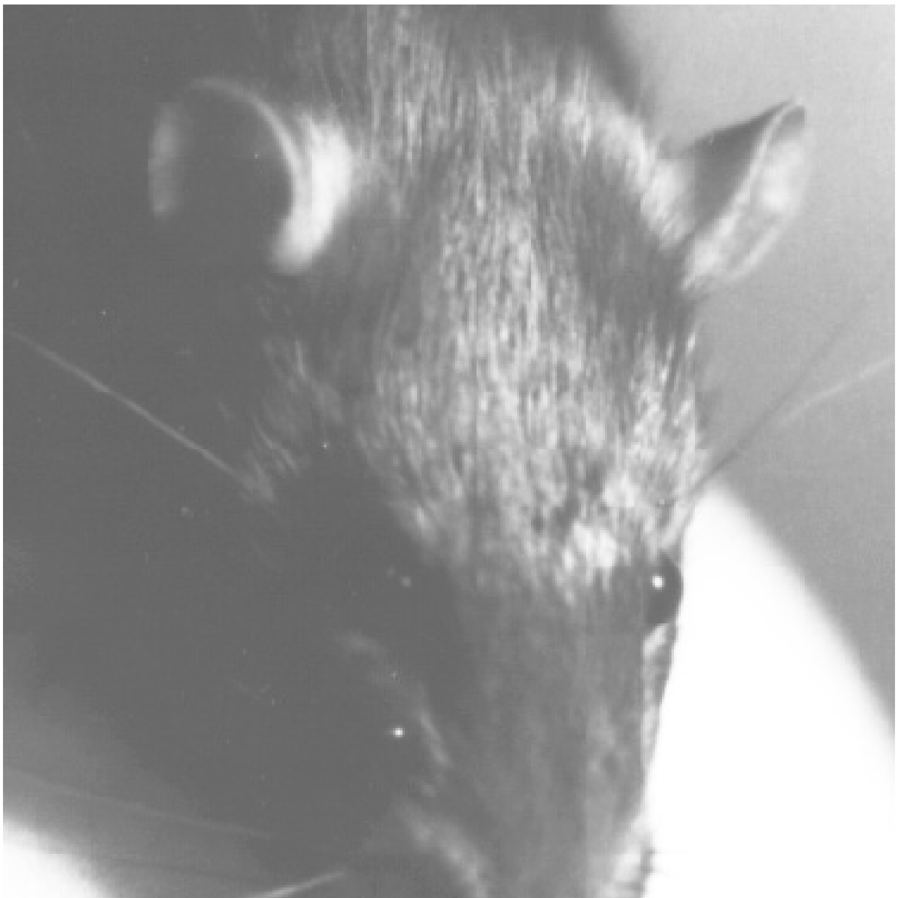
Discrete Dynamische Modellen



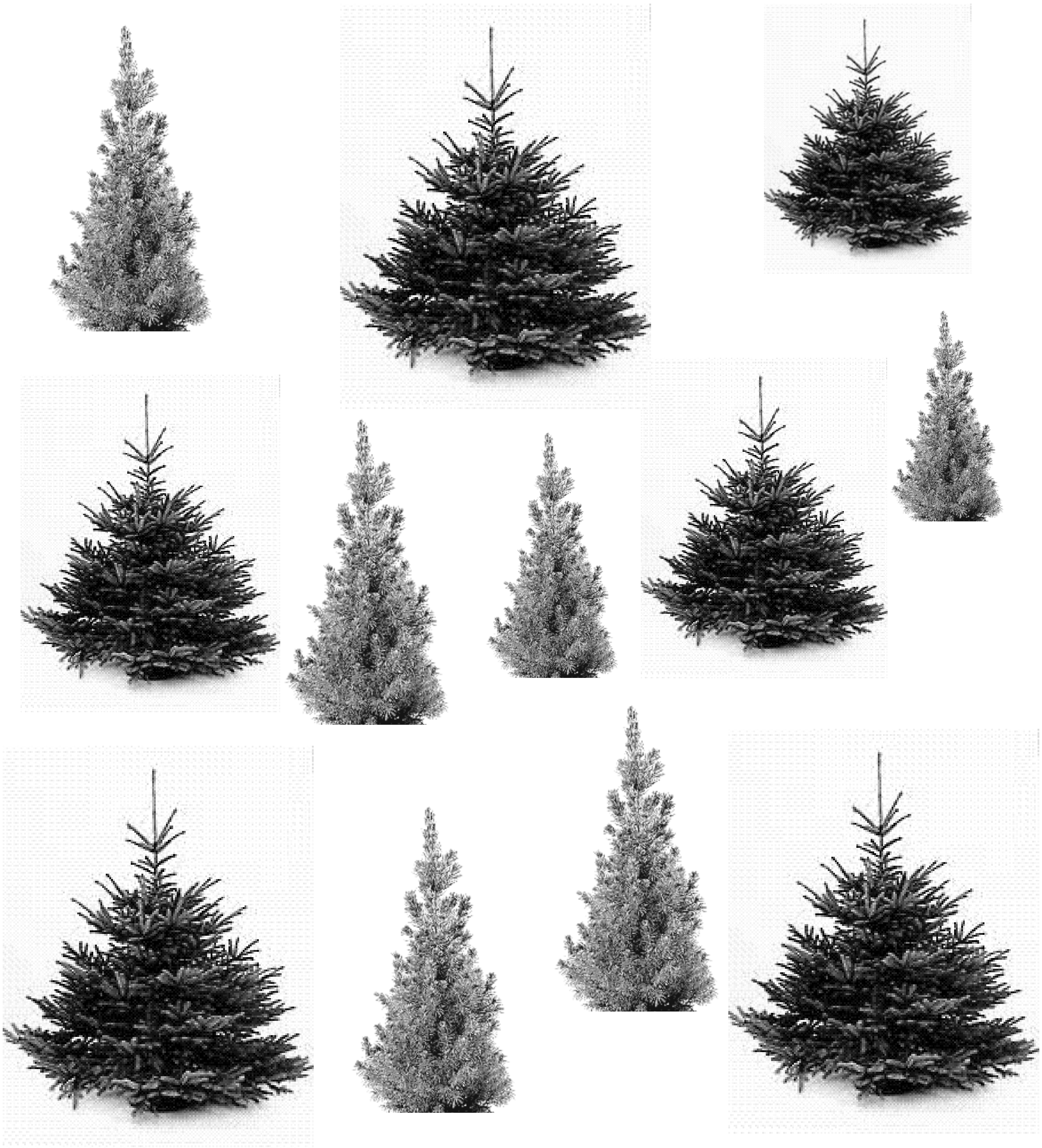
Nieuwe wiskunde tweede fase
Profiel C&M en E&M
Freudenthal instituut

Discrete Dynamische Modellen

Project: Wiskunde voor de tweede fase
Profiel: C&M en E&M
Domein: Discrete Dynamische Modellen
Klas: VWO 5
Staat: Tweede experimentele versie
Ontwerp: Heleen Verhage, Michiel Doorman, Wolfgang Reuter

Inhoud

Hoofdstuk 1- Oriëntatie



In dit eerste hoofdstuk maak je kennis met discrete dynamische modellen en hun verschillende verschijningsvormen. Bij het onderzoeken van die modellen zijn de grafische rekenmachine en een spreadsheet programma belangrijke hulpmiddelen.

1: Recurrente betrekkingen

In deze paragraaf maak je kennis met een nieuw type formules om processen te beschrijven. De grafische rekenmachine kun je goed gebruiken om met die formules de processen te onderzoeken.

1 Een bosbouwer moet beslissen hoeveel bomen er jaarlijks gekapt worden op een bepaald perceel en hoeveel nieuwe aanplant er nodig is. Op dat perceel staan 3000 bomen. Hij overweegt om jaarlijks 15% van de bomen te kappen en daarna 800 nieuwe bomen aan te planten. De vraag is: hoe ontwikkelt de omvang van dit bos zich op den duur?

a. Bereken voor de eerstvolgende vijf jaar het aantal bomen op dit perceel en schrijf je antwoorden in een tabel.

tijdstip t	*aantal bomen B op tijdstip t*
$t = 0$	$B = 3000$
$t = 1$	$B = ...$
$t = 2$	....
....	....
....	....
....	....

Bij deze berekeningen kun je goed gebruik maken van de ANS knop van de GR.
Tik eerst: 3000 [Enter]
dan: 0.85*[Ans] + 800 [Enter]
en vervolgens [Enter] [Enter]

gebruik de GR

b. Wat denk je, kan de bosbouwer zijn beleid blijven voortzetten?

c. Op een gegeven moment lijkt er een evenwicht te ontstaan. Hoeveel bomen staan dan op het perceel (vóór het kappen en bijplanten)?

2 De manier waarop je het volgende aantal bomen berekent kun je als volgt omschrijven:

nieuwe aantal = 0.85 ∗ oude aantal + 800

a. Het is niet eenvoudig om een direct verband te vinden tussen het aantal bomen B en de tijd t: $B(t) = \dots t \dots$ Je kunt bijvoorbeeld nog niet direct berekenen hoeveel bomen er zijn als $t = 53$.
Het is wel mogelijk om het aantal bomen B op tijdstip t te berekenen als je weet hoeveel bomen er het jaar ervoor waren. Beschrijf in eigen woorden waarom de volgende formule dan correct is: $B(t) = 0.85 * B(t-1) + 800$.

b. Als er bovendien een beginwaarde $B(0)$ gegeven is, kun je met deze formule alle volgende waarden berekenen.
Stel $B(0) = 1000$. Ontstaat dan op den duur hetzelfde evenwicht in het bos als bij opdracht **1** ?

Het berekenen van het aantal bomen voor het volgend jaar uit het aantal van het jaar daarvoor is wel te doen. Je moet wel een startwaarde (hier $B(0)$) hebben om ergens te kunnen beginnen. Je kunt het vergelijken met het oplopen van een trap, waarbij je steeds één trede verder gaat. Om boven te komen, moet je wel bij de eerste trede kunnen.

Herhaald invullen in de formule voor $B(t)$ geeft een *rij* van waarden:
$B(0)$, $B(1)$, $B(2)$, $B(3)$, ...
Het complete model voor het aantal bomen in het bos van opgave **1** is dus:

$B(0) = 3000$
$B(t) = 0.85*B(t-1) + 800$ voor $t = 1, 2, 3, ...$

recurrente betrekking

Een formule waarbij je de nieuwe waarde uitdrukt in z'n voorganger(s), wordt ook wel een *recurrente betrekking* genoemd. De formule voor $B(t)$ is daar een voorbeeld van. Een notatiewijze die ook veel gebruikt wordt is B_t. Soms wordt ook met n gewerkt in plaats van met t.

Sparen
Nederland spaart als nooit te voren. Het lijkt erop dat het aloude appeltje voor de dorst weer erg populair aan het worden is.

3 Een scholier heeft met een vakantiebaantje in de Kerstvakantie *f* 500,- verdiend. De scholier doet een eenmalige storting en zet het verdiende geld op een spaarrekening die 5% rente geeft. De rente wordt steeds na 1 jaar bijgeschreven en er is sprake van 'rente op rente'.

a. Zet in een tabel de groei van de spaarrekening voor de volgende 3 jaar.

tijdstip t (in jaren)	*bedrag op spaarrekening* (in guldens)
0	500
1	
2	
3	

b. Hoe ziet de recurrente betrekking voor het nieuwe kapitaal na t jaar: $K(t)$, uitgedrukt in het bedrag van het jaar daarvoor: $K(t-1)$ eruit?
$K(0) = ...$
$K(t) = K(t\text{-}1)$ ....

c. Reken de betrekking door op de grafische rekenmachine. Na hoeveel jaar is het beginkapitaal meer dan *f* 1000,-?

