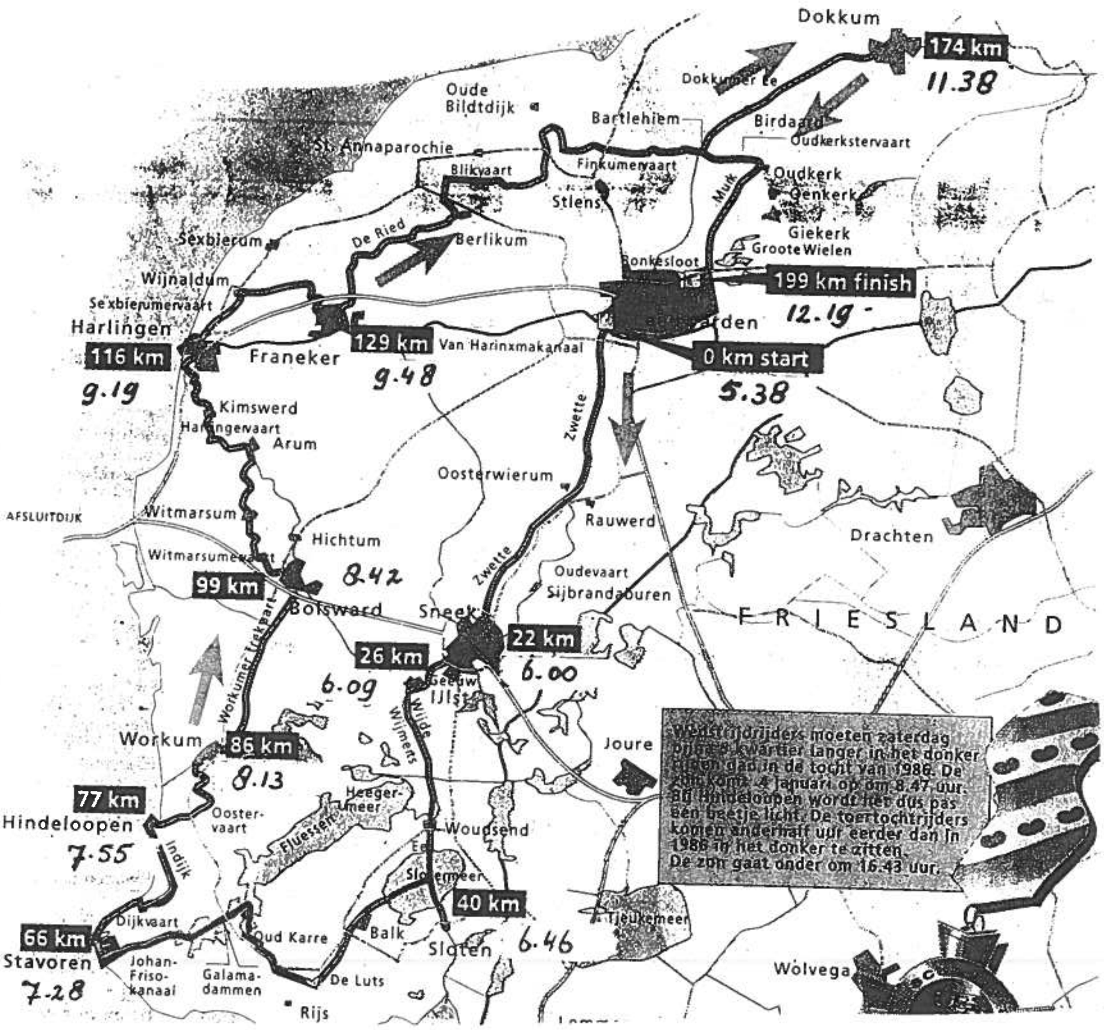
d. Als de rij van de tweede verschillen constant is, dan is de oorspronkelijke rij.....

rijen van gemiddelde verschillen

Tot nu toe hebben we steeds gewerkt met keurige rijen van getallen, met een duidelijke regelmaat. Er bestaan ook heel andere rijen van getallen die er veel onregelmatiger uitzien.

Hoe snel gingen ze?

De winter van 1996/1997 viel precies in de vakantieperiode rondom de kerst. De organisatie was zelfs zo perfect dat de Elfstedentocht op 4 januari, de laatste vrije dag, werd gehouden. Het vroor die zaterdag matig. Door de harde oostenwind werd het toch nog een pittige tocht. Van de 16 000 toerrijders moesten er zo'n 5 000 voortijdig de 200 kilometer lange ijspiste verlaten. Ondanks een trainingsperiode van tien jaar slaagden de wedstrijdrijders er niet in om een nieuw record te vestigen.



Op de kaart zie je de doorkomsttijden van de kopgroep bij een stempelplaats. Je kunt daar niet direct uit aflezen hoe snel er werd geschaatst. Dat hangt natuurlijk sterk af van de afstand tussen twee steden en de andere omstandigheden tussen die steden.

14 a. Zet de gegevens in een tabel. Zet in de eerste kolom de plaats, in de tweede kolom de stempeltijd en in de derde kolom de afstand tot Leeuwarden. Naast deze kolommen maak je als vierde kolom de tijd tussen twee steden en als vijfde kolom de afstand tussen twee steden.

b. Maak nu een zesde kolom van de gemiddelde snelheid tussen twee steden.

c. Tussen welke steden lag de gemiddelde snelheid het hoogste? Hoe hoog was die snelheid?

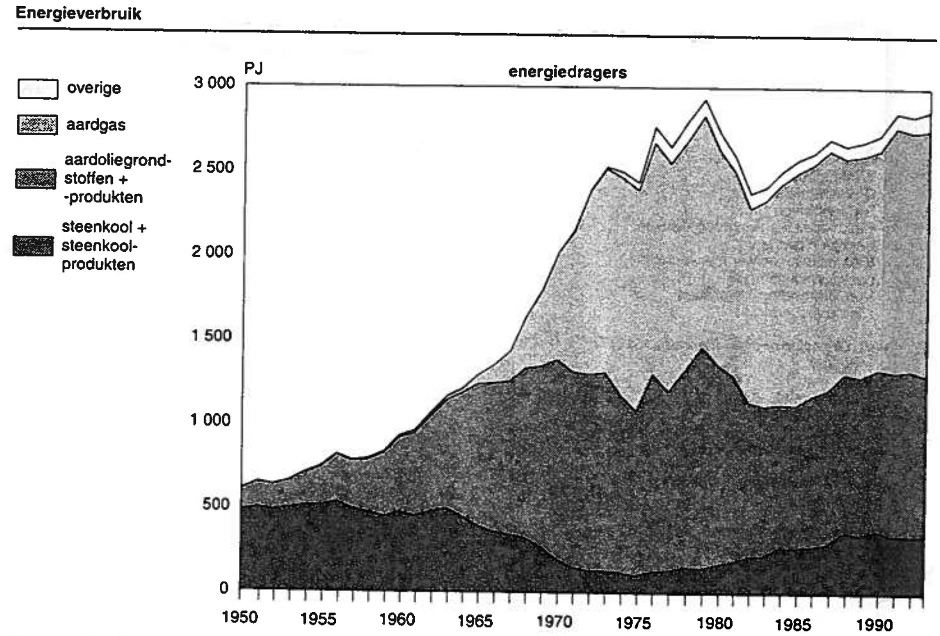
d. Wat was de laagste gemiddelde snelheid en waar werd die gereden?

e. Wat was de gemiddelde snelheid over de hele route gerekend?

f. Maak een grafiek van de gemiddelde snelheden tussen de steden. Teken in de grafiek ook de gemiddelde snelheid over de hele route. Geef aan de hand van deze grafiek commentaar op het verloop van de wedstrijd.

Energie-verbruik

In de grafiek zie je een overzicht van het energieverbruik in Nederland tussen 1950 en 1995 (bron: Statistisch Jaarboek 1995).



15 a. Bedenk een krantenkop bij deze grafiek.

b. Om gefundeerde conclusies te kunnen trekken gaan we kijken naar de cijfers. Maak een tabel met daarin voor iedere vijf jaar het totale energieverbruik. Voeg vervolgens een kolom toe met de gemiddelde toe- of afname per jaar.

c. Wanneer was de toename het grootst? Wanneer het laagst?

d. Bekijk het tijdvak 1975-1980. Geeft de gemiddelde toe- of afname hetzelfde beeld als de oorspronkelijke grafiek? Verklaar dat.

e. Wat kun je zeggen over de toename in de laatste 10 jaar? Hoe vind je dat terug in de grafiek? Durf je op basis hiervan een voorspelling voor de toekomst te doen?

f. Waarom kijkt men in deze situatie liever naar de gemiddelden in plaats van naar de veranderingen zelf?

Samenvatting

Maak een samenvatting van dit hoofdstuk..
Zorg ervoor dat in ieder geval de antwoorden op de volgende vragen in je samenvatting zijn verwerkt.
Geef korte en duidelijke omschrijvingen met bijbehorende formules.

- Hoe bereken je een verschilrij bij een gegeven rij getallen?
- Waarom kan het handig zijn om bij een rij de verschilrij te bepalen
- Hoe bereken je de rij van gemiddelde verschillen bij een gegeven rij? Waarom bereken je de gemiddelde verschillen in plaats van de gewone verschillen?
- Hoe kun je een rij terugvinden als je de rij van de tweede verschillen weet? Geef een voorbeeld.
- Geef een praktische toepassing van de verschilrij van een rij getallen.

Onderzoeks-opdracht

Werelduurrecord wielrennen is geen magie, het is onderontwikkeld

Chronologie werelduurrecord

35,325 km: Desgrange (Fra)	11-05-1B93	Parijs
38,220 km: Dubois (Fra)	31-10-1894	Parijs
39,240 km: Van den Eynde (Bel)	30-07-1B97	Parijs
40,781 km: Hamilton (VSt)	09-07-189B	Denver
41,110 km: Petit-Breton (Fra)	24-0B-1905	Parijs
41,520 km: Berthet (Fra)	20-06-1907	Parijs
42,360 km: Egg (Zwi)	22-08-1912	Parijs
42,741 km: Berthet	07-08-1913	Parijs
43,525 km: Egg	21-08-1913	Parijs
43,775 km: Berthet	20-09-1913	Parijs
44,247 km: Egg	18-06-1912	Parijs
44,5BB km: Van Hout (Ned)	25-0B-1933	Roermond
44,777 km: Richard (Fra)	29-08-1933	St-Truiden
45,067 km: Olmo (Ita)	31-10-1935	Milaan
45,375 km: Richard	14-10-1936	Milaan
45,535 km: Slaats (Ned)	29-09-1937	Milaan
45,817 km: Archambaud (Fra)	03-11-1937	Milaan
45,848 km: Coppi (Ita)	07-11-1942	Milaan
46,159 km: Anquetil (Fra)	29-06-1956	Milaan
46,393 km: Baldini (Ita)	19-09-1956	Milaan
46,923 km: Riviere (Fra)	1B-09-1957	Milaan
47,346 km: Riviere	23-0B-195B	Milaan
48,093 km: Bracke (Bel)	30-10-1967	Rome
48,653 km: Ritter (Den)	10-10-1968	Mexico
49,431 km: Merckx (Bel)	25-10-1972	Mexico
50,808 km: Moser (Ita)	19-01-19B4	Mexico
51,151 km: Moser	23-01-1984	Mexico
51,596 km: Obree (GBr)	17-07-1993	Hamar
52,270 km: Boardman (GBr)	23-07-1993	Bordeaux
52,713 km: Obree	27-04-1994	Bordeaux
53,040 km: Indurain (Spa)	02-09-1994	Bordeaux
53,832 km: Rominger (Zwi)	22-10-1994	Bordeaux
55,291 km: Rominger	05-11-1994	Bordeaux
56,625 km: Boardman	06-09-1996	Manchester

opdracht

Hoe denk je dat het werelduurrecord zich in de toekomst zal ontwikkelen?
Geef een beargumenteerde voorspelling. Je kunt daarbij de volgende vragen gebruiken:

- Wat kun je zeggen over de ontwikkeling van het werelduurrecord?
- In welke periode is het record het meest verbeterd? Motiveer je antwoord.
- Op welke manier kun je de ontwikkeling van het record duidelijker maken?
- Kies acht opeenvolgende records in een volgens jou interessante periode. Hoe kun je de gemiddelde verschillen gebruiken om het verloop van het record in die periode te beschrijven.

Verwerk je resultaten in een kort krantenartikel over het werelduurrecord.

4: Somrijen

In het voorgaande hebben we bij een bestaande rij een nieuwe rij gemaakt van de verschillen van opeenvolgende termen.
In het volgende gaan we een nieuwe rij maken door opeenvolgende termen bij elkaar op te tellen.

Neerslag
In het Groningse dorp Lettelbert was het najaar van 1996 buitengewoon nat. Voor de maand november waren de regencijfers als volgt:

dag	neerslag in mm	dag	neerslag in mm
1	9	16	3
2	6	17	2
3	1	18	9
4	9	19	5
5	5	20	8
6	4	21	0
7	3	22	8
8	7	23	0
9	2	24	3
10	0	25	0
11	2	26	1
12	0	27	0
13	4	28	6
14	8	29	4
15	5	30	2

Eén dag regen of geen regen zegt nog niet zoveel. Voor een maandoverzicht gaat het om de totalen. Het is gebruikelijk om dat ook per dag bij te houden. Je telt dan de hoeveelheid neerslag bij elkaar die tot en met die dag is gevallen.