> Bij deze berekeningen kun je weer goed gebruik maken van de ANS knop van de GR.
> Tik eerst het beginkapitaal [Enter]
> dan de formule waarmee je de volgende berekent met Ans
> en vervolgens [Enter] [Enter]

4 Een beginkapitaal is *f* 75,- en de bank geeft 4.5% rente.
Voor de recurrente betrekking geldt: $K(0) = 75$.
Met welke van de volgende formules voor $K(t)$ kun je het model compleet maken?
(1) $K(t) = 4.5*K(t\text{-}1)$
(2) $K(t) = 1.045*K(t\text{-}1)$
(3) $K(t) = 1.045*(K(t) - 1)$
(4) $K(t) = K(t\text{-}1) + 0.045*K(t\text{-}1)$

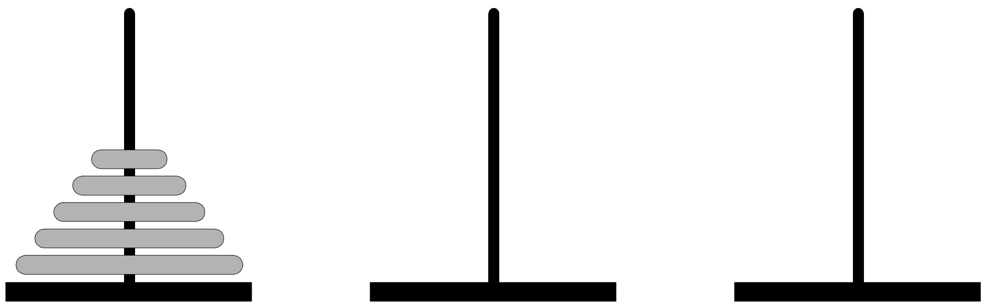
5 Op de dag dat hij 30 wordt, besluit een zelfstandig ondernemer om te gaan sparen voor zijn pensioen.
Vanaf dat moment zet hij aan het eind van *elke* maand voor dat doel *f* 100,- opzij.
De rente wordt per maand bijgeschreven en bedraagt 0,4% per maand.
a. Bereken de groei van deze spaarrekening in de eerste drie maanden.
b. Stel een formule (recurrente betrekking) op voor deze situatie.
Aanwijzing: laat de eerste storting plaatsvinden op $t = 1$ en neem t in maanden.
c. Hoeveel heeft deze ondernemer na 1 jaar bij elkaar gespaard, inclusief rente?

Je hebt nu drie recurrente betrekkingen gezien. Bij de bomen bleek de recurrente betrekking naar een evenwicht te gaan, bij het sparen blijven de bedragen groeien.

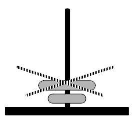
6 De recurrente betrekking kun je gebruiken om iets over een evenwicht te weten te komen. Voor het bos betekent een evenwichtsituatie dat het aantal bomen niet meer verandert.
Anders gezegd: ‘15% eraf’ moet hetzelfde zijn als ‘800 erbij’.
Gebruik dit gegeven om te controleren of je idee over het evenwicht bij opgave **1** correct was.

Op de problemen rond het vinden van evenwichten van recurrente betrekkingen komen we later terug, maar eerst ga je je in de rest van deze paragraaf oefenen in het ‘recurrente denken’.

Torens van Hanoi
Een bekend spelletje voor kinderen is ‘De torens van Hanoi’. Het spel bestaat uit drie pennen. Op de eerste pen ligt een toren van schijven, de grootste onderop:



Je kunt een schijf van een pen afhalen en op een andere pen schuiven. Het spel is om de hele toren op één van de andere pennen te krijgen volgens de volgende regel: je mag telkens maar één schijf verplaatsen en je mag niet een schijf op een kleinere leggen.



tip: gebruik munten

7 Speel het spel met een toren van 2 schijven. Hoeveel zetten heb je nodig?
En bij 3 schijven? En 4 schijven?

Er is een legende die zegt dat er in Hanoi een tempel staat, waarin monniken bezig zijn een toren van 64 schijven te verplaatsen. Volgens de legende zal de wereld vergaan zodra ze hiermee klaar zijn.
Het probleem is uitgewerkt door de Franse wiskundige Edouard Lucas in 1883.

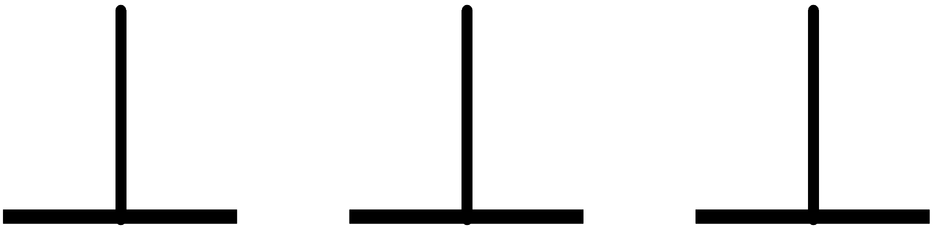
Paleis in Hue, de hoofdstad van Vietnam tjdens de Nguyen dynastie (1802-1945).

De kunst is, om de schijven in zo min mogelijk zetten op een andere pen te krijgen.

8 De vraag is: is het mogelijk te voorspellen hoeveel zetten je *minimaal* nodig hebt om een toren van 10 schijven te verplaatsen naar een andere pen?

a. Bij 4 schijven wordt het al tamelijk ingewikkeld. Maar misschien is het je opgevallen dat er wel enig verband is met het spel bij 3 schijven. Heb je daar al een vermoeden over? Zo nee, speel het spel nog een keer met vier schijven en probeer het verband te zien.

b. Stel je speelt het spel met 5 schijven.
Er is een ’halverwege’ tijdens het verplaatsen: als je de onderste schijf van de eerste pen naar een andere pen (zeg pen 2) verplaatst.
Wat is dan de situatie op de drie pennen?



c. Hoeveel zetten heb je nodig om halverwege te komen?
En hoeveel zetten heb je nodig om, na het verplaatsen van de onderste schijf, de hele toren op de tweede pen te krijgen?

9 **a.** Je antwoorden op de vorige opgave kun je gebruiken om een formule te vinden voor het plaatsen van een toren van n schijven als je weet hoeveel zetten je nodig hebt voor een toren met n-1 schijven.
Bedenk een recurrente betrekking waarmee je kunt berekenen hoeveel zetten je nodig hebt om een toren van n schijven te verplaatsen.

b. Hoeveel zetten heb je nodig om een toren van 10 schijven te verplaatsen?

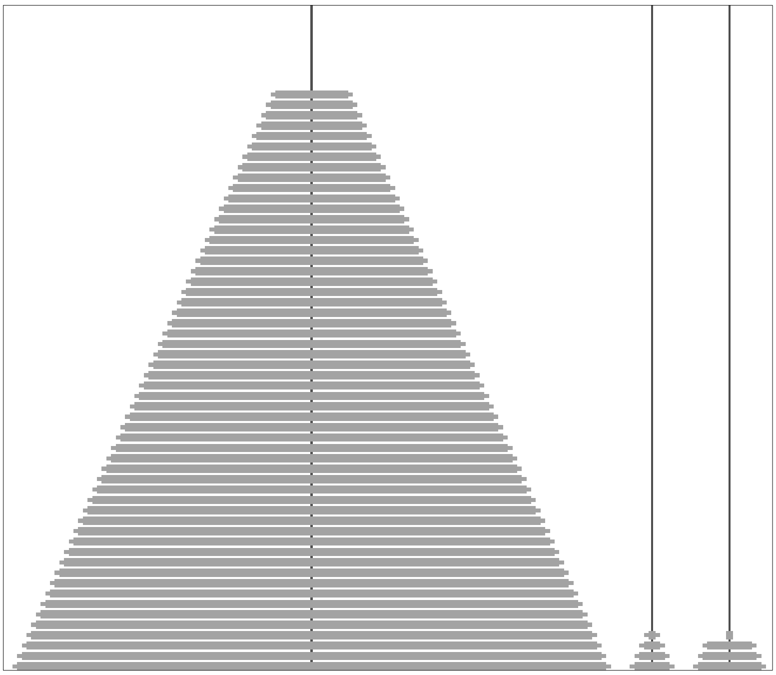
Het is mogelijk om het spel op internet te spelen:
http://www.quickaid.com/~merle/games/hanoi/start.html
http://www.math.clemson.edu/~phyllim/JavaClass/TOH/hanoi3/TOH.html

Misschien kloppen de verwijzingen inmiddels niet meer. Ongetwijfeld kun je het spel op andere lokaties vinden (zoeken naar: towers of hanoi).

onderzoek voor liefhebbers

10 Zoals je op de vorige pagina kon lezen heeft de wiskundige Lucas het probleem van het aantal zetten bij dit spel verder uitgewerkt. Bovendien bestaan er varianten op de torens van Hanoi. Zoeken op internet met de zoekwoorden “lucas” en “hanoi” geeft vele verwijzingen.
Zoek één of meer varianten van het spel en onderzoek of je daarbij ook een formule kunt vinden voor het aantal zetten.
Beschrijf in een kort verslag het spel en het aantal zetten dat nodig is. Maak hierbij gebruik van recurrente betrekkingen.

Hieronder zie je de 227-de zet bij een toren van 64 schijven.
De wereld zal vergaan na 18446744073709547518 zetten.



2: Recurrente betrekkingen doorrekenen

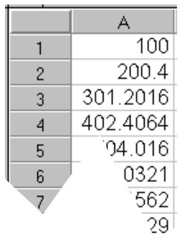
In de vorige paragraaf heb je al gezien hoe je de grafische rekenmachine kunt gebruiken om met recurrente betrekkingen te rekenen. De grafische rekenmachine heeft hiervoor meer mogelijkheden dan alleen rekenen met Ans. Bovendien kunnen ook computerprogramma's zoals een spreadsheet hiervoor goed gebruikt worden.

voorkennis Bij de volgende opgaven staan geen aanwijzingen hoe je een spreadsheet of de grafische rekenmachine kunt gebruiken. Voordat je aan de opgaven begint moet je er dan voor zorgen dat je de GR of het spreadsheet kunt bedienen. Zorg ervoor dat je het volgende weet:
- hoe je een formule moet intikken,
- hoe je een tabel maakt en
- hoe je grafieken maakt.

11 In opgave **5** over het sparen heb je de volgende recurrente betrekking gevonden:
$K(0) = 100$ (je begint met een inleg van 100 gulden)
$K(t) = 1.004 * K(t-1) + 100$ (0,4% rente per maand en 100 extra inleg per maand)

a. Maak een tabel van de recurrente betrekking en ga na wat het gespaarde bedrag is na 2 jaar.

b. Stel dat de maandelijkse inleg 75 gulden is en de rente 0,5% per maand.
Heb je dan na 2 jaar minder, evenveel of meer geld gespaard?

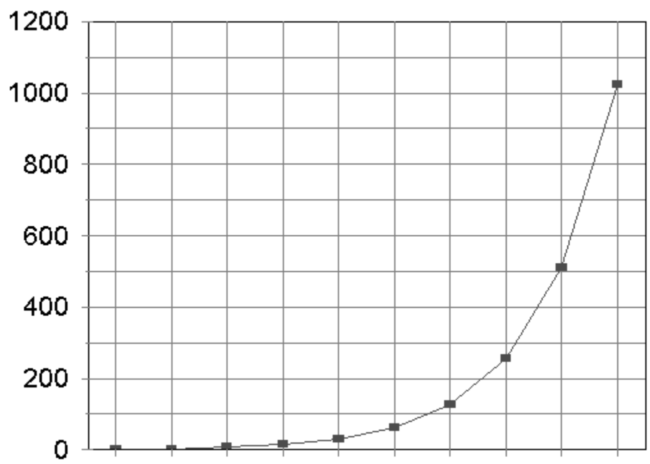


12 De recurrente betrekking bij de torens van Hanoi kun je ook zo invoeren.

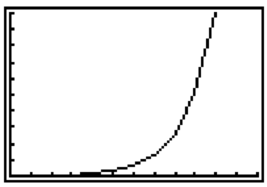
a. Bereken het aantal zetten dat je nodig hebt om een toren van 20 schijven te verplaatsen.

Hieronder zie je twee grafieken van de recurrente betrekking:

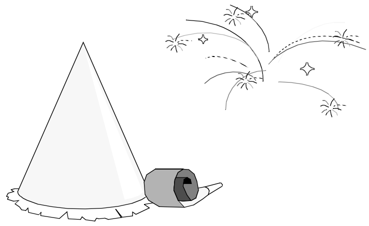
spreadheet:



GR:



b. Het aantal zetten dat je nodig hebt lijkt exponentieel te groeien.
Is er sprake van een constante groeifactor?