1 **a.** Neem de tabel over en voeg er een kolom 'totalen' aan toe. In die kolom hou je bij hoeveel er tot die dag gevallen is.
b. Maak van de kolom 'totalen' een grafiek. Hoe kun je in de grafiek zien wat de

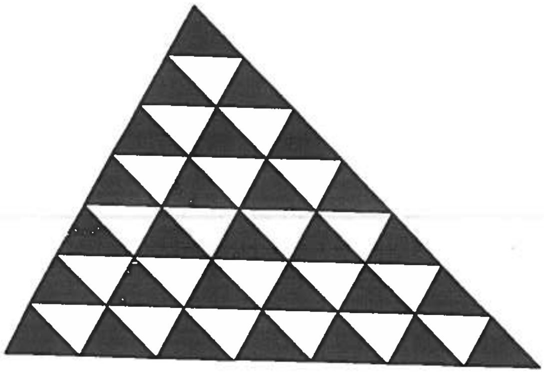
natste dagen waren in november?

c. Lees uit de grafiek af hoeveel regen er viel in de week van 10 tot en met 16 november.

d. De maand december had een heel ander neerslagpatroon. De eerste tien dagen van de maand waren redelijk droog. Er viel gemiddeld een halve millimeter per dag. Daarna werd het drie dagen achtereen nogal vochtig met een totaal van 15 millimeter. De week daarop was extreem droog: geen neerslag van betekenis. Gedurende de kerstvakantie was het wisselvallig, af en toe een droge dag gevolgd door een regenachtige dag.
Maak een schets van de grafiek van de totale neerslag over de maand december.

Driehoeken leggen

Je ziet steeds vaker gebouwen met scherpe hoeken. Als je tegels op de vloer wilt hebben, kan dat een probleem opleveren. Je kunt dat oplossen door driehoekige tegels te gebruiken. Hieronder zie je een stuk van een vloer met zwarte en witte banen van zulke tegels.
Baan 1 is de bovenste zwarte tegel.
Baan 2 bestaat uit een zwarte, een witte en een zwarte tegel.
Daaronder ligt de derde baan met 3 zwarte en 2 witte tegels.



	$Z(n)$	$W(n)$	$T(n)$	$S(n)$
baan 1	1	0	1	1
baan 2	2	1	3	4
baan 3				
baan 4				
baan 5				
baan 6				
baan 7				

In de tabel staan de aantallen witte en zwarte tegels.
$Z(n)$ = het aantal zwarte tegels in baan n
$W(n)$ = het aantal witte tegels in baan n
$T(n)$= het totale aantal tegels in baan n
$S(n)$= de som van het totale aantal tegels tot en met baan n

2 **a.** Als voorbeeld zijn de getallen voor de eerste twee banen ingevuld. Vul ook de andere rijen van de tabel in.
b. Vul de tabel aan met de banen 8, 9 en 10.
c. Bedenk *recursieve* formules voor $Z(n)$, $W(n)$ en $T(n)$
d. Bedenk *directe* formules voor $Z(n)$, $W(n)$ en $T(n)$
e. Bedenk een *directe* formule voor $S(n)$
f. Wat voor rijen zijn Z, W, T en S?

Fibonacci opgeteld

Bij de rij van Fibonacci kun je ook de rij van totalen maken.
Onder de rij staan telkens de totalen tot en met de term erboven. Dus onder $n = 7$ staat: $F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_7$
Deze rij is aangegeven met s_n, van: *som tot en met nummer n*

n	1	2	3	4	5	6	7	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	...
s_n	1	2	4	7	12	20	33	...

3 **a.** Maak de rijen af tot en met de tiende term en bereken zo s_{10}.
b. Als de rij van Fibonacci de groei van een konijnenpopulatie voorstelt, wat stelt dan de rij van totalen voor?
c. Zet de waarden van rij F_n en rij s_n uit in één grafiek. Wat kun je zeggen over de toename van beide rijen? Wat betekent dat?

somrij

De rij van somgetallen is weer een nieuwe rij: *de somrij.* Vaak wordt daarvoor de letter s gebruikt.
Voor de termen s_n uit de somrij gelden de volgende formules:

$$s_1 = t_1$$
$$s_2 = t_1 + t_2$$
$$s_3 = t_1 + t_2 + t_3$$

4 Schrijf zelf de formules voor s_4 en s_5.

de som van rekenkundige rijen

Huurverhoging

De huur van een woning bedraagt nu *f* 10.000 per jaar.
Jaarlijks wordt de huur met fl 500 verhoogd.
Hoeveel huur moet er in 6 jaar in totaal worden betaald?

5 **a.** Maak bovenstaande som eerst als een gewone rekensom.
b. Maak nu een tabel en bereken daarmee de totaal betaalde huur na zes jaar.

De jonge Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) wordt één van de grootste wiskundigen van onze westerse cultuur genoemd. Over hem gaat het verhaal dat hij als tienjarige al buitengewoon slim was. Eens moest hij als strafwerk de getallen 1 tot en met 100 bij elkaar optellen.
Eerst schreef hij het eerste en laatste stuk van de rij op:

1 2 3 4 5 .... 98 99 100

Daaronder schreef hij de rij in omgekeerde volgorde:

1	2	3	4	5	....	98	99	100
100	99	98	97	96	.....	3	2	1

Een streep eronder en optellen maar:

1	2	3	4	5	....	98	99	100
100	99	98	97	96	.....	3	2	1
101	101	101	101	101	.....	101	101	101

Omdat er 100 termen staan, is het totaal 100 x 101 = 10100.
Alle getallen zijn echter dubbel geteld, dus nam hij de helft:

1 + 2 + 3 + 4 + ...99 + 100 = 10100/2 = 5050

een formule voor de somrij

6 **a.** Bereken zo de som van de eerste 200 natuurlijke getallen.
b. Maak een formule voor de som van de eerste *n* natuurlijke getallen.
c. Controleer je formule voor een aantal eenvoudige gevallen.

Een oud probleem

De theorie van rekenkundige en meetkundige rijen is al oud. Hier een vrije vertaling van een probleem van Bhascara A'charya (India 1114-1185).

> Op een expeditie om de olifanten van zijn vijand af te nemen, marcheerde een koning twee yojánas op de eerste dag. Zeg, slimme rekenaar, met welke gelijke toenamen per dag hij voort toog, als je weet dat hij de stad van zijn vijanden bereikte, op een afstand van tachtig yojánas in een week.

7 Van een rekenkundige rij is de eerste term 5 en de tiende term 23. Schrijf de eerste 10 termen van de rij op.

8 **a.** Als de eerste en de laatste term en het aantal termen bekend is, dan staat die rekenkundige rij vast. Hoe bereken je die rij? Formuleer een algemene regel.
TIP: controleer je regel door er een voorbeeld mee te maken.
b. Los nu het probleem van Bhascara A'charya op.

de somformule van een rekenkundige rij

9 Elke rekenkundige rij wordt bepaald door de eerste term, de laatste term en het aantal termen. De somrij wordt daar dan ook door bepaald. Bepaal zo een directe formule voor de somrij van een rekenkundige rij.
TIPS: - Je kunt met een getallenvoorbeeld beginnen

- Schrijf de termen van de somrij helemaal uit
- Gebruik de methode van Gauss.

de som van meetkundige rijen

Nog eens huurverhoging

Het is niet gebruikelijk om de huur van een woning jaarlijks met een vast bedrag te verhogen. Meestal laat men de huurverhoging gelijke pas maken met de inflatie.

10 Ga weer uit van een jaarlijkse huur van *f* 10.000. Stel de inflatie voor de komende 10 jaar op 2%. Dat betekent dat de huur jaarlijks met 2% wordt verhoogd. Bereken hiermee de totale huur die in die 10 jaar wordt betaald.

Een spaarregeling

Bij elke jaarwisseling wordt een bedrag van *f* 1.000 op een spaarrekening gestort. Aan het eind van het jaar wordt het tegoed verhoogd met 5% rente. Hoe verloopt het tegoed? Een berekening kan er zo uitzien:

0	1	2	3	4
1000	1000 x 1.05	1000 x 1.05^2	1000 x 1.05^3	1000 x 1.05^4
	1000	1000 x 1.05	1000 x 1.05^2	1000 x 1.05^3
		1000	1000 x 1.05	1000 x 1.05^2
			1000	1000 x 1.05
				1000

11 a. Bekijk de tabel en leg uit wat er tot nu toe is gedaan.

b. De eerste regel is een deel van de meetkundige rij $t_n = 1000 \times 1.05^n$, namelijk t_0, t_1, t_2, t_3, t_4.
Waarom is het handig om hier met t_0 in plaats van met t_1 te beginnen?

c. Door de jaarkolommen op te tellen, ontstaat de somrij

$$s_0 = t_0$$
$$s_1 = t_0 + t_1$$
$$s_2 = t_0 + t_1 + t_2$$
$$s_3 = t_0 + t_1 + t_2 + t_3$$
$$s_4 = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$

Controleer dat en bereken het resultaat.

d. Wat stelt deze somrij voor?

een somformule voor meetkundige rijen

12 In de voorgaande opgaven is de somrij van een meetkundige rij aan de orde geweest. Aan de hand van de eenvoudige en beroemde rij van machten van 2 kun je proberen een formule voor de bijbehorende somrij te vinden.

a. Maak een tabel van tenminste de eerste acht machten van 2.

b. Vul de tabel aan met de somkolom als tweede kolom.

c. Zoek een passende *directe* formule bij deze kolom.

Voor de somrij van een machtrij bestaat een handige afleiding.
Stel de machtrij heeft grondtal r.

n	t_n	s_n
0	1	1
1	r	$1 + r$
2	r^2	$1 + r + r^2$
3	r^3	...
4	...	...

13 a. Vul de derde en vierde regel van de tabel helemaal in.

b. Laat zien dat $s_{n+1} = s_n + r^n$

c. Laat zien dat $s_{n+1} = r \cdot s_n + 1$

d. Combineer de formules bij **b.** en **c.** en herschrijf het resultaat in de vorm

$$s_n = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

e. Controleer de formule voor $r = 2$, $r = 3$ en $r = 1{,}05$.

Samenvatting

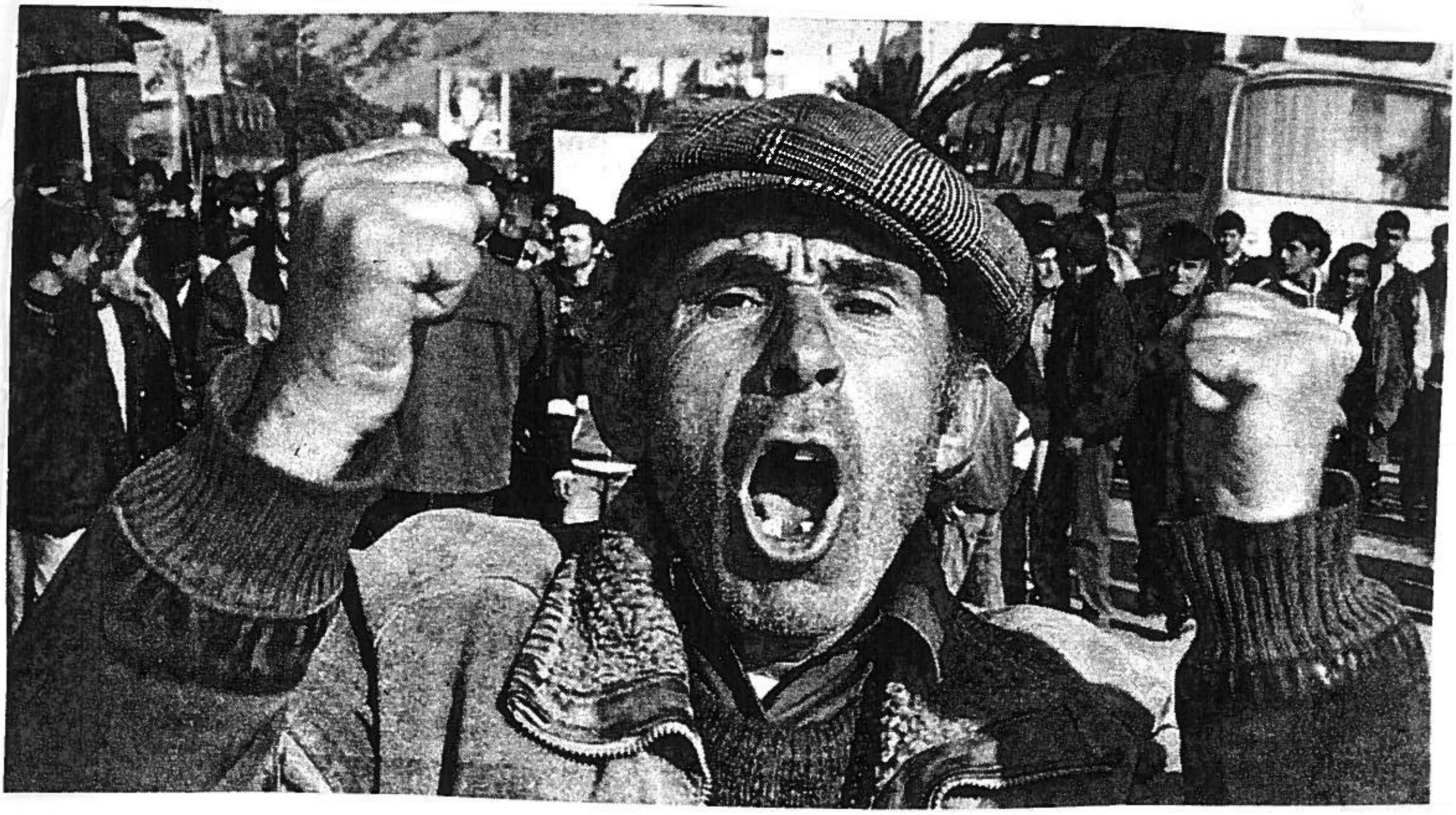
Maak een samenvatting van dit hoofdstuk.
Zorg ervoor dat in ieder geval de antwoorden op de volgende vragen in je samenvatting zijn verwerkt.
Geef korte en duidelijke omschrijvingen met bijbehorende formules.

- Hoe bereken je een somrij bij een gegeven rij getallen?
- Geef een praktische toepassing van de somrij van een rij getallen.
- Hoe bereken je de somrij bij een rekenkundige rij?
- Hoe bij een meetkundige rij?

Onderzoeksopdracht: Het piramidespel

In Albanië is de totale paniek uitgebroken. Veel inwoners hebben hun hele spaargeld belegd in een piramidespel. Naar schatting gaat het in totaal om twee miljard dollar. Ter vergelijking: het bruto nationaal product (dat is het totale inkomen van de gehele bevolking) van Albanië bedraagt 2,4 miljard dollar. Zie bijgevoegd artikel uit de NRC van 14 februari 1997 (bijlage 1), het ANP-bericht van 21 september 1996 (bijlage 2) en het artikel uit de NRC van 7 maart 1996 (bijlage 3).

Bedenk zelf een eenvoudige versie van het piramidespel.
Schrijf een pamflet waarin je voor buitenstaanders aan de hand van je voorbeeld laat zien wat er allemaal mis kan gaan.



Bijlage 1

NRC-HANDELSBLAD 14 februari 1997

Met jovialiteit redt Berisha het niet meer

Door onze correspondent
PETER TER HORST

BOEDAPEST, 14 FEBR. Met harde hand en onhoudbare beloften wilde president Sali Berisha de crisis in Albanië over de ondergang van dubieuze investeringsfondsen bedwingen. Vier doden en tientallen gewonden later is ook deze Albanese gok mislukt. Alleen een demonstratieverbod in Tirana en het naar goed Albanees politiegebruik hard inrammen op oppositieleiders hebben voorlopig kunnen voorkomen dat de massale onlusten in de zuidelijke havenstad Vlorë zich hebben verspreid naar andere steden.

De politieke schade heeft zich wel uitgebreid. De demonstranten die dagelijks bij tienduizenden in Vlorë de straat opgaan, eisen niet alleen hun geld terug, maar ook het aftreden van „de dief" Berisha. Ook binnen Berisha's Democratische Partij, die negentig procent van de zetels in het parlement heeft, neemt het verzet tegen de eigen regering toe. Premier Aleksander Meksi kreeg van zijn partijgenoten geen toestemming om de noodtoestand in Vlorë af te kondigen. Mocht Berisha na de frauduleuze verkiezingen van vorig jaar hebben gehoopt op herstel van enig internationaal aanzien, dan is het piramide-schandaal zijn grote ontnuchtering. De beelden van de oproerpolitie die stenen gooit naar demonstranten versterken eerder het imago van een bananenrepubliek op de Balkan.

Sinds het bankroet van het eerste piramidefonds in november heeft Berisha geprobeerd met zijn joviale zelfverzekerdheid de Albanezen kalm te houden. Een uitwasje van de vrije markt, meer was het niet. De spaarders die hun huis, boerderij en koeien hadden verkocht om te profiteren van de woekerrentes van de fondsen, zouden hun geld volgens de president „tot de laatste cent" terugkrijgen. Het was de tweede illusie die hij het volk voorhield. De eerste — het jarenlang toestaan van de piramidefondsen, waardoor Albanezen gingen geloven dat het financieel wel goed zat — was op een ramp uitgelopen, reden waarom het volk Berisha niet meer gelooft.

De beleggers in de piramides Populli en Xhaferri hebben slechts 52,5 tot 60 procent van hun inleg, zonder de beloofde rente, teruggekregen: samen de driehonderd miljoen dollar aan tegoeden waarop de regering beslag had weten te leggen. Van de geschatte inleg van vijfhonderd miljoen dollar in het piramidefonds Gjallica, waarin vooral de inwoners van Vlorë en omstreken hun geld hadden belegd, is echter nauwelijks iets teruggevonden. Gjallica heeft een paar 'bovengrondse' investeringen gedaan, in benzinestations, een hotel en een tandheelkundige kliniek in Tirana, maar de verkoop ervan zal de gedupeerden nauwelijks helpen.

De inwoners van Vlorë weten dat en wentelen woedend hun financieel ongeluk af op de regering die hen nooit waarschuwde. Introspectie is niet het sterkst ontwikkelde facet van de Albanese volksaard. Zelden zal een Albanese

NIEUWSANALYSE

spaarder toegeven dat het piramidedebâcle ook een beetje zijn eigen schuld is. Wie meespeelt in het casino gaat nu eenmaal vaak zonder fiches naar de uitgang. Voor een deel is het onwetendheid, maar lang niet alle deelnemers aan de piramidefondsen zijn ongeletterde slachtoffers die het kapitalisme slecht begrepen. Dat de regering nu de schuld krijgt lijkt vooral een uitvloeisel van de totalitaire staat die van de Albanezen afwachtende burgers heeft gemaakt: al het onheil komt van boven, en boven hoort vervolgens ook voor de oplossing te zorgen. Blijft die uit, of valt zij tegen, dan is Albanië een licht ontvlambaar land.

Kan de woede van de „linkse terroristen" van Vlorë, zoals de regering de demonstranten heeft genoemd, overslaan naar Tirana?

Bijlage 2

ANP bericht 21 september 1996

Deelnemers piramidespel zijn hun geld kwijt

AMSTERDAm (ANP) - Ongeveer 65.000 betaalcheques van het opgeheven piramidespel van de stichting Coin Liberté zijn in handen gevallen van criminelen. De cheques vertegenwoordigen een totale waarde van twintig miljoen gulden. De criminelen hebben al enkele honderden waardepapieren van de nietsvermoedende deelnemers aan het spel verzilverd.

Op het hoogtepunt van het succes namen 100.000 mensen deel aan het piramidespel. Bij dit spel incasseren de deelnemers een veelvoud van hun inleg als ze voldoende nieuwe spelers inbrengen. Ze hadden ieder twee ondertekende cheques ter waarde van driehonderd gulden elk bij de stichting in bewaring gegeven. De waardepapieren zouden later 4.800 gulden waard zijn. De stichting zou dit bedrag in cheques uitkeren.

Enkele jaren geleden startte justitie een onderzoek naar het spel. De rechtbank in Utrecht bepaalde dit jaar dat het piramidespel geen verboden kansspel is. Omdat door alle publiciteit duizenden deelnemers zich al hadden teruggetrokken, besloot de stichting het spel op te heffen.

Coin Liberté belastte een administratiekantoor in het Noord-Hollandse Bergen met de afwikkeling van de zaak. Dit kantoor kreeg daarvoor de 65.000 cheques die de stichting nog in beheer had. Deze waardepapieren en de volledige deelnemerslijst van het spel zijn in augustus gestolen uit een garage in Almere en een woonhuis in Alkmaar. Aanhoudingen zijn tot dusver niet verricht. De politie onderzoekt de zaak nog en wil daarom geen mededelingen doen.

De stichting Bevordering Chequeverkeer heeft inmiddels alle banken in binnen- en buitenland gewaarschuwd. Inmiddels zijn al zo.n driehonderd cheques van de rekeningen van de deelnemers afgeschreven. Volgens een woordvoerder van de Nederlandse Vereniging van Banken is er aan het verzilveren van de volledig ingevulde en ondertekende waardepapieren niets te doen en zijn de gedupeerden hun geld kwijt. De banken onderzoeken nog of ze deze mensen schadeloos kunnen stellen.

Bijlage 3

TEKST NRC-HANDELSBLAD (1996), 7 maart:
WINST PIRAMIDESPEL BLIJFT EEN GOK
(Ingekorte tekst)

HET PIRAMIDESPEL: VOLKSVERLAKKERIJ OF GEMUNTE VRIJHEID

Inleiding
Iedereen die rijk wil worden, kan dat ook worden door mee te doen aan ons spel. Dit is de boodschap van de organisatoren van piramidespelen zoals Coin Liberté, Top Stairs en Titan, om maar de bekendste te noemen. Deelnemers die in de prijzen vallen, willen dit ook graag getuigen. Een deelnemer van Coin Liberté, (gemunte vrijheid): "Ik denk dat ik binnen twee maanden aan de 100.000 gulden kom. Ik heb mijn baan opgezegd. Mijn vrije tijd wordt nu gesubsidieerd door het piramidespel". Demagogie wordt niet geschuwd. Een voorlichter van Top Stairs: "Broem, broem daar kom jij aan met je nieuwe auto. O, wat zal de buurvrouw opkijken achter de gordijnen". Helaas, zoals altijd in het leven, is de gemunte vrijheid slechts weggelegd voor enkelingen en betalen vele anderen de prijs. En er kan rustig vanuit gegaan worden dat naarmate het spel meer geheimzinnig in besloten kring gespeeld wordt er in ieder geval één partij is die er echt wel bij vaart: de organisatoren.
De officier van justitie bij de rechtbank in Utrecht vatte zijn oordeel kort en krachtig samen: "Volksverlakkerij". Hij trachtte dit soort praktijken tegen te gaan door de organisator van één van deze spelen, Coin Liberté, voor de rechter te dagen vanwege overtreding van de Wet op de Kansspelen (WKS). Een spel dat onder de werking van de WKS valt, heet een kansspel. Voor zo'n spel is een vergunning nodig.
Die geeft de overheid alleen aan zichzelf en daarover beschikt Coin Liberté dus niet. Het thema bij de rechtszitting in Utrecht was dan ook: is het piramidespel een kansspel of niet? Inmiddels heeft de rechtbank hierover een uitspraak gedaan die nogal wat opschudding veroorzaakt heeft.

De spelregels van Coin Liberté
Het spel laat zich omschrijven als een verzameling van individuele piramiden die alle onderdeel zijn van één grote master-piramide. Iedere piramide heeft in totaal 31 plaatsen voor deelnemers: 16 op de onderste blauwe balk, 8 op de groene balk daarboven, 4 op de gele balk daarboven, 2 op de oranje balk daarboven en 1 op de rode balk bovenaan (de toppositie). Bij inschrijving begint een deelnemer altijd op de blauwe balk. Hij schrijft één cheque van *f* 300,- uit op naam van de persoon in de groene balk direct boven zich (borgcheque) en één cheque van *f* 300,- op naam van de persoon in de toppositie (topcheque). Op het moment dat de gehele blauwe balk gevuld is, gebeurt het volgen- de. De speler aan de top krijgt *f* 4800,- door het innen van de op hem uitgeschreven 16 topcheques (hij "topt"), hij betaalt de waarde van 1 cheque = *f* 300,- aan de organisatie en verlaat de piramide. Deze splitst zich dan in tweeën: de twee oranje bereiken de rode toppositie, elk in één van beide piramiden. De twee gele onder een oranje liggende positie worden zelf oranje, groen wordt geel, blauw wordt groen, en beide nieuwe piramiden worden elk weer tot 31 plaatsen aangevuld met 16 nieuwe lege blauwe posities. Een speler in de nieuwe rode positie krijgt de op hem uitgeschreven 2 borgcheques uitgekeerd. Voorts wordt nagegaan of hij in de oude

piramide wel 2 blauwe inschrijvers heeft ingebracht (anders moet hij de piramide direct verlaten en schuiven de onderliggende posities door). Door deze structuur van splitsen, ontstaan een groot aantal piramiden die allemaal als onderdeel zijn te beschouwen van één grote master-piramide: de boekhouding van de organisatie. Een deelnemer mag zich vaker inschrijven maar hooguit 5 maal in dezelfde piramide.

Hoe ontwikkelt zich het spel in de tijd en daarmee het spelresultaat van de grote meerderheid der spelers?

Door de duidelijke structuur van het spel kan daarover met weinig informatie al veel gezegd worden. Iedere top doet het aantal lopende piramiden met één vermeerderen. Het aantal lopende piramiden op een bepaald moment is daarom altijd één meer dan het tot dat moment totaal aantal lopende piramiden (het aantal tussentijds opgeheven piramiden is volstrekt verwaarloosbaar). Tegenover iedere top staan dus minstens 15 lopende inschrijvingen (de niet-blauwe) en hoogstens 30 (inclusief maximaal 15 blauwe). Het percentage van de inschrijvingen dat getopt heeft, ligt dus op ieder moment tussen 100/30≈ 3% en 100/16≈ 6%.

Wat heeft dit voor consequenties? Als het zo zou zijn dat iedere deelnemer in ieder geval wacht met een nieuwe inschrijving tot zijn vorige getopt heeft, dan is het evident dat het spel na verloop van tijd stopt. Immers, voor iedere top zijn 15 nieuwe inschrijvingen nodig. Hiervan wordt er maar hoogstens 1 opgebracht door degene die net getopt heeft en daarom minstens 14 door nieuwe deelnemers. De totale markt van potentiële deelnemers is echter eindig. Op de lange duur ontstaat dus de situatie dat geen nieuwe inschrijvingen meer gevonden kunnen worden omdat er geen potentiële deelnemers meer zijn. Er gebeurt dan niets meer ofwel het spel stopt. Maken we dan de balans op, dan zien we dat iedere niet voltooide piramide minstens 14 deelnemers telt die nog nooit getopt hebben. Het percentage van de deelnemers dat getopt heeft, is dan dus hoogstens 100/15≈ 7%.

In de praktijk is het herinschrijvingspatroon ingewikkelder. Zo zijn er deelnemers die een zgn. doorlopende piramide maken door op een bepaalde manier 5 maal in dezelfde piramide in te schrijven; Vervolgens schrijven ze dan alleen opnieuw in als ze toppen. Daarnaast zijn er ook deelnemers die na een top niet opnieuw inschrijven. Om de gedachten te bepalen: het gemiddeld aantal inschrijvingen over alle tot nu ingeschreven deelnemers is ruwweg 2. De afloop van het spel zal niet veel anders zijn dan als hierboven geschetst. Toppers besteden slechts een beperkt gedeelte van de winst aan herinschrijven. Daarom zullen er steeds nieuwe deelnemers nodig zijn en die zijn er niet omdat het aantal potentiële deelnemers eindig is. Het spel zal eindigen door inactiviteit. De ruwe schatting van 7% van de deelnemers die topt, moet misschien iets herzien worden. Alleen een meer nauwkeurig statistisch onderzoek kan hierover uitsluitsel geven. We zouden wel zeer verbaasd zijn als dit percentage boven de 50% zou liggen.
Daarom durven we te stellen dat de grote meerderheid der deelnemers niet topt.