Shirley's verjaardag

Over drie weken is Shirley jarig. Ze wil een groot feest geven met veel vrienden, maar ze wil ook graag nieuwe mensen ontmoeten.

Ze bedenkt het volgende.

Vanaf nu nodig ik iedere dag één van mijn vrienden uit met de mededeling:
"*Vanaf overmorgen moet je ook iedere dag iemand uitnodigen. Bovendien moet je tegen die persoon hetzelfde zeggen als wat ik nu tegen jou zeg.*"

Vast staat dat ze zelf iedere dag iemand uitnodigt en er dus in ieder geval 21 vrienden komen. Van de rest zal ze misschien wel een aantal mensen kennen, maar er zullen zeker nieuwe gezichten bij zijn.
Shirley is tevreden. Alleen wil ze wel nog even nagaan hoeveel mensen ongeveer op haar feest komen. Om het uit te rekenen maakt ze een tabel. Shirley turft hoeveel mensen iedere dag worden uitgenodigd.
Eerst zet ze bij iedere dag een streepje, omdat ze zelf iedere dag iemand uitnodigt. Degene die ze op maandag heeft uitgenodigd, nodigt mensen uit op woensdag, donderdag, vrijdag en zaterdag. Degene die op dinsdag is uitgenodigd . . .

dag	***ma***	***di***	***wo***	***do***	***vr***	***za***
aantal mensen dat op die dag wordt uitgenodigd	I	I	II	III	IIIII	.....

13 a. Verklaar de 5 streepjes bij vrijdag.

b. Hoeveel mensen worden er zaterdag uitgenodigd?
Vervolgens kun je een tabel maken met het aantal mensen dat op het feestje komt (inclusief Shirley):

dag	***ma***	***di***	***wo***	***do***	***vr***	***za***
aantal mensen dat komt	2	3	5			

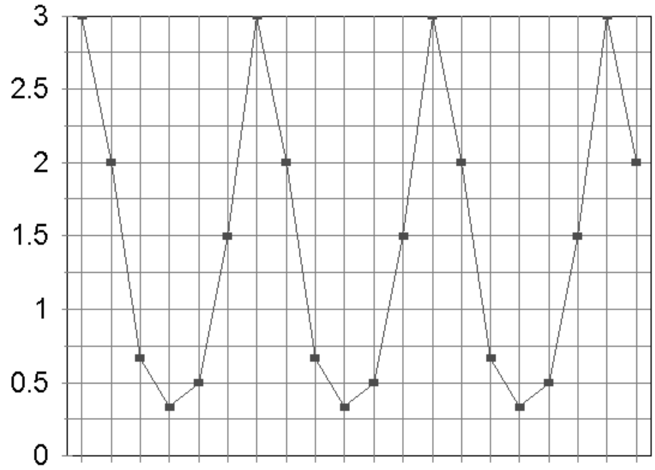
c. Vul de tabel verder in.

d. Nu weet je hoeveel mensen komen na 6 dagen. Maak eens een schatting van het aantal dat komt na 3 weken.

onderzoek

14 Shirley wil precies weten hoeveel mensen ze kan verwachten. Zij komt er niet uit.
Onderzoek hoeveel mensen Shirley kan verwachten. Maak een kort verslag van je onderzoek waarin je aangeeft hoeveel mensen er komen en hoe je dat bepaald hebt.
Onderzoek bovendien of het iets uitmaakt als Shirley haar opdracht een beetje verandert (bijvoorbeeld telkens twee uitnodigen, of vrienden pas na drie dagen laat uitnodigen, ...).
Geef tot slot in je verslag een advies aan Shirley. Als je haar plan niet zo slim vindt, geef dan een alternatief.

extra opgave **15** De recurrente betrekking $K(n) = K(n-1)/K(n-2)$ geeft bij geschikte begingetallen een periodieke grafiek.



Verklaar dit resultaat.

3: Exponentiële en geremde groei

In het eerste deel van deze paragraaf leer je om op een aantal verschillende manieren tegen exponentiële groei aan te kijken. In het tweede deel van deze paragraaf wordt het model voor exponentiële groei uitgebreid tot een model voor geremde groei. Verder leer je meer over hoe je de grafische rekenmachine kunt gebruiken bij het bestuderen van recurrente betrekkingen.

Bij de opdracht over de sparende scholier uit de eerste paragraaf heb je de volgende recurrente betrekking opgesteld:
$K(n) = 1.05\ K(n\text{-}1)$ met $n = 1, 2, 3,...$
$K(0) = 500.$

16 a. $K(1)$ kun je berekenen met $K(0)$. Je kunt de berekening voor $K(2)$ uitschrijven tot aan $K(0)$. Zo kun je ook vinden hoe je $K(3)$ kunt berekenen met $K(0)$.
Maak de berekeningen hieronder af.
$K(1) = 1.05\ K(0)$
$K(2) = 1.05\ K(1) = ...\ K(0)$
$K(3) = ...$

b. Laat zien dat de betrekking $K(n) = 1.05\ K(n\text{-}1)$ (met $K(0) = 500$) gelijkwaardig is met $K(n) = 500 * 1.05^n$, waarbij $n = 0, 1, 2, 3, ..$.

17 Om de grafiek van de exponentiële functie $K(n) = 500 * 1.05^n$ op de grafische rekenmachine te zien moeten eerst de grenzen van het tekengebied goed staan.

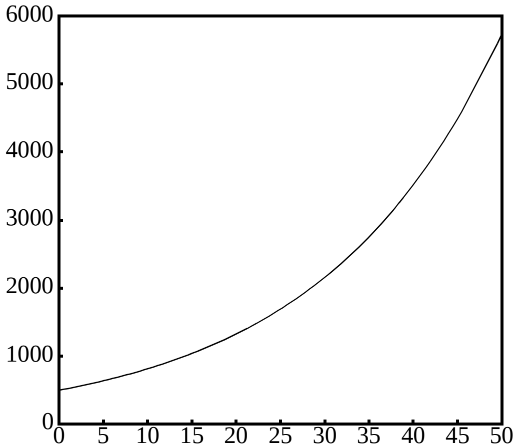
a. Hoe kies je de grenzen van het tekenscherm zodat je de grafiek van het gespaarde bedrag van de eerste 25 jaar ziet?

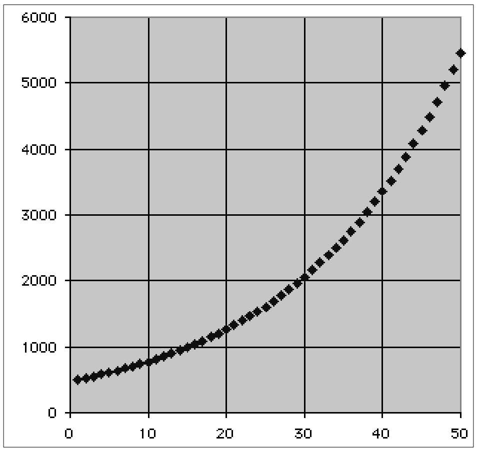
b. Laat de grafiek tekenen van de exponentiële functie $Y1 = 500 * 1.05^X$.

c. Beantwoord nogmaals vraag **3b** en controleer of je hetzelfde antwoord krijgt.

d. De scholier zegt: “Ik laat die 500 gulden rustig op de bank staan, en als het is aangegroeid tot *f* 10.000 geef ik er een feest van.” Komt dat feest er?

18 Hieronder staan twee mogelijke grafieken bij de functie $K(n) = 500 * 1.05^n$.





De “vloeiende” grafiek is gemaakt door een grafiekenprogramma en de stippengrafiek is gemaakt door het spreadsheet Excel.
Welke van de twee past volgens jou het beste bij de situatie, en waarom?

continu en discreet

De vloeiende curve is een voorbeeld van een *continue* grafiek, de stippen grafiek is een voorbeeld van een *discrete* grafiek. Bij continue verschijnselen vinden veranderingen geleidelijk plaats, terwijl bij discrete verschijnselen veranderingen sprongsgewijs verlopen.
In dit pakket richten we ons op discrete zaken. Daarbij kan het soms zo zijn dat een verschijnsel dat in feite continu is, discreet bekeken wordt, bijvoorbeeld door met een bepaald tijdsinterval metingen te doen.

19 In de werkelijkheid heb je continue en discrete verschijnselen.
Voor beide verschijnselen kun je een continu of een discreet model opstellen.
De vloeiende grafiek hierboven bij de situatie van het sparen is een continu model bij een discrete situatie.
Welke andere combinaties ben je tot nu toe tegengekomen in dit hoofdstuk?

recurrente betrekking op de GR

Je hebt de formule $K(n) = 500 * 1.05^n$ ingevoerd in de grafische rekenmachine met behulp van [Y=] en er een grafiek bij getekend. De grafische rekenmachine biedt ook de mogelijkheid om een recurrente betrekking in te voeren en daar een grafiek bij te tekenen.

20 a. Volg de aanwijzingen in het kader hieronder om de recurrente betrekking $K(n) = 1.05\ K(n\text{-}1)$ met $n = 1, 2, 3,...$ en $K(0) = 500$ in te voeren en teken er een grafiek van.
b. Controleer nu met TRACE nogmaals vraag **17c**.

aanwijzingen voor TI-83

Op de TI-83 moet je eerst de juiste MODE instellen.
Druk op de MODE-toets, en kies op de vierde regel SEQ.

Als je nu op de Y= toets drukt, verschijnt in het venster ‘u(*n*) =’, in plaats van het bekende ‘Y1=’. (Daaronder staat nog ‘v(*n*) =’, maar die gebruiken we nu niet.)

Om een formule in te tikken moet je weten: u zit onder de toets ‘7’, in combinatie met [2nd]. De *n* krijg je met de ouderwetse ‘X’-toets.

Maak op de GR de formule u(*n*) = 1.05*u(*n*-1)

Voordat de GR met deze formule uit de voeten kan, moet je nog wat instellen. Om te beginnen de beginwaarde *n*Min (waar *n* begint) en u(*n*Min), de beginwaarde van de recurrente betrekking.
Tenslotte vind je onder WINDOW de bekende waarden voor het tekenvenster. Bovendien kun je daar instellen voor welke *n* de waarde van u(*n*) berekend wordt en welke elementen van de rij u(0), u(1), u(2), . . . ‘geplot’ worden (let op: u(0) is dan het eerste element, vandaar PlotStart=1). Samengevat:

Rij instellen:	Window instellen:	
*n*Min = 0	*n*Min = 0	Xscl = 5
u(*n*) = 1.05*u(*n*-1)	*n*Max = 50	Ymin = 0
u(*n*Min) = {500}	PlotStart = 1	Ymax = 6000
	PlotStep = 1	Yscl = 1000
	Xmin = 0	
	Xmax = 50	

Tot nu toe hebben we op twee manieren tegen exponentiële groei aangekeken:
- als directe formule: $K(n) = 500 * 1.05^n$
- als recurrente betrekking: $K(n) = 1.05\ K(n\text{-}1)$ met $n = 1, 2, 3,...$ en $K(0) = 500$

De recurrente betrekking wordt ook wel eens anders geschreven. Men zorgt er dan voor dat in de formule voor $K(n)$ te zien is wat je *had* en wat *erbij komt*:
$K(n) = K(n\text{-}1) + 0.05\ K(n\text{-}1)$

21 Stel het betreft bij bovenstaande formules weer een spaarrekening met 5% rente. De twee betrekkingen zijn dus $K(n) = 1.05\ K(n\text{-}1)$ en $K(n) = K(n\text{-}1) + 0.05\ K(n\text{-}1)$.
Hoe kun je het onderscheid tussen deze twee recurrente betrekkingen in woorden omschrijven?

In de formule $K(n) = K(n\text{-}1) + 0.05\ K(n\text{-}1)$ is dus direct de toename te zien tussen de tijdstippen n-1 en n.