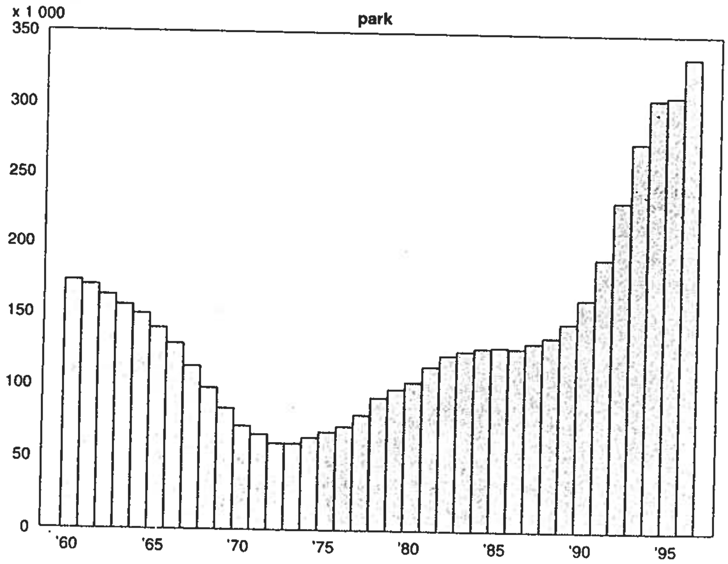
Prof.dr. B.B. van der Genugten
Hoogleraar kansrekening
en statistiek KUB

Dr. P. Borm
Universitair docent
speltheorie KUB

5: Toename en afname nader bekeken

Motorfietsen

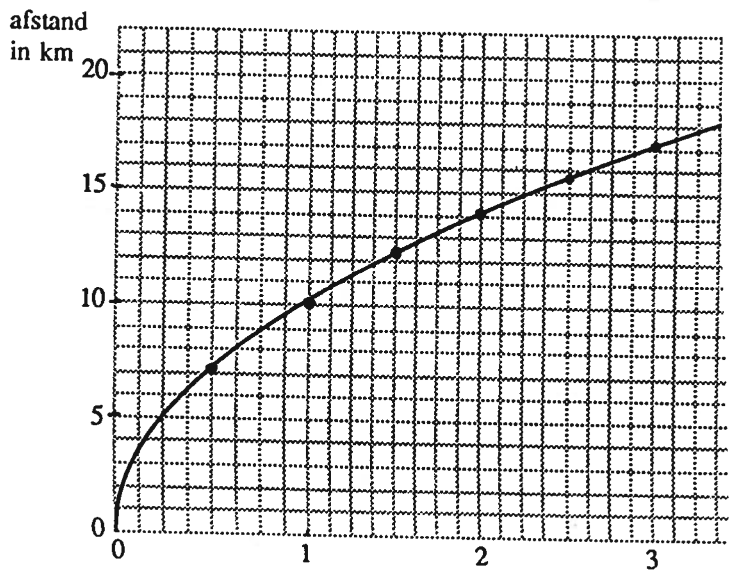
Motorfietsen zijn in de mode. In de grafiek zie je dat het aantal motorfietsen in Nederland in de laatste tien jaar fors is toegenomen.



1 **a.** In welke jaren is de toename het sterkst? Hoe zie je dat?
b. Maak een tabel van het aantal motorfietsen tussen 1985 en 1995.
c. Voeg een kolom toe van de toename tussen twee opeenvolgende jaren.
d. Maak van deze toenamen een nieuwe grafiek.
e. Hoe zie je in deze laatste grafiek dat de toename van het aantal motorfietsen steeds sterker wordt?

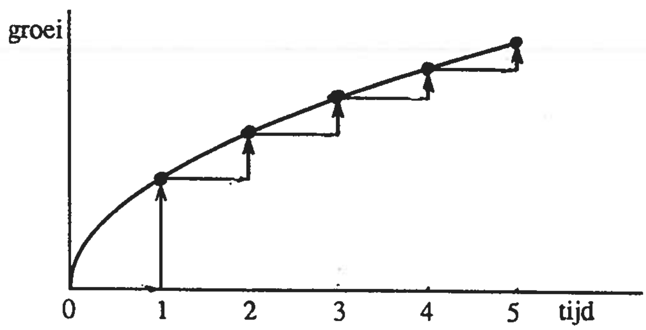
Olieramp

Een supertanker breekt na een aanvaring doormidden. De olie stroomt in zee. De autoriteiten van een badplaats zijn buitengewoon bezorgd over de mogelijke vervuiling van het strand. Het strand bevindt zich op een afstand van 20 kilometer van de ramp. Belangrijk is hoelang het duurt voor de olievlek het strand zal bereiken.
In de eerste drie dagen na de ramp is de verspreiding van de vlek twee keer per dag gemeten. Het resultaat is in een grafiek gezet. De meetpunten in de grafiek zijn door een vloeiende lijn verbonden.



2 a. Beschrijf in woorden hoe de olievlek zich in de eerste drie dagen heeft verspreid.
b. De autoriteiten zullen een beslissing moeten nemen wanneer ze het strand moeten afsluiten. Welke beslissing zullen de autoriteiten nemen?

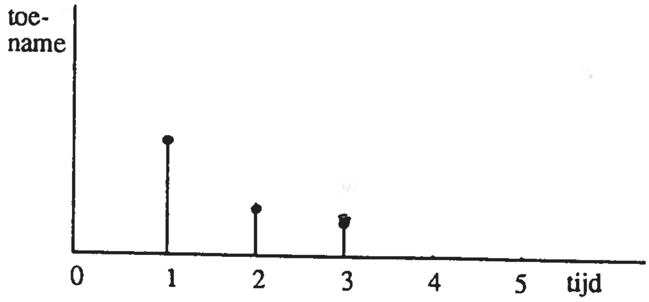
De *toename* van de straal van de vlek kun je op de volgende manier in de grafiek aangeven. De verticale pijltjes laten zien hoeveel de straal telkens na een uur is gegroeid.



c. Wat stelt het pijltje bij de 3 precies voor?

Omdat het in dit probleem niet alleen om het stijgende karakter van de grafiek gaat, maar ook om het soort van stijging, is het nuttig die toenamen apart te bekijken.

3 **a.** In de grafiek hieronder zie je dat de toenamen voor de eerste drie dagen zijn uitgezet. Maak deze grafiek af tot en met dag 5.



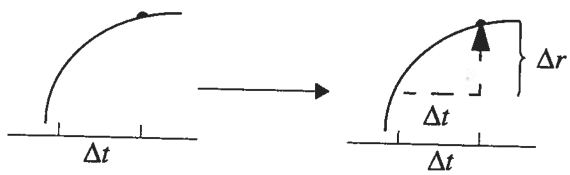
b. Hoe zie je aan deze grafiek dat de vlek steeds langzamer groeit?

toenamen-diagram

Een grafiek als bij opdracht **3.** heet een *toenamendiagram.*
In een toenamendiagram kun je snel aflezen hoe een proces verandert. Bijvoorbeeld of er sprake is van langzame groei of van snelle groei.

4 Hoe ziet het toenamendiagram eruit als er sprake van een steeds langzamere afname? Maak een schets.

Ons doel is veranderingen te onderzoeken. Om over veranderingen te kunnen praten, moeten er minstens twee toestanden worden vergeleken. Toenamendiagrammen lijken daarom een geschikt middel.
Stel we geven de straal van de olievlek aan met de variabele r. Als we in een grafiek de toenamenrij van r willen bekijken, kunnen we de oorspronkelijke grafiek aanvullen met de toenamen.
De stap in de tijd, in dit geval een dag, geven we aan met Δt (spreek uit: delta t). De bijbehorende toename van r met Δr.



Δt en Δr

'Δ' is de Griekse letter 'd' en die staat voor het woord *differentie* (= verschil).
In dit geval is Δt het tijdsverschil tussen twee opeenvolgende waarden in de grafiek. In plaats van verschil kunnen we hier ook spreken van *toename*.

5 Wat is de betekenis van Δr?

andere stapgrootte

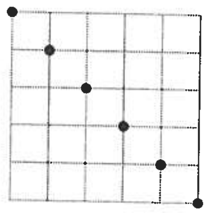
In het voorgaande is de stapgrootte steeds 1 genomen. Bij de olieramp was dat 1 dag. We hadden ook een halve dag als stapgrootte kunnen nemen. Welke stapgrootte je neemt, hangt meestal af van de situatie.

6 **a.** Teken een toenamendiagram van de olievlek tussen dag 1 en dag 3 met een halve dag als stapgrootte.
b. Wat is het verschil met een toenamendiagram met stapgrootte 1?

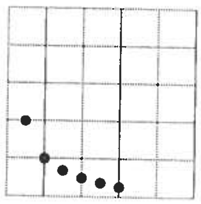
negatieve toename

Grafieken en rijen dalen ook wel eens. Door een afname op te vatten als een negatieve toename, zijn ook dan toenamendiagrammen te tekenen.

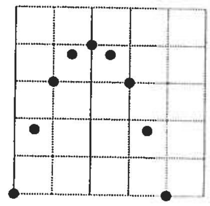
7 Teken toenamendiagrammen bij de volgende grafieken en let steeds op de gegeven stapgrootte. Maak eventueel eerst een tabel bij de grafieken, met daarin een kolom voor de verschilrij.



stapgrootte = 1



stapgrootte = 0.5



stapgrootte = 0.5

marginale winst

8 Een klein bedrijf in het noorden des lands is gespecialiseerd in het bouwen van platbodems (een soort schepen). Afhankelijk van het aantal personeelsleden duurt het bouwen van een schip 1 tot 2 maanden. De jaarwinst die gemaakt wordt hangt af van het aantal geproduceerde schepen, maar natuurlijk ook van de productiekosten die het bedrijf moet maken. Die kosten hangen ook weer samen met het aantal platbodems dat per jaar geproduceerd wordt.
Het volgende *model* blijkt het verloop van de winst $W(n)$ als functie van het aantal per jaar geproduceerde platbodems n aardig te beschrijven: $W(n) = n\,(10 - n)$.
a. Voor welke waarden van n heeft deze formule betekenis?
b. Maak een schets van de winst als functie van het aantal per jaar gebouwde schepen.
c. Onderzoek hoe de winst toeneemt als het aantal geproduceerde platbodems steeds met 1 toeneemt. Dit heet ook wel de *marginale winst.*
TIP: gebruik de gereedschappen die hiervóór zijn geïntroduceerd.
d. De grootste winst wordt bereikt als de marginale winst 0 is. Geef een verklaring.

continue grafieken

Tot nu toe hebben we gekeken naar rijen van getallen of naar 'stippengrafieken'. Daarbij zijn verschilrijen en toenamendiagrammen gemaakt. Ook zijn plaatjes van *continue* grafieken aan de orde geweest. Daarin zie je steeds doorlopende lijnen zoals je dat gewend bent bij grafieken van functies.
Om een toenamendiagram te maken van continue grafieken, gebruik je van die grafieken maar een deel. Je selecteert als het ware die punten die horen bij een gekozen horizontale stapgrootte Δx.

9 Veel bijzonderheden van een grafiek zijn op de een of andere manier terug te vinden in een toenamendiagram. Hieronder zie je een verzameling grafieken en toenamendiagrammen.

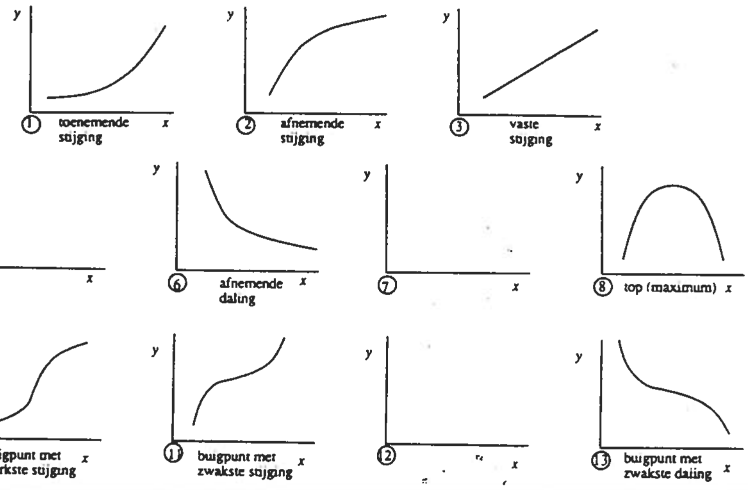
a. Welke grafieken en toenamendiagrammen horen bij elkaar?
Let op: voor een aantal toenamendiagrammen ontbreekt de grafiek.
Teken bij die toenamendiagrammen zelf een mogelijke grafiek. Schrijf er ook een tekstje bij waarmee je de grafiek karakteriseert.

b. De x-coördinaat van een top is niet precies te bepalen uit het toenamendiagram. Waarom niet?

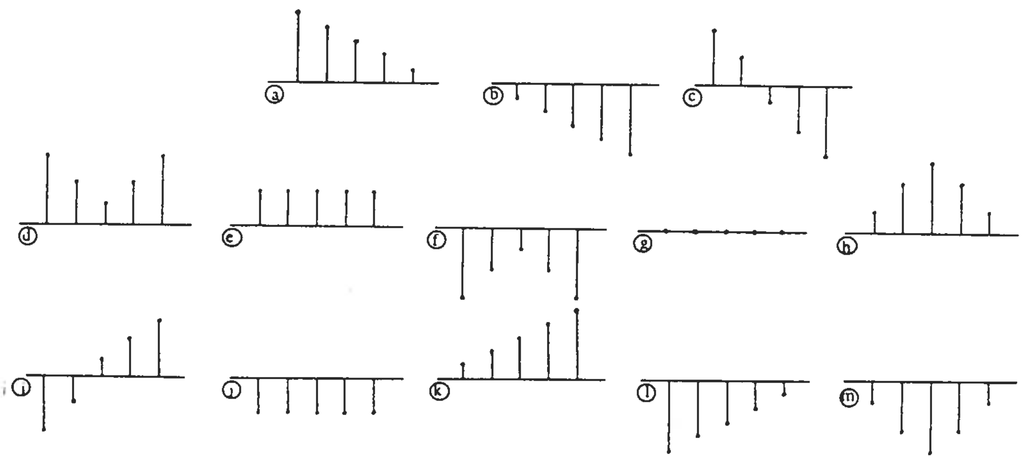
c. Een toenamendiagram met kleinere horizontale stappen kan betere resultaten opleveren. Waarom?

d. Heeft het wel of geen nut de stappen steeds maar kleiner te maken?

Grafieken



Toenamediagrammen (in willekeurige volgorde)



10 Schrijf een aantal regels op over het verband tussen bijzonderheden van een grafiek en hoe je dat in het toenamendiagram terug vindt.

Met de volgende vraagstukken kun je vaststellen of je de leerstof hebt begrepen.

eindexamen economie HAVO 1988

11 Het Deense bedrijf FABOR wil een nieuw product op de Nederlandse markt brengen. Daartoe zal een nieuwe vestiging worden geopend en een aantal Nederlandse vertegenwoordigers worden aangetrokken. FABOR heeft een onderzoek laten verrichten naar het verband tussen het aantal aangestelde vertegenwoordigers en het totale aantal verkochte producten per jaar.
Dat onderzoek leverde het volgende resultaat op.

aantal vertegenwoordigers	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
totaal aantal verkochte producten per jaar	0	10	26	51	87	137	179	209	232	247	255	259	260

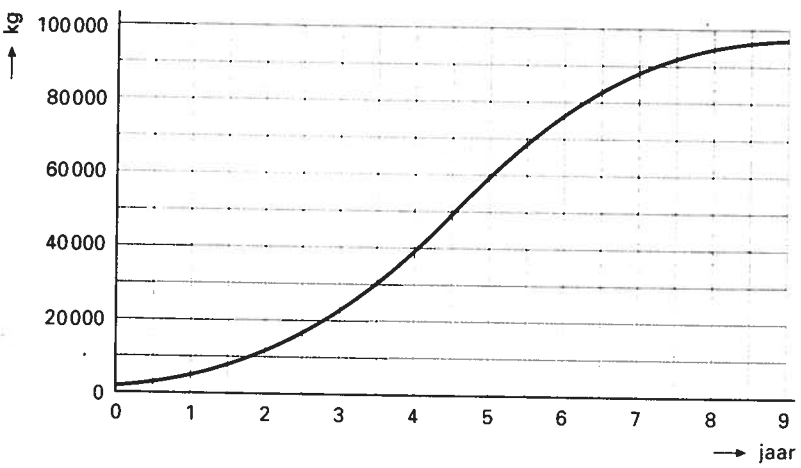
De vraag is of het verband tussen het aantal vertegenwoordigers en het aantal verkochte producten voldoet aan de 'wet van de toe- en afnemende meeropbrengsten'?

a. Als je de betekenis van deze wet niet kent, probeer die dan vast te stellen. Formuleer de wet voor deze situatie.

b. Geef nu het onderbouwde antwoord op de beginvraag.

eindexamen wiskunde A HAVO 1989

12 In een viskwekerij wordt vis uitgezet in een aantal nieuw aangelegde kweekvijvers. Als er geen vis wordt gevangen, zal de visstand zich in de loop der jaren uitbreiden. Onderstaande grafiek geeft een model van de groei van de visstand.



13 a. Teken het toenamendiagram voor intervallen van een jaar, te beginnen met het interval 1–2.

De viskweker zal een aantal jaren afwachten alvorens te 'oogsten'.
Daarna wil hij jaarlijks dezelfde hoeveelheid vis vangen, liefst zoveel mogelijk. Het oogsten vindt steeds plaats aan het eind van het jaar. Na elke vangst breidt de visstand zich weer uit volgens bovenstaand grafiek.

b. Welk advies zou je de viskweker geven over:
- het aantal jaren dat hij na het uitzetten van de vis moet wachten;
- de grootte van de jaarlijkse vangst.

Geef bij dit advies een toelichting, waarmee je de viskweker denkt te overtuigen.

gebruik GR

14 In hoofdstuk 1 is de formule $P = 146.15 \times A^{0.51}$ genoemd. Met deze formule kunnen archeologen een schatting maken van de populatie P als de oppervlakte A (in hectare) van een nederzetting bekend is.

a. Maak met de grafische rekenmachine een grafiek van dit verband. Wat kun je globaal zeggen over het verband tussen A en P?

b. Je kunt de GR de verschilrij tussen opeenvolgende waarden laten uitrekenen.
Ga naar Y=.
Zet de cursor bij Y_2.
Maak een nieuwe formule: $Y_2 = Y_1\ (X+1) - Y_1\ (X)$
NB: De 'Y_1' in de formule maak je met: VARS;Y-VARS(ENTER); 1 (ENTER)
Met TABLE krijg je de waarden en de verschilwaarden op het scherm.
Verklaar waarom de formule voor Y_2 precies de verschillen geeft.

c. In de tabel zie je de verschillen op een ongebruikelijke plaats staan. Het verschil tussen de eerste en de tweede term staat bovenaan.
Verklaar dit met de formule voor Y_2.

d. Teken een toenamendiagram. Kies zelf de schalen op de assen.

e. Geef een beschrijving van de toenamen ΔP als A steeds met 1 toeneemt.

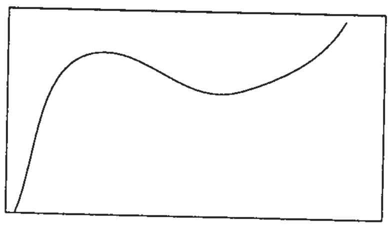
f. Vanaf welke gehele waarde van A is de toename van de populatie per extra ha minder dan 40?

g. Denk terug aan de situatie waarvoor de formule is ontworpen. Probeer een redelijke verklaring te vinden voor het toename-gedrag.

h. In plaats van de oorspronkelijke formule kun je ook de vereenvoudigde formule $P = 146 \times \sqrt{A}$ nemen. Zoek uit wat het effect is op de waarden van P.

15 Bekijk $Y_1 = x^3 - 9x^2 + 24x$

a. Voer de gegeven functie in bij Y=.
Maak de grafiek met behulp van GRAPH. Kies je x-waarden ruim en kies daarna een interval dat interessant is door berg en dal in de grafiek.
TIP: bepaal met behulp van TRACE eerst waar 'de berg en het dal' ongeveer liggen en stel dan bij WINDOW het kijkvenster opnieuw in.
Je krijgt zo'n plaatje.



b. In welke intervallen is de grafiek stijgend, in welke dalend?
Wat moet je aan met de toppen?

c. We gaan nu meer in detail kijken naar de omgeving van het maximum
Kies $1 \leq x \leq 4$ en $\Delta x = 0.5$ en maak de tabel af. Gebruik TABLE en TBLSET om de tabel op de GR te maken.

x	Y_1	Y_2
1	16	3.125
1.5	19.125	
2		
2.5		
3		
3.5		
4		

NB: Voor Y_2 kun je bijna dezelfde formule gebruiken als bij opgave 14.
Om de tweede kolom te vullen, bereken je steeds het verschil tussen twee opeenvolgende functiewaarden, dus $Y_1(x+0.5) - Y_1(x)$.

d. Teken het toenamendiagram. Wat voor informatie geeft dit over de oorspronkelijke functie?

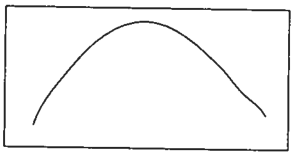
e. Als dit toenamendiagram je enige informatie is, wat kun je dan zeggen over de x-waarde die bij het maximum hoort?

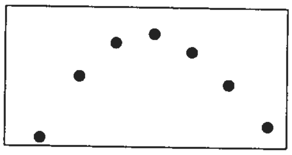
In het voorgaande bekeken we niet de hele grafiek, maar beperkten we ons tot de functiewaarden die horen bij de in de tabel aangegeven waarden van x.

selectie van punten

In plaatjes:

Het ging dus niet over deze grafiek, maar over deze:





continu of discreet

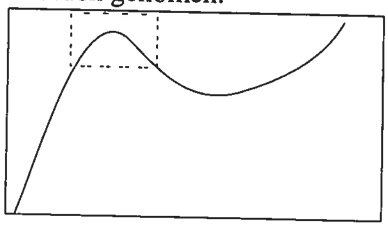
In de vorige twee opgaven bekeken we een *continue* functie. Dat is een functie die voor alle waarden van x, dus ook alle tussenliggende waarden, op een interval een waarde heeft. In de eerste grafiek zie je het continue karakter aan de doorlopende lijn.
De tweede grafiek is opgebouwd uit losse stippen. Dit is een *discrete* grafiek.

gediscretiseerde functie

De continue functie uit vorige opgaven bekeken we in een tabel op een *discrete* manier. Dat betekent dat we alleen in een aantal punten op de x-as de functiewaarden bekeken. Welke punten dat precies zijn hangt af van de keuze van Δx en van de waarde van x waarmee je begint.
Een toenamendiagram is altijd gebaseerd op een *gediscretiseerde* (= discreet gemaakte) functie.

Δx verkleinen

Als we nauwkeuriger informatie willen hebben over het gedrag van de grafiek vlak bij het maximum, dan moet Δx kleiner gekozen worden. Het deel van de te bestuderen grafiek kan dan ook kleiner worden genomen.



16 (Vervolg van opdracht 15)

a. Kies een gebied voor x waarin je zeker het maximum zult vinden.
Met de GR: pas je WINDOW aan.
Neem nu $\Delta x = 0.1$ en maak (met de GR) een nieuwe tabel als bij opdracht 15.
LET OP: je moet de stapgrootte van x aanpassen met TBLSET.

b. Teken ook bij deze tabel het toenamendiagram. Doe dat - als het lukt - in het plaatje dat je bij opgave 15d gemaakt hebt.

c. Wat concludeer je nu over het maximum van Y_1?

d. Wat verwacht je dat er zal gebeuren met de tabel, het toenamendiagram en de informatie over het maximum als je Δx nog kleiner maakt?

17 Gegeven is de functie $Y_1 = x^2 + x$ met $-2 \leq x \leq 3$ en stapgrootte $\Delta x = 1$

a. Voer deze functie in bij Y_1= en laat de grafiek tekenen. Stel het kijkvenster handig in.

b. Met TABLE krijg je de tabel van functiewaarden te zien. Stel met TBLSET de juiste beginwaarde van x en de stapgrootte Δx in.

c. Maak de verschilkolom op de GR.
Bekijk nu bij TABLE de nieuwe tabel.

d. Teken het toenamendiagram.

e. Kun je de bijzonderheden van Y_1 in het toenamendiagram terugvinden? Welke en hoe?

18 a. Maak nu met de GR de tabel (en zo nodig het toenamendiagram) bij de functie uit opgave 17 met stapgrootte $\Delta x = 0.5$.
LET OP: je moet de stapgrootte op twee plaatsen aanpassen!

b. Wat is het effect van deze verkleining van de stapgrootte?

c. Verklein nu de stapgrootte naar 0.1 en beschrijf weer wat het effect is.

d. Geef een verklaring van het resultaat.

e. Door de stapgrootte kleiner te maken kun je de veranderingen in een toenamendiagram nauwkeuriger beschrijven. Toch helpt dat niet echt. Waarom niet?

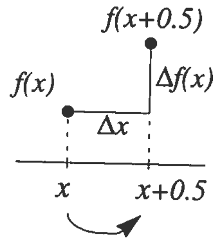
Formules bij verschilkolommen

de functie-notatie

Bij het maken van formules is het handig om de 'functienotatie' te gebruiken.
Stel je hebt een formule bij een grafiek, bijvoorbeeld: $y = x^2+x$. Die formule geven we ook wel aan met $f(x)$, dus $f(x) = x^2 + x$. De x tussen haakjes geeft aan dat dat hier de variabele is. Het is een 'invulplaats'. Geef je x bijvoorbeeld de waarde 3, dan vervang je overal x door 3: $f(3) = 3^2 + 3 = 12$.

Voor het tekenen van een toenamendiagram heb je de verschillen nodig. Die getallen kunnen geleverd worden door een grafiek of een tabel.

Om de toename te vinden die bij positie x hoort, kijk je *vooruit* naar positie $x + 0.5$ (hier is $\Delta x = 0.5$ gekozen). Je berekent vervolgens de functiewaarden bij x en $x + 0.5$. De toename kun je dan berekenen door deze functiewaarden (in de goede volgorde!) van elkaar af te trekken.
Gebruik je de functienotatie dan ziet het bepalen van een toename er in een plaatje zo uit:



Voor de toename heb je dan de formule:

$$\boxed{\Delta f(x) = f(x+0.5) - f(x)}$$

In hoofdstuk 3 heb je verschilrijen van rekenkundige en meetkundige rijen bekeken. Die verschilrijen waren te beschrijven met recursieve en directe formules.
Bij een functie $f(x)$ en een bepaalde stapgrootte Δx kunnen we een kolom voor $\Delta f(x)$ maken.
Kunnen we voor zo'n kolom ook een formule vinden?

formule voor $\Delta f(x)$

19 a. Leg uit dat een formule voor $\Delta f(x)$ bij $f(x) = x^2 + x$ met $\Delta x = 1$ is:
$\Delta f(x) = (x + 1)^2 + (x + 1) - (x^2 + x)$

b. De formule $(x + 1)^2$ kun je schrijven als $(x + 1) \cdot (x +1)$.
Gebruik dit om de formule om te werken tot een formule zonder haakjes.

c. Vereenvoudig de formule voor $\Delta f(x)$ door de haakjes uit te werken en de termen samen te nemen.

d. Ga na dat de formule die je bij c. hebt gevonden klopt met de waarden in de tabel van opgave 17a.