Δ*K*
(spreek uit als: delta *K*)

Deze toename wordt ook wel genoteerd als ΔK.
De algemene vorm van zo'n formule wordt dan:

$$\boxed{K(n) = K(n\text{-}1) + \Delta K}$$

Opmerking:
Eigenlijk moet bij ΔK aangegeven worden dat het de toename betreft tussen n-1 en n. Wij laten dat hier weg, omdat het bijna altijd direct duidelijk is wat bedoeld wordt.

In sommige boeken kom je echter notaties tegen als: $\Delta K(n\text{-}1)$ of $\underset{t=n-1}{\overset{n}{\Delta}} K(t)$.

In de situatie hierboven geldt: $\Delta K = 0.05\ K(n\text{-}1)$.
Het getal 0.05 is de *groeivoet*.

22 Wat is het verband tussen groeivoet en groeifactor?

exponentiële groei

23 Ga na dat exponentiële groei met een groeivoet g weergegeven kan worden door het model:

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta K = g * K(n\text{-}1) \\ &K(n) = K(n\text{-}1) + \Delta K \end{aligned}}$$

differentievergelijking

Deze notatiewijze met ΔK verklaart waarom een recurrente betrekking ook wel *differentievergelijking* genoemd wordt. (Differentie betekent verschil, denk aan het Engelse 'difference'). De differentie is het verschil tussen oud en nieuw.

Je kunt exponentiële groei ook beschrijven met behulp van *woordformules.*
Het kan bijvoorbeeld zo:

toename = groeivoet * oud
nieuw = oud + toename

24 Schrijf de volgende recurrente betrekkingen in de vorm met D, zodat ja aan de recurrente betrekking kunt zien, wat de toename is.
Als er sprake is van exponentiële groei, geef dan aan wat de groeivoet en de groeifactor zijn.

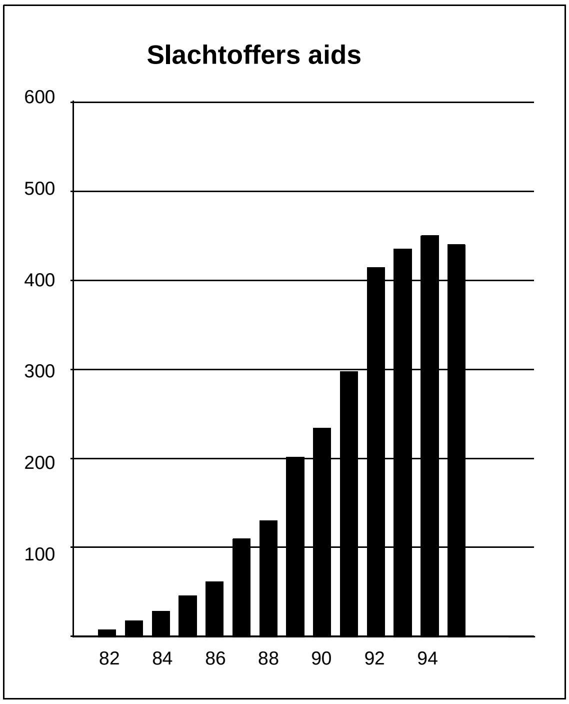
a. $U(0) = 1$
$U(n) = 2\ U(n\text{-}1)$

b. $K(0) = 100$
$K(t) = 1.004 * K(t-1) + 100$

c. $V(0) = 6000$
$V(n) = 0.75\ V(n\text{-}1)$

Niet alles in het leven is zo voorspelbaar als een renterekening met een vast rentepercentage. In de praktijk komt het nogal eens voor dat een bepaald proces in eerste instantie exponentieel lijkt te groeien, maar dat er geleidelijk aan remmers gaan optreden, waardoor de groei afneemt. In het tweede deel van deze paragraaf gaan we kijken hoe dit aspect verwerkt kan worden, uitgaande van het model voor exponentiële groei.

25 Een grafiek afkomstig uit de Volkskrant (oktober 1996):



jaar	*aantal slachtoffers*
1982	8
1984	28
1986	61
1988	129
1990	233
1992	413
1994	448

a. Maak een bijschrift bij deze grafiek, waaruit het verloop van het aantal aidsslachtoffers blijkt. In welk jaar treedt volgens jou een kentering op?

b. Enkele jaren terug kopte een krant: *Aantal aids-slachtoffers in Nederland neemt exponentieel toe*. Ga na of dit een zinnige kop was, door te kijken of je een passend exponentieel model kunt maken bij (een deel van) de grafiek. Gebruik de GR als je dat handig vindt.

De overheid van een bepaald land besluit in het kader van de aids-bestrijding een campagne te starten over veilig vrijen. Men neemt een onderzoeksbureau in de arm om na te gaan in welke mate de bevolking bereikt wordt met zo'n campagne. Het land telt 10 miljoen gezinnen (elke zelfstandige wooneenheid wordt een 'gezin' genoemd).

model opstellen

De onderzoeker van het bureau wil een wiskundig model opstellen bij deze vraagstelling. Om dat te kunnen doen, maakt hij gebruik van de volgende gegevens:

- volgens de overheid is de beginsituatie dat 1% van de gezinnen al bekend is met veilig vrijen,
- als gevolg van de campagne zal het aantal bereikte mensen elk jaar toenemen met 80% van het aantal mensen dat reeds bekend is met veilig vrijen (een ervaringsfeit uit andere campagnes).

Deze aannames leiden tot het model:

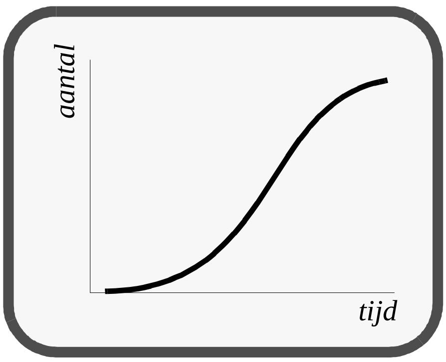
$\mathrm{D}N = 0.8 * N(t\text{-}1)$
$N(t) = N(t\text{-}1) + \mathrm{D}N$
met $N(0) = 1$
en $N(t)$ het percentage gezinnen dat op tijdstip t bereikt is (t in jaren).

26 a. Welk type groei hanteert de onderzoeker kennelijk? Wat is de groeivoet? En de groeifactor?
b. Waarom zal de onderzoeker met percentages werken, en niet met absolute aantallen gezinnen?
c. Herschrijf het model zodat DN er niet meer in voorkomt. Hiermee is het model in een recurrente vorm gebracht die geschikt is voor de grafische rekenmachine (u(n) = ...).
d. Voer het model in de GR in. Welke waarden moet je bij WINDOW instellen om de groei voor de eerste 10 jaar in een grafiek te zien?
e. Na hoeveel jaar is tenminste de helft van het aantal gezinnen bereikt?
f. Na hoeveel jaar zijn alle gezinnen bereikt?
g. Maakt het voor de antwoorden op de vorige vragen uit wat de bevolkingsomvang van het land is?

Volgens dit model neemt het percentage geïnformeerde gezinnen steeds sneller toe, zelfs tot boven de 100%. Dat kan natuurlijk niet en in de praktijk blijkt het ook niet zo te gaan. De onderzoeker weet uit ervaring dat als bij voorlichtingscampagnes eenmaal ongeveer de helft van de mensen bereikt is, het steeds langzamer gaat.

S-curve

Dit verschijnsel wordt goed weergegeven door een zogenoemde *S-curve*:



27 Hoe kun je aan de *S*-curve zien dat de groei als het ware steeds meer wordt afgeremd?

remfactor

De onderzoeker wil dit fenomeen verwerken in het model voor exponentiële groei dat als uitgangspunt was genomen. Hij doet dit door een *remfactor* in de toename-vergelijking te brengen.

oud model	*nieuw model*
DN = 0.8 ∗ $N(t\text{-}1)$ $N(t) = N(t\text{-}1)$ + DN	DN = 0.8 ∗ $N(t\text{-}1)$ ∗ *remfactor* $N(t) = N(t\text{-}1)$ + DN

De remfactor moet zo gekozen worden dat de remming sterker wordt naarmate het percentage mensen dat al bereikt is, groter is.
Anders gezegd: hoe groter $N(t\text{-}1)$ hoe sterker de remfactor moet werken.

28 De onderzoeker neemt als remfactor $\left(1 - \frac{N(t-1)}{100}\right)$.

- **a.** Verklaar dat dit inderdaad op den duur remmend werkt.
- **b.** Vanwaar het getal 100 in de remfactor?
- **c.** Welke waarden kan de remfactor aannemen?

Het bijgestelde model wordt:

DN = 0.8 ∗ $N(t\text{-}1)$∗ $\left(1 - \frac{N(t-1)}{100}\right)$

$N(t) = N(t\text{-}1)$ + DN
$N(0) = 1$

NB: de groeivoet (in het voorbeeld 0.8) is dus een constante, de waarde van de remfactor verandert steeds.

model op de GR

Om na te gaan wat precies het effect van de remfactor is, kun je het model doorrekenen met de grafische rekenmachine.

29 a. Hoe moet je het model herschrijven om het geschikt te maken voor invoer in de grafische rekenmachine.
Laat het exponentiële model staan in $u(n)$ en gebruik voor dit nieuwe model v(n)=... .

- **b.** Laat de grafiek tekenen (pas zo nodig de instellingen voor het tekenscherm aan) en ga na dat je inderdaad een *S*-curve krijgt.
- **c.** Na hoeveel jaar is volgens dit model tenminste de helft van het aantal gezinnen bereikt? Wanneer zijn alle gezinnen bereikt?
- **d.** Vergelijk deze antwoorden met de antwoorden die je krijgt bij het exponentiële model.

verzadigings nivo

Het getal 100 in de remfactor geeft het percentage mensen aan dat maximaal bereikt kan worden. In het algemeen staat dit getal voor het *verzadigingsnivo* (ook wel grenswaarde genoemd).

Het algemene model voor *geremde groei* (men spreekt ook wel van logistische groei) luidt in woorden:

toename = groeivoet ∗ oud ∗ remfactor
nieuw = oud + toename

met

$$\textbf{\textit{remfactor}} = \left(\mathbf{1} - \frac{\textbf{\textit{oud}}}{\textbf{\textit{verzadigingsnivo}}}\right)$$

Dit model in woorden kun je omwerken tot:

$$\textbf{\textit{nieuw}} = \textbf{\textit{oud}} + \textbf{\textit{groeivoet}} * \textbf{\textit{oud}} * \left(\mathbf{1} - \frac{\textbf{\textit{oud}}}{\textbf{\textit{verzadigingsnivo}}}\right)$$

N(t) = N_t

Om de algemene formule niet te ingewikkeld te maken, schrijven we hieronder N_t in plaats van $N(t)$. N_t staat dus voor de omvang van N op tijdstip t.

geremde groei model

In formulevorm ziet het algemene model voor geremde groei er dan zo uit:

$$\boxed{N_t = N_{t-1} + g \; N_{t-1} \left(1 - \frac{N_{t-1}}{K}\right)}$$

waarbij g de groeivoet is en K het verzadigingsnivo.

Het verzadigingsnivo kan overigens ook in absolute aantallen genomen worden. Soms is het echter praktisch om te normeren op 100%, zo kun je grote getallen vermijden.
In de bovenstaande vorm is het model ook geschikt voor de grafische rekenmachine.