Laten we even terugkijken.
We hebben de functie $f(x) = x^2 + x$. We kiezen een stapgrootte $\Delta x = 1$. We beginnen bij $x = 0$. Dat levert een rij getallen op voor $f(x)$ en een tweede rij van toenamen $\Delta f(x)$. Dat zijn allemaal losse punten in de grafiek. Maar de GR tekent wel een contine grafiek bij de formule $2x + 2$!
De verklaring is als volgt.
Bij $x = 1$ geeft de formule $\Delta f(x) = 2x + 2$ de uitkomst 4. Dat wil zeggen: de toename op het interval [1,2] bedraagt 4. Dat klopt.
Bij $x = 1.25$ geeft de formule 4.5. Dat wil zeggen: de toename op het interval [1.25, 2.25] bedraagt 4.5. Maar die situatie komt helemaal niet voor in de tabel. De formule geeft dus ook informatie over de toename bij andere beginwaarden van x.

De GR kan op twee manieren werken: met functies en met rijen. In dit hoofdstuk hebben we met functies gewerkt. In het venster Y = werk je dan met x als variabele. (Bij rijen is n de variabele.) Bij het tekenen doorloopt x alle tussenliggende waarden. De GR berekent dus ook de waarde van het verschil Y_2 voor $x = 1.25$.
Conclusie: de formule $\Delta f(x) = 2x + 2$ geeft de toenamen weer bij stapgrootte 1 en klopt voor alle beginwaarden van x.

20 a. De formule voor $\Delta f(x)$ met stapgrootte $\Delta x = 0.5$ bepaal je door $f(x + 0.5) - f(x)$ uit te rekenen.
Bepaal net zo als in opgave 19 deze formule voor $\Delta f(x)$ bij $f(x) = x^2 + x$.
b. Doe hetzelfde met $\Delta x = 0.2$ en ook voor $\Delta x = 0.1$.
c. Vergelijk de gevonden formules voor $\Delta f(x)$ en verklaar hoe de verschillen in de formules samenhangen met de verandering in de stapgrootte.
TIP: denk nog eens terug aan de voorbeelden uit hoofdstuk 3 waar 'gemiddelde verschillen' een rol speelden.

Conclusie: Bij andere stapgroottes vind je andere formules voor $\Delta f(x)$.

onderzoek

21 Onderzoek ook de formules en grafieken voor $\Delta f(x)$ bij verschillende waarden van Δx als (maak het je gemakkelijk, gebruik de GR):
a. $f(x) = x^2$
b. $f(x) = x^3$
c. Welke soort functies vind je telkens? Vergelijk steeds het type van de oorspronkelijke functie met het type van de verschilfunctie. Kun je al een algemene conclusie trekken? Welke?

Samenvatting

In dit hoofdstuk heb je gezien hoe je bij grafieken verschillende soorten veranderingen en de mate van verandering kunt beschrijven met behulp van toenamendiagrammen. Uit de kenmerken van het toenamendiagram kun je vaak bijzonderheden over de oorspronkelijke grafiek afleiden.
Bij continue functies kun je de stapgrootte steeds kleiner nemen. Je blijft dan steeds dichter bij de grafiek. Maar de toenamen worden ook steeds kleiner.
Bij een toenamendiagram kun je soms een passende formule maken. Bij andere stapgroottes vind je andere formules.

22 **a.** Past bij een grafiek van een verband precies één toenamendiagram of zijn er meer mogelijkheden? Onderbouw je antwoord, gebruik eventueel een voorbeeld ter illustratie.

b. Omgekeerd: past bij een toenamendiagram precies één grafiek? Onderbouw je antwoord, gebruik eventueel een voorbeeld ter illustratie.

Verschilrijen van rekenkundige, meetkundige en andere rijen geven ook informatie over de rij zelf. In dat opzicht zijn verschilrijen te vergelijken met toenamendiagrammen.

23 In welk(e) opzicht(en) verschilt het gebruik van verschilrijen en toenamendiagrammen?

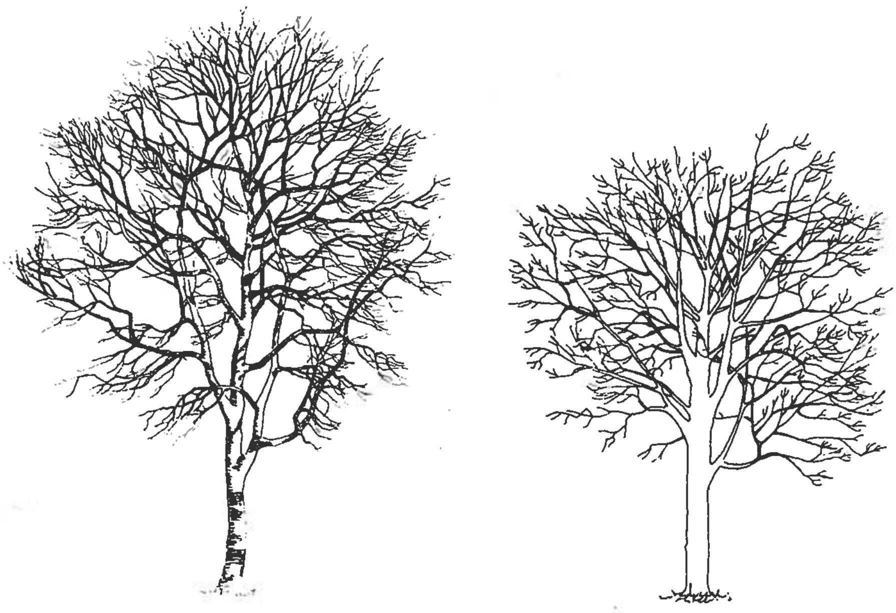
24 Wat kun je van een functie allemaal aan de weet komen door het toenamendiagram te bestuderen. Wat kun je zeker niet aan de weet komen? Noteer zoveel mogelijk kenmerken van functies waarover je informatie kunt krijgen .

Uitgaande van één functievoorschrift $f(x)$ kun je verschillende formules voor $\Delta f(x)$ vinden, afhankelijk van de stapgrootte Δx.

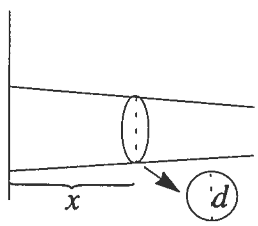
25 Verklaar hoe de verschillen in de formules samenhangen met de verandering in de stapgrootte.

Onderzoeksopdracht: De vorm van takken

Bij de volgende problemen kun je gebruik maken van alles wat je tot nu toe hebt geleerd. Je mag daar zelfs buiten gaan met eigen bedenksels. Maar dan moet je die wel goed verantwoorden.



Iedereen weet dat takken steeds dunner worden aan het eind. En dat lange takken aan het begin dikker zijn dan korte takken. Je kunt je afvragen hoe het verloop van een tak er wiskundig uitziet.



1 In de figuur heeft de tak de vorm van twee rechte lijnen die in een punt uitkomen. Stel dat de tak aan het begin 20 mm dik is en dat de tak 1000 mm lang is.
- **a.** Stel een formule op voor de dikte d van de tak op afstand x van het begin.
- **b.** De dak wordt steeds dunner. Over 1000 mm gaat de tak van 20 mm naar 0 mm. Wat is de afname van de dikte per mm?
- **c.** Wat kun je zeggen over $\Delta d(x)$?

2 Stel D is de dikte aan het begin van de tak. L is de totale lengte van de tak. Bedenk nu een algemene formule voor de dikte $d(x)$ van de tak op plaats x. Ga er weer vanuit dat de tak de vorm heeft van twee rechte lijnen.

3 Het idee dat een tak steeds dunner wordt volgens een rechte lijn is niet erg realistisch. Dat zou betekenen dat takken altijd in een heel spits puntje eindigen. Daarom moeten we op zoek naar een formule die beter past met de werkelijkheid.
Onderzoek welke van de volgende formules de werkelijkheid het best benaderen.
Je mag natuurlijk ook zelf een nieuwe formule bedenken.
Formule 1:

$$d(x) = D \cdot \sqrt{\frac{L-x}{L}}$$

Formule 2:

$$d(x) = \frac{D}{1-x}$$

Formule 3:

$$d(x) = D \cdot \left(\frac{L-x}{L}\right)^2$$

Maak een poster over de groei van takken binnen het door jou gekozen model.
Laat grafieken maken met de GR.
Betrek ook de gemiddelde afname per mm in je argumenten, bijvoorbeeld door bij de formules geschikte toenamendiagrammen te tekenen.
Laat in ieder geval duidelijk zien wat de invloed is van de verschillende 'afname'-factoren. Geef bijvoorbeeld in één plaatje een grafisch overzicht van de invloed van die verschillende 'afname'-factoren. Gebruik vooral plaatjes. Hou je teksten kort.

6: Het differentiequotiënt

gemiddelde verschillen

In hoofdstuk 3 hebben we kennisgemaakt met de rij van gemiddelde verschillen. Daarbij werden de verschillen tussen twee opeenvolgende termen gedeeld door de bijhorende verschillen in afstand of tijd.

discreet kijken

In hoofdstuk 5 hebben we de toename of afname van een functie bekeken door de functie discreet te maken. Je vervangt dan de grafiek van een functie door een rij van punten op de grafiek. Voor de toe- of afname kijk je naar de verschillen van de rij van functiewaarden. Een toenamendiagram geeft een snel beeld van de veranderingen.

formules voor $\Delta f(x)$

Daarna hebben we formules gemaakt bij de rij van functieverschillen. Het blijkt dat zo'n formule afhangt van de gekozen stapgrootte.

In dit hoofdstuk komen deze ideeën bij elkaar. Bij nader inzien blijkt dat het toenamendiagram helemaal niet zo'n goed instrument te zijn om veranderingen vast te leggen. We gaan nu een volgende stap zetten. We bestuderen niet langer de verschillen van functiewaarden, maar de verschillen gedeeld door de stapgrootte. Dan zijn we weer precies bij de gemiddelde verschillen uit hoofdstuk 3 aangeland.
Maar eerst bekijken we wat er nu precies mis gaat met die toenamendiagrammen.

Besmettelijke ziekten

Sinds het begin van de twintigste eeuw is men er aardig in geslaagd in de westerse wereld de besmettelijke ziekten te bestrijden. Dat heeft vooral te maken met een toegenomen hygiëne, zoals de zuiverheid van het drinkwater. In de grafiek kun je zien hoe in New York de aantallen sterfgevallen als gevolg van epidemieën zijn afnomen sinds 1800.

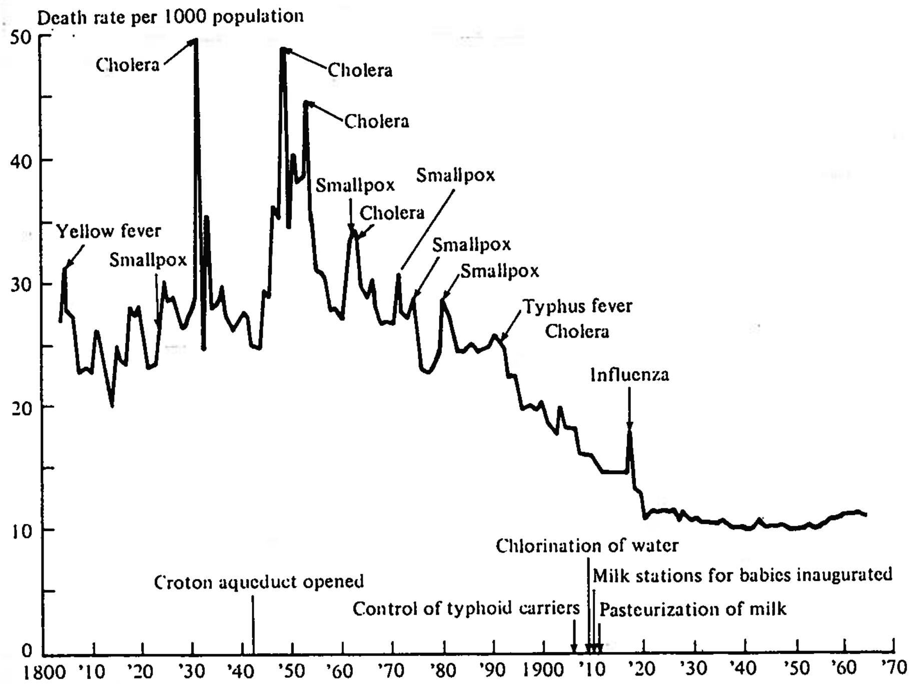


Figure 8 Taming of killer diseases in New York City. (*From M. Spiegelman, "Introduction to Demography," Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1968. Reprinted by permission.*)

1 **a.** Wat laat de grafiek zien?
b. Maak een toenamendiagram van 1820 - 1880 met een stapgrootte van 10 jaar.
c. Klopt het beeld van de veranderingen dat het toenamendiagram geeft met het beeld dat je bij vraag **a.** hebt gegeven?
d. Door de stapgrootte te verkleinen krijg je een preciezer beeld van de veranderingen. Neem nu een stapgrootte van 2 jaar en maak een toenamendiagram voor de jaren 1840 - 1860.
e. Hoe zou het toenamendiagram eruit zien als je een stapgrootte van 1 maand neemt voor het jaar 1940? Je hoeft het toenamendiagram niet precies te tekenen maar geef een schets hoe je denkt dat het eruit zal zien.

In het voorbeeld kun je zien dat het beeld dat je van de veranderingen krijgt erg afhangt van de gekozen stapgrootte. Het is niet zo dat het beeld steeds beter wordt als je de stapgrootte maar steeds kleiner maakt. Dat bezwaar kun je opvangen door niet naar de veranderingen zelf, maar naar de *gemiddelde* veranderingen te kijken. Neem je nu de stapgrootte steeds kleiner, dan wordt ook het beeld van de veranderingen steeds gedetailleerder.

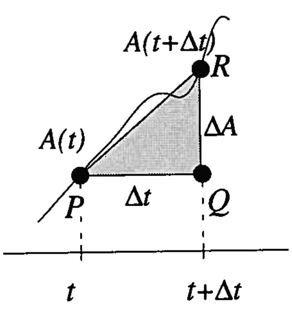
Nog eens de Elfsteden-tocht

2 In hoofdstuk 3 heb je uitgezocht tussen welke twee steden de schaatsers het snelste en het langzaamste gingen. Het ging daarbij om de gemiddelde snelheid.
a. Beschrijf wat je hebt gedaan om de gemiddelde snelheid te vinden.
b. Wat was de hoogste gemiddelde snelheid en tussen welke steden was dat?
c. Wat was de laagste gemiddelde snelheid en waar was dat?

Je hebt de snelheid uitgerekend door de afstand tussen twee steden te delen door de tijd.
In termen van toe- of afname:
- de toename is: toename in afstand = ΔA
- de stapgrootte is: de tijd nodig voor die afstand = Δt.

Zo krijg je de snelheid in km per uur: $\Delta A/\Delta t$.
Door alleen maar naar de gemiddelde snelheid te kijken, doe je net of dat de echte constante snelheid op dat traject is. Natuurlijk is dat niet de werkelijke snelheid. Soms reden ze sneller, soms reden ze langzamer.

kijken naar de grafiek



In de figuur wordt een stukje van de tocht wiskundig beschreven, Je ziet twee punten van de tocht. Verticaal staat de afgelegde afstand, horizontaal de tijd.
Bij t hoort de afgelegde afstand $A(t)$.
Het volgende punt is $t + \Delta t$ met als bijbehorende afstand $A(t+\Delta t)$.
De toename van de A-waarde is $\Delta A = A(t+\Delta t) - A(t)$. Dit is dus het verschil van de functiewaarden. In dit geval is dat de lengte van QR.
De stapgrootte Δt is gelijk aan de lengte van PQ.
Het gemiddelde verschil is nu:

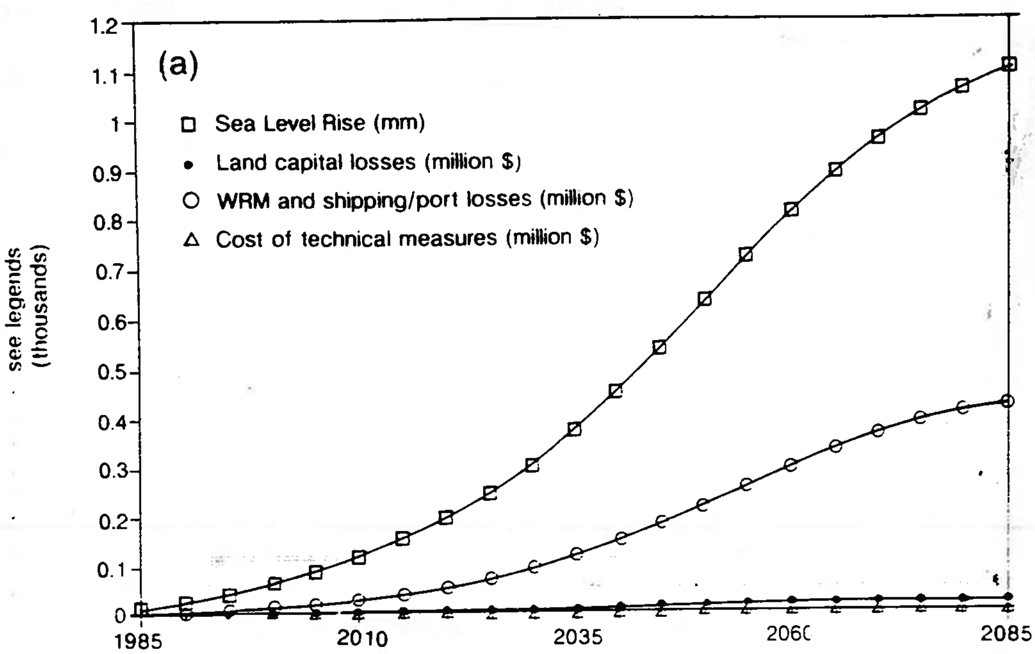
$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} = \frac{QR}{PQ}$$

$\frac{\Delta A}{\Delta t}$ **is de rico**

In driehoek *PQR* kun je daar een betekenis aan geven. Het is de verhouding van twee zijden en dat is een bekend getal: de *richtingscoëfficiënt* (rico) van de lijn *PR*. Een andere naam is hellingcoëfficiënt.

Het rijzen van de zeespiegel

Door een toenemende uitstoot van CO2 ontstaat op de aarde een broeikaseffect. De gemiddelde temperatuur zal toenemen en de ijskappen zullen gaan smelten. Dat heeft een verhoging van de zeespiegel tot gevolg. Het rijzen van de zeespiegel zal ons tot maatregelen dwingen die veel geld gaan kosten. Diverse scenario's worden doorgerekend. Deze grafieken horen bij één ervan.



Monetary losses – base case 1 (expressed in cumulative values over five-yearly intervals

We bekijken de Sea Level Rise grafiek.

3 **a.** In welke periode stijgt de zeespiegel het sterkst? Hoeveel stijging is dat per jaar? Hoe heb je dat berekend?

b. Wat is hier de betekenis van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

c. Maak een schets van het toenamendiagram dat bij deze grafiek hoort. Je hoeft dus niet de preciese waarden af te lezen en in een grafiek te zetten.

d. Hoe ziet een grafiek van de waarden van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eruit ? Maak een schets.

e. Verklaar waarom in dit geval het toenamendiagram wel dezelfde informatie geeft als de grafiek van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

Enkele vaktermen

Gegeven is een grafiek bij een functie. De horizontale as is de x-as. Verticaal zijn de waarden van y uitgezet. Bij de grafiek hoort de formule: $y = f(x)$.

Δx is de stapgrootte, dus de toename van de x-waarde.
$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ is de toename van de y-waarde ofwel de toename van $f(x)$ bij de gekozen stapgrootte.

differentie-quotiënt

Δx en Δy worden de *differenties* genoemd.
Het quotiënt: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ draagt de naam *differentiequotiënt.* In de grafiek vind je die terug als de richtingscoëfficiënt.

formules voor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Gegeven is de functie $y = f(x) = x^2 + x$. In het vorige hoofdstuk heb je bij verschillende stapgroottes formules voor Δy gevonden, namelijk:
Bij $\Delta x = 1$: $\Delta y = 2x + 2$
Bij $\Delta x = 0{,}5$: $\Delta y = x + 0{,}75$
Bij $\Delta x = 0{,}1$: $\Delta y = 0{,}2\,x + 0{,}11$
Aan de formules zie je duidelijk dat de toename per stap kleiner wordt bij kleinere stapgrootte.
Je kunt nu ook formules voor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bepalen.

Bij stapgrootte $\Delta x = 1$ krijg je: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{1} = 2x + 2$

Bij stapgrootte $\Delta x = 0.5$ krijg je: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{0,5} = \frac{x + 0,75}{0,5} = 2x + 1{,}5$

Bij stapgrootte $\Delta x = 0.1$ krijg je $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,2x + 0,11}{0,1} = 2x + 1,1$

4 Bepaal nu ook een formule voor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bij stapgrootte $\Delta x = 0{,}05$.

5 In de formules voor het differentiequotient bij verschillende stapgroottes zit een duidelijke regelmaat. Je ziet de stapgrootte als het ware in de formule 'zitten'.
- **a.** Bedenk uit de regelmaat wat de algemene formule zal zijn voor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bij een willekeurige stapgrootte Δx.
- **b.** Bewijs de gevonden formule door $f(x + \Delta x) - f(x)$ te herleiden en te delen door Δx.

6 Bepaal een formule voor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ als $f(x) = x^2 - 4$ en bewijs dat deze klopt.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op de GR

Het onderzoek naar het gedrag van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bij een gegeven stapgrootte kun je ook snel met de grafische rekenmachine uitvoeren.

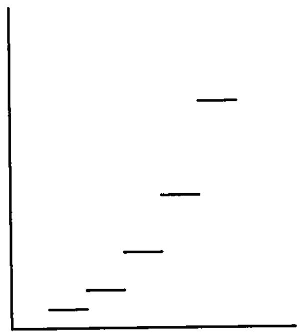
7 In deze opgave ga je met de GR het gedrag van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ onderzoeken bij de functie: $Y(x) = -0.25x^2 + 2x + 1$ met $0 \le x \le 8$ en $\Delta x = 2$.
- **a.** Ga naar Y = .
  Maak het scherm schoon.
  Typ in $Y_1 = -0.25x^2 + 2x + 1$.
  Typ $Y_2 = (Y_1(X+2) - Y_1(X))/2$.
  Leg uit dat Y_2 nu gelijk is aan $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- **b.** Ga naar WINDOW.
  Kies de waarden van x tussen 0 en 10 en van y tussen -10 en 10.
  Ga naar GRAPH.
  Bepaal uit de grafiek de formule bij $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (dat is dus Y_2).
- **c.** Bij welke x is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$? Hoe vind je dat terug in de oorspronkelijke grafiek van Y_1?
- **d.** Doe hetzelfde als bij **a**, **b** en **c** maar nu met stapgrootte $\Delta x = 0.1$.

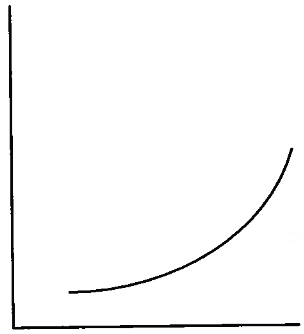
e. Bij opgave **d** moest je in de formule van Y_2 overal de 2 vervangen door 0.1. Waarom?

f. Vat kort samen wat je hebt gezien op het scherm van de GR.
Denk daarbij aan:
- de invloed van de stapgrootte
- het verband tussen de formules voor Y_1 en Y_2
- de relatie tussen de grafieken voor Y_1 en Y_2
- de schermresolutie van je GR.

hellinggrafieken tekenen

Je kunt de differentiequotiënten in beeld brengen. Voor grote intervallen levert dat een grafiek op die is opgebouwd uit horizontale lijnstukjes. Bij kleine stapgroottes zie je die lijntjes nauwelijk en verschijnt een mooie 'gladde' grafiek in beeld. Zo'n grafiek noemen we een *hellinggrafiek.*





Van zoiets naar.....................................zoiets.

Ieder punt van de hellinggrafiek geeft informatie over de steilheid (en dus de mate van verandering) van de oorspronkelijke grafiek.

8 **a.** Teken met je GR in één figuur de grafieken van x^3 en de bijbehorende hellinggrafiek.

b. Bedenk op basis van dit resultaat een passende formule bij de hellinggrafiek .
TIP: neem een kleine stapgrootte en gebruik TABLE om de formule te vinden.

9 **a.** Ga naar het Y= - venster. Maak het venster zo nodig schoon met CLEAR.
Typ: $Y_1 = \sin(X)$
Typ: $Y_2 = 10\ (\sin(X+0.1) - \sin(X))$

b. Wat stelt deze laatste uitdrukking voor? Beargumenteer je antwoord.

c. Ga naar het scherm WINDOW, kies de x-waarden tussen -2 en 2 en de$y$-waarden tussen -1 en 1. Kies GRAPH.
Wat valt je op?

d. Bepaal een eenvoudige formule voor het differentiequotiënt van $\sin(x)$.

10 **a.** In een hellinggrafiek lees je bij $x = 1$ de waarde 2 af. Wat zegt dat over de mate van verandering in $x = 1$ in de oorspronkelijke grafiek?

b. Algemeen: hoe kun je de waarden van de hellinggrafiek 'vertalen' naar de mate van verandering van de oorspronkelijke grafiek?

c. Wat betekent het als de waarde van de hellinggrafiek ergens nul is?

onderzoek

11 Onderzoek met de GR de hellinggrafieken van machtsfuncties, wortelfuncties en exponentiële functies. Maak een overzicht van de grafieken en de bijbehorende hellinggrafieken. Geef waar mogelijk formules voor de hellinggrafieken.

Het afkoelen van een kopje koffie

12 Afkoelingsverschijnselen kun je beschrijven en berekenen met behulp van het differentiequotiënt.
We noemen de temperatuur van de koffie in een kopje K. K wordt iedere 30 seconden gemeten. Voor de stapgrootte geldt dus: $\Delta t = 30$. Dat levert een rij van waarnemingsgetallen op die keurig op volgorde genummerd zijn: $K(0)$, $K(1)$, $K(2)$,.......
Voor de afkoeling geldt dat de afkoeling per seconde evenredig is met het verschil tussen de temperauur van het kopje en de omgeving. Stel dat de omgevingstemeratuur 20^0 C is (een gemiddelde kamertemperatuur).
Dan kunnen we een formule voor het differentiequotiënt maken:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = const(20 - K(n))$$

In de formule is *const* een constant getal dat past bij de situatie en dat uit experimenten moet worden bepaald.

a. Als $K(n) > 20$ koelt het kopje af. Wat weet je dan over het teken van $\frac{\Delta K}{\Delta t}$?
Wat betekent dat voor het teken van *const*?