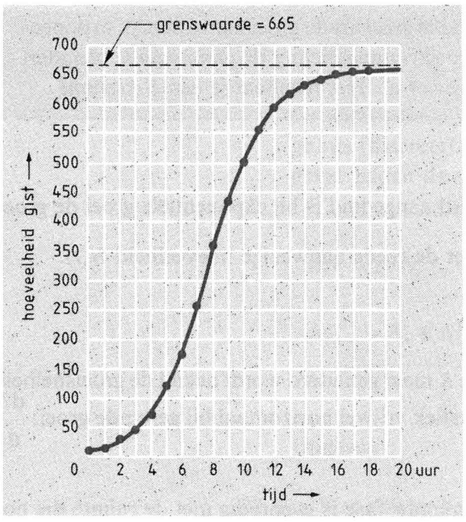
30 Laat zien dat je het algemene model ook kunt schrijven als:

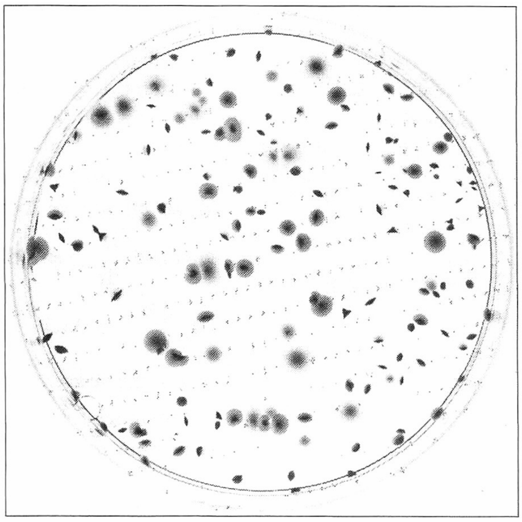
$$N_t = (1+g)N_{t-1} - \frac{g}{K}N_{t-1}^2$$

31 a. Stel een model voor geremde groei op met: $N_0 = 10$, $g = 1$ en $K = 1000$.
Hoe lang duurt het voordat N ongeveer 500 is?
En wanneer is de grenswaarde K bereikt?

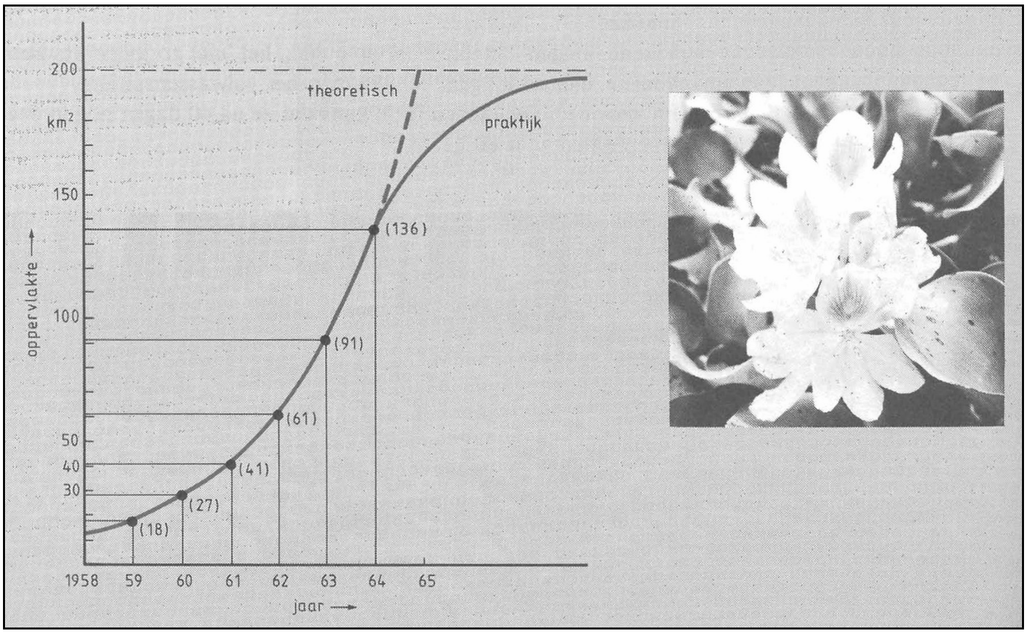
b. Beantwoord dezelfde vragen voor het geval dat de grenswaarde 2000 is.

32 De grafiek hieronder is gemaakt naar aanleiding van een laboratoriumexperiment met een kolonie gistcellen.
Maak op basis van deze grafiek een wiskundig model voor de groei van de kolonie en ga na of je model een goede beschrijving is voor de meetwaarden. Gebruik hierbij een spreadsheet of grafische rekenmachine.




Een kolonie gistcellen

33 De volgende grafiek heeft betrekking op de toename van waterhyacinten in het stuwmeer van de Gebel Auliadam.
Probeer een zo goed mogelijk wiskundig model op te stellen bij dit groeiproces.



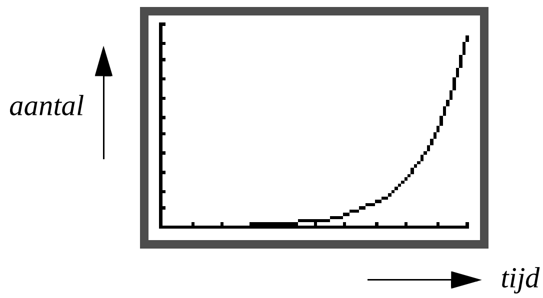
4: Web-grafieken

Van een aantal recurrente betrekkingen heb je grafieken gezien. Bij al die grafieken stond langs de horizontale as de (discrete) variabele n of t. In deze paragraaf maak je kennis met een ander type grafische voorstelling bij recurrente betrekkingen.

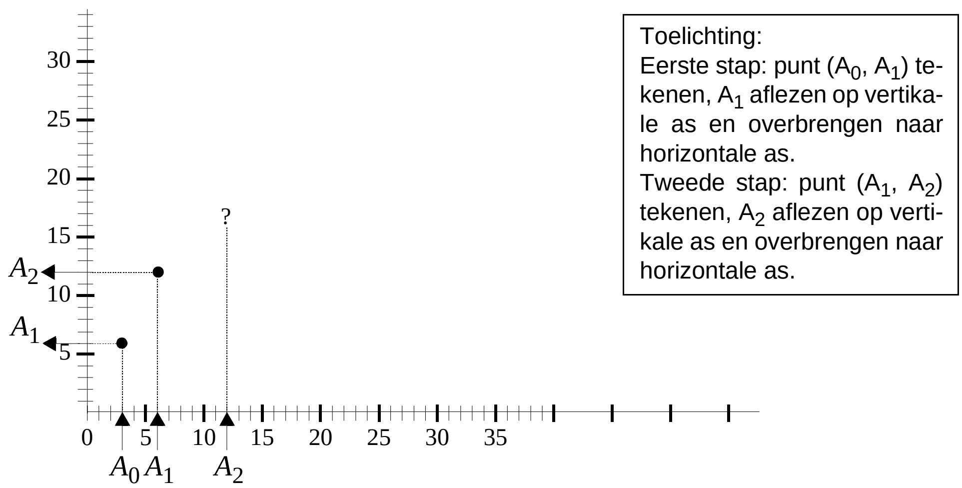
Bekijk bijvoorbeeld een waterplantje dat zo snel groeit dat iedere week het aantal plantjes verdubbelt. De recurrente betrekking van het aantal plantjes op tijdstip t is dan:

$A_t = 2 * A_{t-1}$

Afhankelijk van de beginhoeveelheid A_0 geeft dit de volgende grafiek op de grafische rekenmachine; horizontaal staat de tijd t en vertikaal het aantal plantjes:



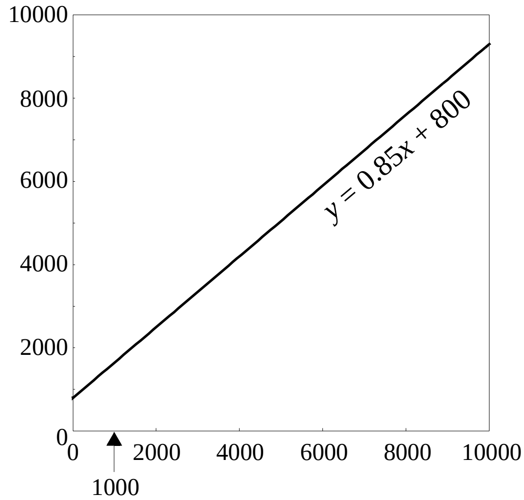
Het is ook mogelijk om een ander type plaatje te construeren bij een recurrente betrekking. Een plaatje waarbij horizontaal óók het aantal plantjes staat. Dit klinkt gek, maar je zult straks zien wat je daar aan hebt.
Stel bijvoorbeeld dat je begint met 3 plantjes ($A_0 = 3$), A_1 kun je dan berekenen en daarmee A_2 en daarmee . . .



34 a. Construeer zo ook A_3 en A_4.
b. De punten (A_0, A_1) en (A_1, A_2) en . . . (A_{n-1}, A_n) liggen alle op een bekende grafiek. Welke formule hoort bij die grafiek?
c. Als je de waarde van A_0 anders kiest, verandert dan ook de formule die je bij **b** hebt gevonden?

Alle punten (A_{n-1}, A_n) liggen dus op een grafiek waarvan je de formule uit de recurrente betrekking kunt afleiden. Dat principe kunnen we bij de volgende opgaven gebruiken.

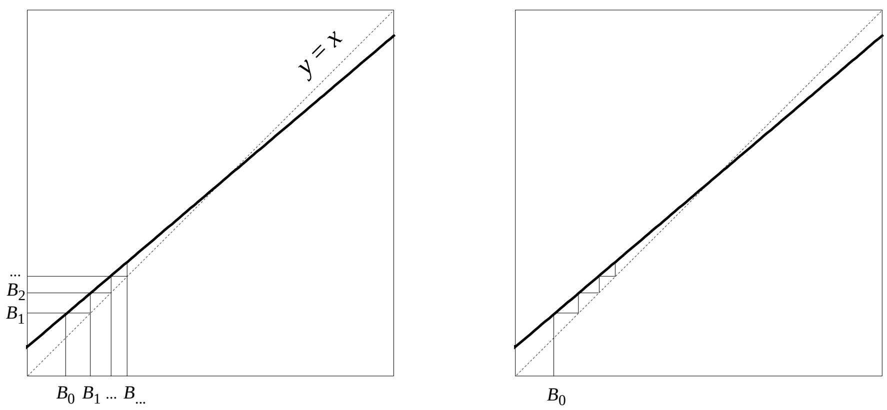
De recurrente betrekking voor het bos in de eerste paragraaf was:
$B(t) = 0.85\ B(t\text{-}1) + 800$ (met t in jaren).
Voor het bekijken van de ontwikkeling van het bos kun je dus gebruik maken van de grafiek van $y = 0.85\ x + 800$:



35 a. Hoe kun je met behulp van de grafiek van $y = 0.85\ x + 800$ het aantal bomen van volgend jaar schatten als je weet dat het dit jaar 1000 zijn?

b. Schat met behulp van de grafiek het nieuwe aantal als je weet dat er 8000 bomen zijn.

Om zonder rekenen te kijken wat er op den duur met het aantal bomen gebeurt, moet in de grafiek het *nieuwe aantal* van de vertikale as overgebracht worden naar de horizontale as (daarmee wordt *nieuw* dus *oud*).
Een handig hulpmiddel daarbij is de grafiek van $y = x$ (gestippeld in de figuur):



36 a. Wat moet er op de drie open plekken in het linker plaatje staan?

Rechts zie je hoe je kunt reconstrueren wat uiteindelijk met het bos gebeurt als je begint met B_0. Dit plaatje is een verkorte weergave van het plaatje links.

b. Maak de constructie 5 stappen verder af (vergroot de figuur uit in je schrift, en voeg de schaalverdeling toe).
c. Wat zal er bij het snijpunt van de twee grafieken gebeuren?
d. Bereken de coördinaten van het snijpunt.
Wat heeft dit te maken met opgave **6** uit de eerste paragraaf?
e. Wat gebeurt er als je begint met een aantal bomen dat groter is dan één van de coördinaten van het snijpunt.

web

Het plaatje dat in de rechter grafiek ontstaat heet een *web*. Het is een handig hulpmiddel om grafisch te onderzoeken wat er gebeurt met recurrente betrekkingen waarbij K_n uitgedrukt is in K_{n-1}.