De waarde van de *const* zal van geval tot geval verschillen. Het ene kopje koelt nu eenmaal sneller af dan het andere. Neem hier *const* = 0.005.
De begintemperatuur $K(0)$ stellen we op 80^o C.
Nu kun je $\frac{\Delta K}{\Delta t}$ berekenen in de eerste 30 seconden:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = 0.005 * (20 - 80) = -0.3$$

Dat is de afkoeling in graden **per seconde**.
Daarmee kun je de waarde $K(1)$ berekenen:

$$K(1) = K(0) - 0.3*30 = 80 - 9 = 71.$$

b. Bepaal $\frac{\Delta K}{\Delta t}$ in de volgende periode van 30 seconden.
c. Bereken daarmee $K(2)$
d. Bereken zo ook de volgende waarden. Maak een tabel en teken daarbij een grafiek.
e. Koffie is zo'n beetje drinkbaar vanaf 30^0. Onderzoek hoe lang dat duurt.

met de GR

In feite wordt het hele proces bepaald door de volgende twee formules:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = 0,005(20 - K(n))$$

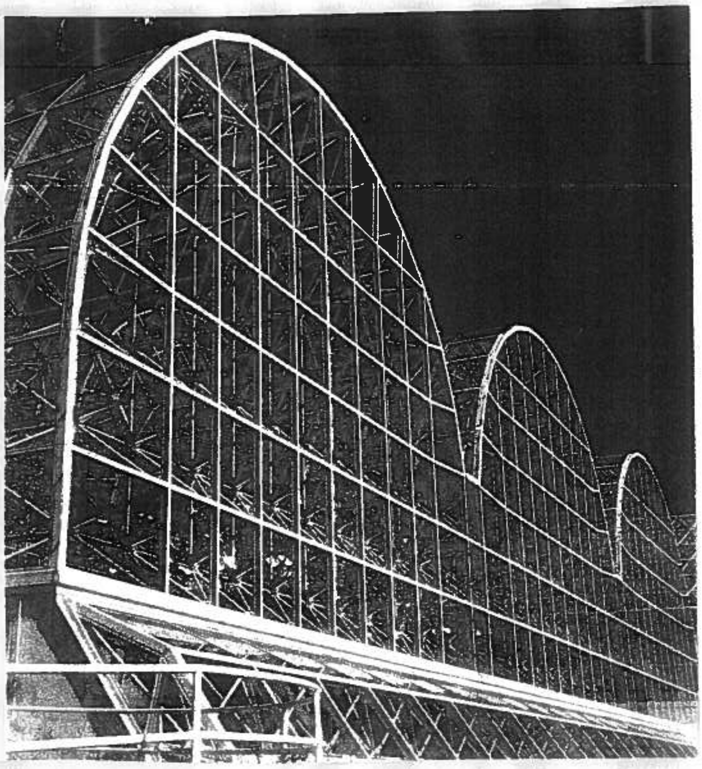
$$K(n+1) = K(n) + \frac{\Delta K}{\Delta t} \cdot 30$$

f. Combineer beide formules en herschrijf ze tot één recursieve formule.
g. Zet de formule die je bij **f** hebt gevonden in de GR.
PAS OP: de GR kan niet omgaan met $n + 1$ in een formule. Herschrijf je gevonden formule dus eerst naar n en $n-1$!
h. Onderzoek nu verschillende situaties. Bijvoorbeeld een begintemperatuur van 0^0.
Of neem een andere waarde voor de constante.

i. Als je een beter isolerend kopje neemt (bijvoorbeeld van piepschuim) moet je de constante dan groter of kleiner nemen?

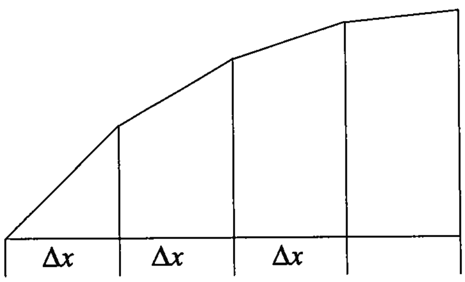
koorden

De biosphere



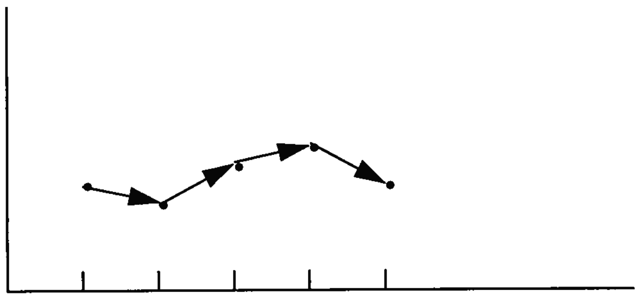
In de USA is onlangs een experiment gestart met een kopie van de natuur op aarde in een volstrekt afgesloten ruimte, een 'biosphere'. Ook menselijke aanwezigheid in deze biosphere werd daarbij onderzocht. Op de foto zie je een gedeelte van de gevel van de biosphere. Kijk je op een afstand naar het bovenste deel van de gevel dan lijkt de rand een gebogen lijn. Maar dichterbij kun je zien dat die kromme lijn uit korte rechte stukjes bestaat. Zo'n lijnstuk dat twee punten van een grafiek verbindt heet, een *koorde*.

koorden-grafiek



In dit geval geldt: gemakkelijk is goedkoop. Het is natuurlijk veel gemakkelijker om een boog te maken uit rechte stukken buis dan dat je een lange buis rond zou moeten maken.

Een koordengrafiek is een benadering van de echte grafiek. De hellingen van de koorden worden gegeven door de richtingscoëfficiënten. Al eerder zagen we dat je die kunt uitrekenen met het differentieqoutiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Met behulp van koorden kun je grafieken tekenen. Je kiest een beginpunt op de grafiek. en een vaste stapgrootte op de x-as. Uit de formule haal je de rico van de koorde in dat punt. Je tekent de koorde tot je bij het volgende eindpunt bent van de eerste stap. Je berekent de helling van de volgende koorde, enzo verder. Zo krijg je een aardige benadering van de grafiek.Hoe kleiner de stapgrootte, hoe beter de benadering.



van helling naar grafiek

Bij de situatie van het afkoelen van een kop koffie, wist je niet de formule voor het afkoelingsproces, maar wel de bijbehorende hellingsfunctie.
Bij rijen hebben we gezien dat bij een gegeven verschilrij de oorspronkelijke rij weer is terug te vinden, mits je de beginwaarde (of een andere waarde) van de oorspronkelijke rij weet.
Bijna op dezelfde manier kun je bij een gegeven hellingfunctie punten van de oorspronkelijke functie bij benadering terugvinden.

13 Gegeven is de hellingfunctie $\frac{\Delta y}{\Delta x} = x$ en bovendien is gegeven dat de oorspronkelijke functie door het punt (0,1) gaat. We nemen stapgrootte 0.5 en $x = 0$ als beginwaarde.In In de tabel zijn de eerste drie stappen van het rekenproces uitgewerkt.

x	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Δy	y
0	0	0	1
0.5	0.5	1	2
1	1	2	4

a. Verklaar de eerste drie rijen van de tabel.
b. Maak de tabel af.
c. Maak ook een tabel voor $x = 0$ tot $x = -2$.
d. Zet de gevonden punten (x,y) in een grafiek en verbindt de punten door de koorden.
e. Herhaal het bovenstaande met een stapgrootte 0.1.

14 We vergelijken een toenamendiagram met een hellinggrafiek.

a. Zeer kleine waarden voor Δx brachten moeilijkheden voor het toenamediagram. Welke?

b. Zeer kleine waarden voor Δx zijn geen bezwaar voor een hellinggrafiek zoals je gezien hebt. Integendeel, ze zijn zelfs gunstig. Verklaar dat 'geen bezwaar' en 'gunstig'.

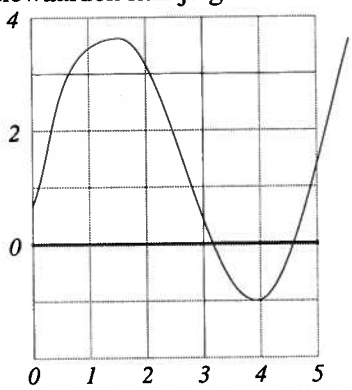
c. Als je een toenamediagram hebt plus een punt van de grafiek, dan kun je daarmee een koordengrafiek bouwen. Laat dat met een voorbeeld zien.

d. Doe nu hetzelfde als bij **c** met een hellinggrafiek en een punt van de grafiek.

nulpunten benaderen

Met behulp van de koorden aan de grafiek kun je de nulpunten bij benadering uitrekenen. Je neemt daarvoor twee punten van de grafiek aan verschillende kanten van het nulpunt en waarvan je de coördinaten kunt uitrekenen. Met de vergelijking voor de koorde tussen die punten bereken je waar die de x-as snijdt. Dat is de benadering.

15 De grafiek heeft twee nulpunten. Het ene ligt tussen $x = 3$ en $x = 4$, het andere tussen $x = 4$ en $x = 5$. Twee functiewaarden kun je goed aflezen: $f(2) = 3$ en $f(4) = -1$.



a. Teken een koorde tussen deze twee punten van de grafiek.

b. Stel een vergelijking van de lijn op voor deze koorde.

c. Bereken met deze vergelijking waar de koorde door de x-as gaat en bepaal zo een benadering van het snijpunt.

16 a. Bereken zo het nulpunt van $3^x - 5$.

b. Bepaal dit nulpunt ook met de GR.

c. Hoe nauwkeurig was je benadering? Hoe zou je die kunnen verbeteren?

Samenvatting

In dit hoofdstuk heb je gezien dat het differentiequotiënt een maat is voor de sterkte van toename/afname. Een formule voor het differentiequotiënt is: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
In deze formule kun je op de plaats van Δy ook een uitdrukking schrijven met daarin onder meer $f(x)$ en Δx.

17 a. Geef zo'n andere formule voor het differentiequotiënt.
b. Vertel in eigen woorden wat het differentiequotiënt van een functie zegt over de grafiek van die functie.

18 Ga na welke eigenschappen van functies je met behulp van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kunt beschrijven. Denk daarbij aan: mate van stijgen/dalen, soort stijgen/dalen, maxima, minima, buigpunt. Doe dit met zelfgekozen functies. Schrijf een (redelijk) systematisch verslag van je bevindingen.

Onderzoeksopdracht: Het vergaan van beenderen

Het probleem om bij een hellinggrafiek een benadering van de oorspronkelijke grafiek te maken (door middel van een koordengrafiek) lijkt enigszins kunstmatig. Want die hellinggrafiek zou wel eens van een reeds bekende grafiek of functie gemaakt kunnen zijn. Maar dat hoeft niet. In sommige situaties is $f(x)$ niet bekend, terwijl er wel informatie over $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ voor handen is. Het volgende probleem laat dat zien.

Archeologen proberen bij vondsten van dierenbotten te achterhalen hoe lang die botten daar gelegen hebben. De toestand van de botten is een belangrijk gegeven. Maar omdat niet alle beenderen even snel vergaan, is het vinden van sommige botten en het ontbreken van andere ook een goede indicatie.

Het vergaan van een bot betekent dat de dichtheid D van het bot afneemt. Het bot wordt steeds poreuzer. Hoe groter de dichtheid van een bot, hoe langzamer het vergaat. Een zeer poreus bot (dus met geringe dichtheid) vergaat sneller.
Allerlei omstandigheden in aanmerking genomen, geeft de volgende formule de mate van verandering van D aan.

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{-A}{D}$$

Hierin is t de tijd en A een vast positief getal waarin de individuele eigenschappen van het bot verwerkt zijn.

1 a. Gaat deze verandering in de juiste richting? Probeer dat te achterhalen door enkele waarden voor D in te vullen.

Stel dat het dier op tijdstip $t = 0$ is overleden. De vraag is nu hoe je uit de gevonden dichtheid $D(t)$ de leeftijd t van het bot kunt bepalen.
Met behulp van de vergelijking kun je vanuit bepaalde gegevens stap voor stap de volgende waarde van D benaderen. Daarvoor schrijven we de vergelijking eerst in een andere vorm:

$$\Delta D = -\frac{A}{D}\Delta t$$

Stel je begint op $t = 0$ en je kiest een stapgrootte van 1 jaar, dus $\Delta t = 1$.
Neem eens aan dat de dichtheid van het bot op dat ogenblik 10 is.
En dat voor de door de omstandigheden bepaalde waarde van A geldt $A = 5$.
NB: De getallen zijn kunstmatig gekozen. Iedere gelijkenis met de werkelijkheid berust op toeval.

b. Voor het eerste jaar kun je nu eerst met de formule ΔD uitrekenen. Doe dat door de gegeven waarden in te vullen.

c. Met de gevonden waarde voor ΔD en de al bekende waarde D op $t = 0$, namelijk D = 10, kun je nu de waarde van D op $t = 1$ bepalen. Doe dit.

Met deze waarde van D gaan we het tweede jaar in.

Het is handig om nu een tabel te gaan maken.

t	D	ΔD
0	10	.....
1		
2		
3		

d. Maak de tabel af tot en met $t = 10$.

Je hebt nu een tabel gemaakt waarbij je D kunt aflezen als je t weet. Een archeoloog wil natuurlijk graag andersom werken. Die wil een tabel waarbij hij de waarde van t (de tijd sinds het vergaan) bij een bekende D (de dichtheid van het bot) kan aflezen. Graag wil hij dus de D kolom als eerste en met regelmatige tussenstappen en de t kolom als tweede kolom.

e. Maak zo'n tabel voor de archeoloog. Gebruik om de tabel te maken de koordengrafiek. Denk ook aan de mogelijkheid een functievoorschrift te maken en de inverse te bepalen. Schrijf bij de tabel voor de archeoloog een korte toelichting hoe hij/zij deze moet gebruiken.