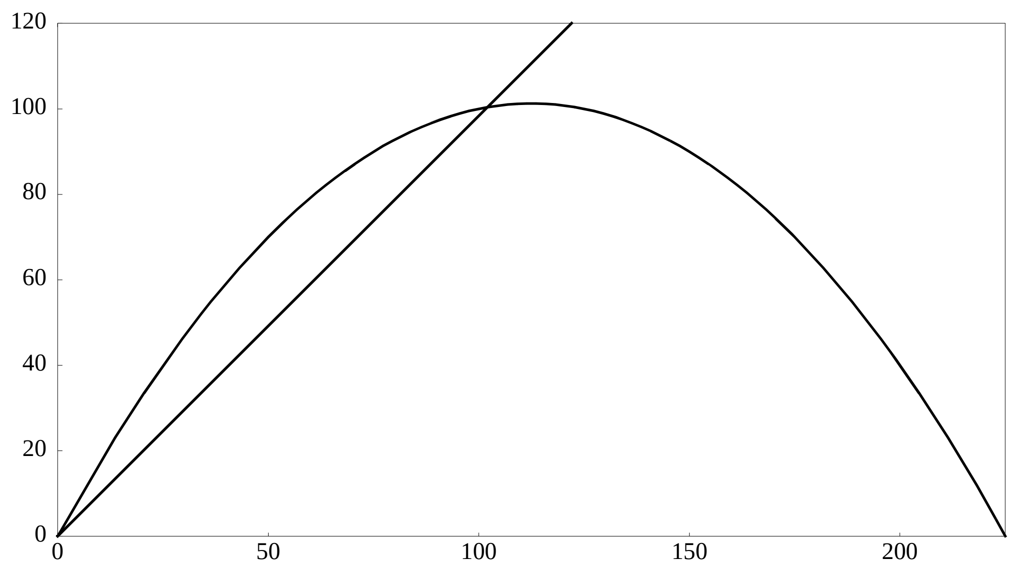
evenwichts-punt

Het snijpunt van de twee grafieken in het web speelt een bijzondere rol. Als je daar eenmaal inzit, kom je er nooit meer uit. Vertaald naar de recurrente betrekking betekent dit dat $U_n = U_{n-1}$. Voor de recurrente betrekking is het dus een *evenwichtspunt*.

Opmerking: als de recurrente betrekking niet lineair is, kan er meer dan één snijpunt zijn.

De logistische groei van de voorlichtingscampagne uit de vorige paragraaf gaf ook een recurrente betrekking die met een web te onderzoeken is:
$U_n = U_{n-1} + 0.8\, U_{n-1}\, (1 - U_{n-1}/100)$

37 a. Verklaar waarom de punten (U_{n-1}, U_n) op de grafiek liggen van
$y = -0.008\, x^2 + 1.8x$.
b. Hieronder zie je de twee grafieken van $y = -0.008\, x^2 + 1.8x$ en van $y = x$.
Neem als beginwaarde $U_0 = 10$ en teken in de twee grafieken een web om te onderzoeken wat er gebeurt.



c. Bereken de snijpunten van de twee grafieken. Wat is hun betekenis in de context van de voorlichtingscampagne?

web op de GR

Op de grafische rekenmachine kun je ook een web maken. Dat gaat zo:
Voer om te beginnen de recurrente betrekking in.
Kies FORMAT (boven de ZOOM-toets).
Je hebt tot nu toe gewerkt met de keuze Time (van tijd-grafiek). Kies nu Web.
Kies vervolgens passende WINDOW-instellingen voor het tekenscherm en druk op GRAPH om de grafieken te laten tekenen.
Gebruik vervolgens TRACE voor het opbouwen van het web.
Het web begint bij de waarde u(*n*Min) die je hebt opgegeven, met behulp van het pijltje naar rechts wordt het Web opgebouwd.

38 a. Voer de betrekking van het voorbeeld over de voorlichtingscampagne in.
Om een web-grafiek op het scherm te zien moet je er dus voor zorgen dat horizontaal en vertikaal ongeveer dezelfde grenzen staan (bijvoorbeeld van 0 tot 120).
Volg de aanwijzingen in het kader hierboven en teken het web op de grafische rekenmachine.
Ga na dat het web inderdaad blijft 'hangen' bij (100,100).
b. Wat gebeurt er als je de startwaarde u(*n*Min) varieert.

39 Maak nogmaals een web-grafiek bij het bomenprobleem, maar nu op je grafische rekenmachine. Onderzoek met een aantal verschillende startwaarden wat bij het snijpunt van de twee grafieken gebeurt.

40 Bij opgave **3** over sparen kan ook een web-grafiek gemaakt worden. Tegen welk praktisch probleem loop je aan als je dit doet?

41 Maak een web bij de waterplantjes uit het begin van deze paragraaf. Wat is het evenwichtspunt?

42 Maak een web-grafiek van het geremde groei model van opgave **32** over het laboratoriumexperiment met de kolonie gistcellen.

stabiel en instabiel evenwicht

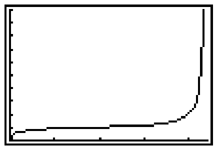
In sommige gevallen blijkt dat als je U_0 in de buurt van een evenwichtspunt kiest dat dan het proces nadert naar dat evenwichtspunt. Je spreekt dan van een *stabiel evenwicht*. Als dit niet het geval is dan is het een *instabiel evenwichtspunt*.

43 Ga na wat het karakter is van de evenwichtspunten uit de opgaven **39** tot en met **42**.

44 Onderzoek in de volgende gevallen of er evenwichtspunten zijn. Zo ja, bekijk dan of er sprake is van een stabiel of een instabiel evenwicht.
a. $U_n = 2*U_{n-1} - 2$
b. $U_n = 180 - 0.5\ U_{n-1}$
c. $U_n = 1 + 1/U_{n-1}$

45 a. Bij de volgende recurrente betrekking is er precies één raakpunt in de web-grafiek: $U_n = 0.5 * U_{n-1}^2 + 0.5$.
Kun je zeggen dat het raakpunt een stabiel evenwichtspunt is?

b. Onderzoek nu wat er gebeurt met de recurrente betrekking $U_n = 0.5 * U_{n-1}^2 + 0.51$.
Hiernaast zie je de tijd-grafiek met n van 0 tot 42.
Verklaar ook hiermee wat er in het web gebeurt.



onderzoek

46 Bij het discrete model voor geremde groei kunnen onverwacht vreemde verschijnselen optreden. Ga uit van het model

$$N_t = N_{t-1} + g \quad N_{t-1} \left(1 - \frac{N_{t-1}}{K}\right)$$

Onderzoek dit model voor verschillende waarden van g tussen 0 en 4.
Onderscheid verschillende gevallen. Geef aan bij welke waarden van g en K je in de verschillende gevallen terecht komt.
Maak een kort verslag van je bevindingen.
Zet de resultaten bijvoorbeeld in een tabel. Gebruik grafieken om aan te geven hoe de gevallen van elkaar verschillen.

5: Vraag en aanbod

Deze paragraaf gaat over vraag/aanbod modellen uit de economie. Als in zo'n model een tijdsvertraging wordt opgenomen, spreekt men van een dynamisch model. Wat je in het voorafgaande geleerd hebt, kun je hierop toepassen.

Elk jaar weer nemen een heleboel scholieren een beslissing over wat ze na de middelbare school gaan doen. Velen van hen beginnen aan een vervolgopleiding. De grote vraag is dan natuurlijk: wat ga je studeren?

47 Welke motieven spelen voor jou een rol bij het maken van die keuze?

De situatie op de arbeidsmarkt kan één van je motieven zijn. Voor sommige studierichtingen is het bepaald niet eenvoudig om het beroepsperspectief in te schatten. Neem bijvoorbeeld de studie informatica.

48 Aan informatici is op dit moment een tekort (denk maar eens aan het millenniumprobleem). Het aantal studenten is bovendien vrij laag. Probeer te bedenken wat er de komende tien jaar zou kunnen gebeuren.

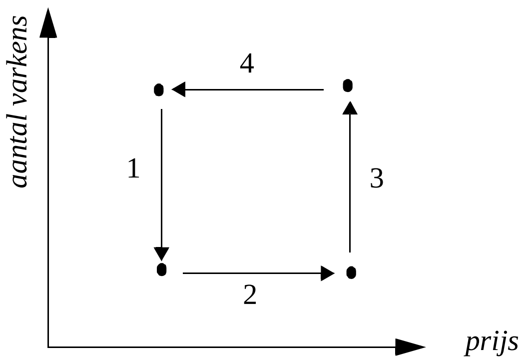
varkens-cyclus

Fluctuaties hebben zich altijd al voorgedaan in de economie. Heel bekend is het verhaal van de varkenscyclus. Wellicht ken je dit fenomeen van de economie-lessen, en anders kun je aan de hand van een aantal wetmatigheden dit verhaal zelf reconstrueren.

Over de varkensmarkt zijn de volgende wetmatigheden bekend:
- als de prijs van varkensvlees laag is, trekken varkensfokkers zich terug uit de markt
- een gering aanbod van varkens leidt, bij gelijkblijvende vraag, tot een stijging van de prijs van varkensvlees
- een hoge prijs van varkensvlees maakt varkens interessant voor fokkers en trekt dus fokkers aan
- een overschot van varkens op de markt leidt tot een prijsdaling
- het vetmesten van een varken kost ongeveer anderhalf jaar

49 a. Op een zeker moment is de prijs van varkensvlees heel laag.
Schrijf een samenhangend betoog over wat je denkt dat er zal gebeuren op de varkensmarkt. Gebruik de wetmatigheden.

b. Het verhaal van de varkenscyclus kan ook grafisch in beeld gebracht worden. Bekijk de figuur hieronder en leg uit hoe die in elkaar zit.



Tot nu toe heb je louter *kwalitatief* geredeneerd, er kwam geen getal of formule aan te pas. Het is ook mogelijk om een dergelijke redenering met behulp van formules uit te werken in de vorm van een wiskundig model. Je moet daarbij (zoals altijd) wel beseffen dat zo'n model de werkelijkheid nooit precies kan weergeven. Modellen zijn meestal een sterkte vereenvoudiging van de werkelijkheid.

vraag/aanbod modellen

In de rest van deze paragraaf gaat het over *vraag/aanbod modellen* uit de economie.
De prijsvorming van goederen komt tot stand op de markt en is in het vervolg alleen afhankelijk van vraag en aanbod. De markt is in evenwicht als de gevraagde en de aangeboden hoeveelheid van een goed aan elkaar gelijk zijn.

Statisch model

We bekijken eerst een *statisch* vraag/aanbod model voor een bepaald goed. Met 'statisch' wordt bedoeld dat de tijd geen rol speelt. Het doel van de statische analyse is om een uitspraak te doen over evenwichtssituaties. In de modelvergelijkingen wordt vastgelegd hoe de gevraagde en aangeboden hoeveelheden afhangen van de prijs.
Aannames:

- als de prijs van het goed toeneemt, is het minder aantrekkelijk om het goed te kopen: de gevraagde hoeveelheid neemt af
- als de prijs van het goed toeneemt, is het aantrekkelijk om het goed te verkopen: de aangeboden hoeveelheid neemt toe
- alles wat op de markt wordt aangeboden, wordt onmiddellijk verkocht (er wordt dus niets opgepot of doorgedraaid)
- vragers en aanbieders reageren onmiddellijk op een prijsverandering.

Een voorbeeld van een eenvoudig statisch model, in overeenstemming met deze aannames, is:

$Q^a = P - 40$ (de aanbodvergelijking)
$Q^v = -1.5P + 240$ (de vraagvergelijking)

Q^a en Q^v staan voor de aangeboden en de gevraagde hoeveelheid; P staat voor de prijs. De indices ^{a} en ^{v} zijn ^{boven} gezet om $_{onder}$ ruimte te houden voor de tijdsindex $_t$.

50 Hoe vind je de eerste twee aannames terug in de twee vergelijkingen?

De markt is in evenwicht als $Q^a = Q^v$ (de evenwichtsvergelijking).

51 a. Teken de grafieken van Q^a en Q^v in één figuur.
b. Bereken de evenwichtsprijs. Anders gezegd, bij welke prijs geldt $Q^a = Q^v$?
c. Welke hoeveelheid hoort hierbij?
d. Stel dat de vragers bij iedere prijs 10 eenheden meer kopen, wat wordt dan het nieuwe evenwicht?

Dynamisch model

De volgende stap is om dit model dynamisch te maken, dat wil zeggen dat rekening gehouden wordt met tijdsvertragingen. In het verhaal van de varkenscyclus is dat de vertraging die optreedt bij het fokken van varkens.
De eerste drie aannames blijven hetzelfde, de laatste vervangen we door:

- aanbieders reageren vertraagd op een prijsverandering: het aanbod $Q^a{}_t$ op tijd stip t wordt bepaald door de prijs van een periode eerder (P_{t-1})
- vragers reageren onmiddellijk op een prijsverandering.

52 Maak het statische model van hiervoor dynamisch door de nieuwe vraag-, aanbod en evenwichtsvergelijking op te stellen, rekening houdend met de aannames.

Q^a_t = ... (de dynamische aanbodvergelijking)
Q^v_t = ... (de dynamische vraagvergelijking)
...... = ... (de evenwichtsvergelijking)

met
Q^a_t de aangeboden hoeveelheid in de *t*-de periode
Q^v_t de gevraagde hoeveelheid in de *t*-de periode

De dynamische analyse richt zich op het proces dat via de markt tot stand komt (vergelijk het verhaal van de varkenscyclus). Wat er gaat gebeuren, hangt in elk geval af van de prijs in de beginsituatie, zeg op $t = 0$. Door invullen en gebruik maken van de evenwichtsvergelijking kun je achtereenvolgens berekenen:

$P_0 \dashrightarrow Q^a_1 \dashrightarrow Q^v_1 \dashrightarrow P_1$

$P_1 \dashrightarrow Q^a_2 \dashrightarrow Q^v_2 \dashrightarrow P_2$

P_2 -->..... --> .....

53 Gegeven is het dynamische vraag/aanbod model:

$Q^a_t = P_{t-1} - 60$
$Q^v_t = Q^a_t$
$Q^v_t = -2P_t + 300$

a. Stel dat op $t = 0$ de prijs 80 is, dus $P_0 = 80$. Bereken uit $Q^a_1 = P_0 - 60$ het aanbod één periode later.
b. In de laatste kolom van de tabel hieronder staat dat je P_t kunt berekenen uit $P_t = 150 - 0.5\ Q^v_t$. Verklaar dit.
c. Zet de berekeningen voort en schrijf de resultaten in een tabel:

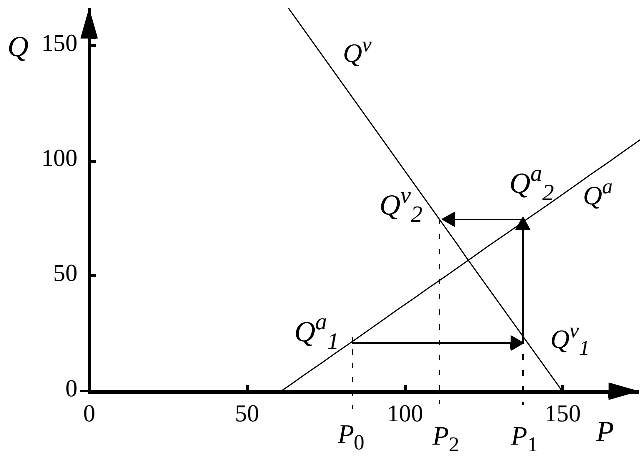
t	P_{t-1}	Q^a_t ($=P_{t-1} - 60$)	Q^v_t ($= Q^a_t$)	P_t (= $150 - 0.5\ Q^v_t$)
1	80	.....	.....	.....
2	.....	.....	.....	.....
3	.....	.....	...	.....
4	.....	.....	...	.....
5				
6				
7				

De prijsontwikkeling bij dit dynamische model kan in beeld gebracht worden door gebruik te maken van de grafiek van het bijbehorende statische model.
Dat is het model dat je krijgt als je de tijdsindices weglaat:

$Q^a = P - 60$
$Q^v = -2P + 300$
$Q^a = Q^v$

54 Teken de grafieken van Q^a en Q^v in één figuur.

Hieronder is een deel van deze figuur uitvergroot. Er is ook een begin gemaakt met het intekenen van de opeenvolgende prijzen:



55 a. Vergelijk deze figuur met de tabel uit opgave **52**. Hoe kun je de getallen uit de tabel terug vinden in de figuur?
b. Zet de figuur nog enkele stappen voort.
c. Trek een voorlopige conclusie: waar lijken P resp. Q op den duur naar toe te gaan?

56 Hoe komt de figuur eruit te zien als je een andere beginwaarde neemt?
Ga dit na voor $P_0 = 60$, $P_0 = 120$ en $P_0 = 140$.

spinneweb-theorema

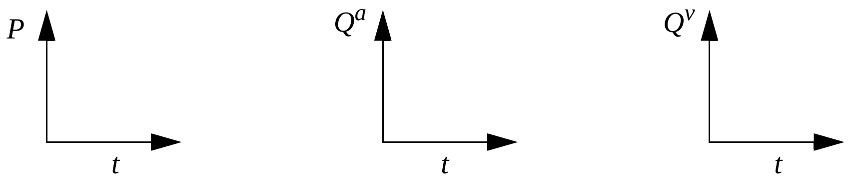
Het cyclische proces dat zich bij dit soort dynamische vraag/aanbod situaties afspeelt, wordt in de economie ook wel het ‘spinneweb-theorema’ genoemd. De aanduiding ‘spinneweb’ verwijst naar de wijze waarop het cyclische proces van elkaar afwisselende overschotten en tekorten grafisch in beeld gebracht kan worden.

57 Teken het spinneweb bij het dynamische vraag/aanbod model dat je bij opgave **52** hebt opgesteld. Kies zelf een beginwaarde.

58 Wat is het verschil tussen de ‘web-grafiek’ uit de vorige paragraaf en de grafische voorstelling van het ‘spinneweb-theorema’ uit de economie?

horizontaal de tijd

Er zijn ook andere grafieken mogelijk bij het dynamische model, en wel grafieken met op de horizontale as de *tijd*:



59 Teken deze drie grafieken met horizontaal de tijd en vertikaal respectievelijk P, Q_a en Q_v. Neem weer $P_0 = 80$.
In principe wordt dit een stippengrafiek, maar het is niet ongebruikelijk om voor de duidelijkheid de stippen door middel van lijnstukjes met elkaar te verbinden.

evenwichts-waarde

Wellicht doen je antwoorden vermoeden dat (in dit voorbeeld) de prijs toegaat naar de *evenwichtswaarde* die hoort bij het statische model. In de evenwichtswaarde van het dynamische model moet gelden dat de prijs niet meer verandert, ofwel: $P_t = P_{t\text{-}1}$.

60 Bekijk nog eens het dynamische model van opgave **52**:
$Q^a{}_t = P_{t\text{-}1} - 40$
$Q^v{}_t = Q^a{}_t$
$P_t = 160 - 2/3\ Q^v{}_t$
a. Bereken de evenwichtswaarde van dit model door te stellen dat dan moet gelden: $P_t = P_{t\text{-}1}$.
b. Klopt het vermoeden? Verschilt dit van het evenwicht van het statische model?

Aan bovenstaande werkwijze merk je dat je in de modelvergelijkingen van het dynamische model de tijdsindices net zo goed kunt weglaten bij het berekenen van het evenwicht. Maar . . . . dan krijg je het bijbehorende statische model. Conclusie: het evenwicht bij het dynamische model is gelijk aan het evenwicht bij het overeenkomstige statische model. De evenwichtsprijs wordt ook wel aangeduid met $\overline{P}$.
In schema:

Het dynamische model:
$Q^a{}_t = P_{t\text{-}1} - 60$
$Q^v{}_t = -2P_t + 300$
$Q^a{}_t = Q^v{}_t$

Evenwicht als $P_t = P_{t\text{-}1}$

Het statische model:
$Q^a = P - 60$
$Q^v = -2P + 300$
$Q^a = Q^v$

Los $\overline{P}$ op uit:
$-2\overline{P} + 300 = \overline{P} - 60$

De evenwichtswaarden zijn $\overline{P} = 120$ en $\overline{Q} = 60$

Verkorting model

De dynamische vraag/aanbod modellen die we bekeken hebben bestaan steeds uit drie vergelijkingen: een vraagvergelijking, een aanbodvergelijking en een evenwichtsvergelijking.

61 a. Laat zien dat je het model
$Q^v_t = -2P_t + 300$
$Q^a_t = P_{t-1} - 60$
$Q^a_t = Q^v_t$
kunt reduceren tot de differentievergelijking $P_t = -0.5\,P_{t-1} + 180$.

b. Bereken uit deze betrekking nogmaals de opeenvolgende waarden van P_t, als weer gegeven is dat $P_0 = 80$.
Controleer of je dezelfde uitkomsten krijgt als hiervoor bij opgave **53**.

62 a. Stel een differentievergelijking op voor P_t bij het model:
$Q^a_t = 0.8P_{t-1} + 4$
$Q^v_t = -1.4\,P_t + 20$
$Q^a_t = Q^v_t$
met $P_0 = 10$

b. Teken ook een grafiek van de prijsontwikkeling in de tijd en bereken de evenwichtsprijs.

63 a. Stel een differentievergelijking op voor P_t bij het model:
$Q^a_t = 2\,P_{t-1} - 10$
$Q^v_t = -\,P_t + 30$
$Q^a_t = Q^v_t$
met $P_0 = 10$

b. Teken ook een grafiek van de prijsontwikkeling in de tijd en bereken de evenwichtsprijs.

c. Bij dit model doet zich iets vreemds voor. Wat?

64 Kun je, door nog eens terug te kijken naar de verschillende modellen, bedenken waar het van afhangt of de prijs wel of niet naar het evenwicht toe gaat?

Je weet nu hoe je P_t rechtstreeks kunt berekenen uit z'n voorganger, dus zonder tussenkomst van Q^a_t en Q^v_t. Het blijft echter wel bewerkelijk om bijvoorbeeld P_{10} te berekenen, als je moet beginnen bij P_0. Je moet dan immers alle tussenliggende waarden eerst uitrekenen. Hoe dat korter kan, is het onderwerp van het volgende hoofdstuk.

Samenvatting

Er zijn situaties waarbij je de nieuwe waarde kunt berekenen vanuit oude waarden. Een formule waarbij je de nieuwe waarde uitdrukt in z'n voorganger(s), heet een *recurrente betrekking*. Dit in tegenstelling tot een *directe formule*, waarbij je niet de nieuwe waarde uitdrukt in oude waarden, maar waarmee je de nieuwe waarde direct uit een andere variabele (bijvoorbeeld de tijd) berekent.

voorbeeld
Op een spaarrekening staat *f* 500,-. Ieder jaar komt er 5% rente bij. Het kapitaal K na n jaren kun je op twee manieren modelleren:
– met een recurrente betrekking:

$$\boxed{\begin{array}{l} K(0) = 500 \\ K(n) = 1.05 * K(n\text{-}1) \end{array}}$$

– met een directe formule: $K(n) = 500 * 1.05^n$

De algemene vorm van een recurrente betrekking voor *exponentiële groei* met beginwaarde B en groeifactor f is:

$$\boxed{\begin{array}{l} K(0) = B \\ K(n) = f * K(n\text{-}1) \end{array}}$$

Een bijzondere vorm van een recurrente betrekking is die waarbij de *differenties* in een aparte formule staan. De recurrente betrekking uit bovenstaand voorbeeld wordt dan:

$$\boxed{\begin{array}{l} K(0) = 500 \\ \Delta K = 0.05 * K(n\text{-}1) \\ K(n) = K(n\text{-}1) + \Delta K \end{array}}$$

Als exponentiële groei in deze vorm beschreven wordt dan staat de groeivoet van de exponentiële groei in de formule voor de differenties. Er geldt: *groeifactor* = 1 + *groeivoet*.

De algemene vorm van een recurrente betrekking voor logistische (of geremde) groei is:

$$\boxed{N_t = N_{t-1} + g\ N_{t-1}\left(1 - \frac{N_{t-1}}{K}\right)}$$

In deze formule is g de *groeivoet* en K het *verzadigingsnivo*.

Van een recurrente betrekking kun je meestal aan een *web*- of aan een *tijd-grafiek* zien of de waarden naderen naar een *evenwicht*.
Voor het evenwicht van een recurrente betrekking $K(n)$ geldt: $K(n) = K(n\text{-}1)$. Met deze vergelijking is meestal de exacte waarde van een evenwicht te berekenen.

Een *dynamisch vraag-aanbod model* is een recurrente betrekking tussen vraag, aanbod en prijs met de tijd als lopende variabele. Zo'n model is *statisch* te maken door de tijdsindices uit het dynamische model weg te laten.

Hoofdstuk 2 - Theorie met toepassingen

6: Rijen

In het vorige hoofdstuk heb je een aantal verschillende verschijnselen bestudeerd:
a. het aantal bomen op een bosperceel
b. de groei van een kapitaal door rente-op-rente
c. het aantal zetten bij de torens van Hanoi
d. de toename van het aantal geïnformeerde gezinnen bij een voorlichtingscampagne
e. dynamische vraag/aanbod modellen
Gemeenschappelijk aan deze voorbeelden is, dat een volgende waarde steeds uit zijn voorganger(s) berekend kan worden. Als bovendien een beginwaarde bekend is, zijn alle waarden te berekenen door herhaald uitvoeren van het rekenvoorschrift dat gegeven is door een recurrente betrekking of een differentievergelijking.

Na het oriënterende eerste hoofdstuk gaan we in dit hoofdstuk wat verder in op de theorie. Bij de behandeling daarvan grijpen we diverse malen terug op het rente-op-rente probleem van de sparende scholier:
$K_n = 1.05\ K_{n-1}$ *met* $n = 1, 2, 3, ...$
$K_0 = 500$

discrete functie

Omdat de rente één keer per jaar wordt bijgeschreven, kan n alleen natuurlijke waarden aannemen. K wordt wel een *discrete functie* van n genoemd. De functiewaarden van K zijn: K_0, K_1, K_2, K_3, K_4, ... enzovoort.

rij

Omdat de functie eigenlijk bestaat uit een *rij getallen*, kun je ook spreken van de *rij K*. De functiewaarden heten ook wel *termen* van de rij. De beginwaarde K_0 is de eerste term van de rij.

meetkundige rij

Bij de rij K kun je elke volgende term vinden door z'n voorganger te vermenigvuldigen met de groeifactor 1.05. Een rij met deze eigenschap heet een *meetkundige rij (*ook wel exponentiële rij genoemd). Het onderwerp meetkundige rijen komt aan bod in het vierde klas pakketje Discrete Analyse. In deze paragraaf herhalen we kort de belangrijkste zaken.

Een meetkundige rij met begingetal a en groeifactor r ziet er zo uit:
$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ...$
Een meetkundige rij kun je net zo ver door laten lopen als je wilt: het is een oneindige rij.

Eerst een paar oefenopgaven:

1 Een meetkundige rij met groeifactor 3 heeft als vijfde getal het getal 1377.
a. Hoe groot is de eerste term van deze rij?
b. Bereken ook de tiende term.

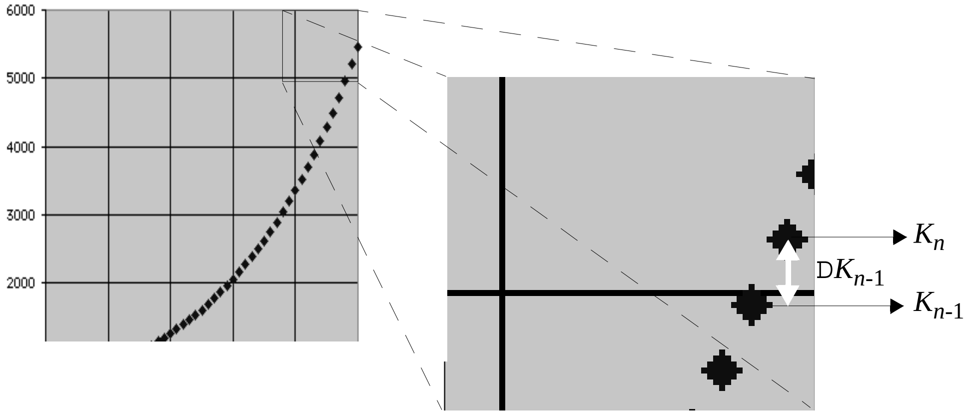
2 Van een meetkundige rij $t_n = t_0\ .r^n$ is gegeven dat $t_6 = 32$ is en $t_{12} = 2048$.
a. Bepaal het begingetal t_0 en de groeifactor r.
b. Bepaal ook de som van de eerste dertien termen, dus $t_0 + t_1 + t_2 + ... + t_{12}$.

3 **a.** Schrijf de eerste zes termen op van de rij met groeifactor -1 en eerste term 1.
b. Wat kun je zeggen over de som van de eerste n getallen?

4 Gegeven is een rij M met groeifactor 0.9 en beginwaarde 1000.
Welk getal in de rij is het eerst voorkomende getal dat kleiner is dan 500?
Het hoeveelste getal in de rij is dit?

toename

Het verschil van twee termen in een rij heet een *toename*. De toename tussen twee opeenvolgende termen K_{n-1} en K_n wordt genoteerd als DK. Als niet zonder meer duidelijk is welke twee opeenvolgende termen bedoeld worden, wordt het volgnummer van de eerste term toegevoegd en schrijf je DK_{n-1}.



5 Ga na dat $DK_0 + DK_1 + DK_2 + ... + DK_{n-1} = K_n - K_0$
en leg in woorden uit wat hier staat.

6 Terug naar de sparende scholier (zie Hoofdstuk 1, opgave **3**).
Ga na dat het kapitaal van de sparende scholier na 5 jaar fl. 638,14 bedraagt en dat het rentegedeelte hiervan fl. 638,14 - fl. 500 = fl. 638,14 is.

De berekening van het rentedeel is gebaseerd op het idee dat

eindkapitaal - inleg = rentedeel

Er is nog een tweede manier om het rentedeel te berekenen. Die is wat ingewikkelder, maar toch nuttig, zoals verderop zal blijken. Het idee is:

som van toegevoegde rentebedragen = rentedeel

ofwel:

som van de toenamen = rentedeel

Bij deze manier bereken je dus de toegevoegde rentebedragen (de toenamen DK) van alle jaren afzonderlijk en vervolgens tel je die bij elkaar op.

7 Wat hebben deze woordformules met opgave **5** te maken?

8 In de onderstaande tabel is een begin gemaakt met deze berekening. De pijltjes geven de berekeningsvolgorde aan: K_0 --> DK_0 --> K_1 --> DK_1 --> ....

a. Controleer met een berekening dat inderdaad $K_1 = K_0 + \mathrm{D}K_0$ en $K_2 = K_1 + \mathrm{D}K_1$

b. Maak deze tabel af.

jaarnummer n	toegevoegde rente per jaar: toename DK_{n-1}	nieuw kapitaal: $K_n = K_{n-1} + \mathrm{D}K_{n-1}$
0		$K_0 = 500$
1	$\mathrm{D}K_0 = 500 * 0.05$	$K_1 = 500 * 1.05$
2	$\mathrm{D}K_1 = (500 * 1.05) * 0.05$	$K_2 = 500 * 1.05^2$
3	$\mathrm{D}K_2 = (500 * 1.05^{2)} * 0.05$	$K_3 = ...$
4	....	....
5	....	....

Het totale toegevoegde rentedeel kun je nu bepalen door de toegevoegde rente over de vijf jaren bij elkaar op te tellen. Dat komt neer op het uitvoeren van de optelling:

$\mathrm{D}K_0 + \mathrm{D}K_1 + \mathrm{D}K_2 + \mathrm{D}K_3 + \mathrm{D}K_4$

9 Laat zien dat

$\mathrm{D}K_0 + \mathrm{D}K_1 + \mathrm{D}K_2 + \mathrm{D}K_3 + \mathrm{D}K_4 = 500 * 0.05 * (1 + 1.05 + 1.05^2 + 1.05^3 + 1.05^4)$

Dit is de tweede manier om het rentedeel te berekenen.

Oefening

10 Bereken op twee manieren het rentedeel als een kapitaal van fl. 800 voor een periode van 4 jaar wordt weggezet op een rekening die 6% rente geeft.

Als het puur om het berekenen van het rentedeel zou gaan, is de eerste manier natuurlijk verreweg het handigst.

Het naast elkaar zetten van de twee manieren dient echter een ander doel, namelijk het afleiden van een formule voor de som van n opeenvolgende termen van een meetkundige rij. Wiskundig geformuleerd: een formule voor $a + a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + ... + ar^{n-1}$
Aan de hand van het concrete voorbeeld van de renteopgave leiden we de bedoelde somformule af. Het eindresultaat staat op de volgende pagina.

afleiding somformule

Omdat de twee manieren om het rentedeel te bepalen het zelfde bedrag moeten opleveren, geldt:

rentedeel = eindkapitaal - inleg = som van de toenamen

11 Ga na dat dit bij het voorbeeld van de sparende scholier neerkomt op:

$500 * (1.05^5 - 1) = 500 * 0.05 * (1 + 1.05 + 1.05^2 + 1.05^3 + 1.05^4)$
ofwel:

$$(1.05^5 - 1) = 0.05 * (1 + 1.05 + 1.05^2 + 1.05^3 + 1.05^4)$$

generalisatie

Dit voorbeeld kun je algemeen maken, ofwel *generaliseren*.
In het voorbeeld gaat het over een beginkapitaal van fl 500,- , een rentefactor van 1.05 en een periode van 5 jaar. Vervang nu in de redenering het beginkapitaal van fl 500 door a, de rentefactor van 1.05 door r en de periode van 5 jaar door n.
De laatste formule wordt dan :

$$r^n - 1 = (r - 1)\ (1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1})$$

12 Controleer de juistheid van deze formule door haakjes weg te werken. Dat lijkt veel werk, maar als je er aan begint, zul je zien dat het mee valt.
TIP: Als je deze vraag niet ziet zitten, werk dan bij wijze van oefening eerst eens de haakjes weg in (r -1) (r + 1)

13 a. Leg uit dat deze formule ook geschreven kan worden als (mits r „ 1) :

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

b. De beginwaarde (fl. 500 in het voorbeeld, a in het algemene geval) komt in deze formule niet voor. Je kunt ook een formule maken waarin de beginwaarde wel is verwerkt.
Leg uit dat je dan de volgende formule krijgt(weer r „ 1):

$$\boxed{a + ar + a\ r^2 + \ldots + a\ r^{n-1} = a\ \frac{r^n - 1}{r - 1}}$$

somformule

Deze formule heet de *somformule* voor de eerste n termen van een meetkundige rij met begingetal a en groeifactor r. Met deze formule kun je dus de som van de eerste n termen berekenen.

14 a. Probeer zelf een formule te bedenken voor het geval $r = 1$.
b. Als r tussen 0 en 1 zit, is de noemer r - 1 negatief. Klopt de formule dan nog wel?

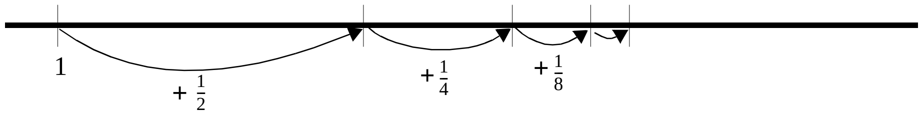
Deze somformule heb je in de rest van dit hoofdstuk op een aantal plaatsen nodig.

15 a. Bereken nogmaals de som die in opgave **2b** gevraagd wordt, maar nu met behulp van de somformule.
b. Idem voor opgave **3b**.

16 Zo nu en dan duikt het fenomeen van de kettingbrief op. Soms wordt de schijn gewekt dat je er geld mee kunt verdienen, dan weer wordt beloofd dat je heel veel lekkere recepten zult ontvangen. Het idee is steeds dat iedereen die de brief ontvangt, die doorstuurt naar een aantal personen. Stel je ontvangt een kettingbrief, die je de volgende dag volgens voorschrift doorstuurt naar zes personen. Deze groep van zes personen noemen we de eerste generatie. Neem aan dat iedereen van de eerste generatie de brief ook weer naar zes personen doorstuurt.
a. Bereken de totale omvang van de generatie nul (dat ben jij zelf) tot en met tien.
b. Na hoeveel generaties zou de totale wereldbevolking (ongeveer 6 miljard), theoretisch gesproken, bereikt kunnen zijn?
c. Waarom gaat het in werkelijkheid meestal niet zo snel?

17 a. Beredeneer wat ongeveer de uitkomst zal zijn van de som:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{14}$$



b. Bereken de precieze waarde met behulp van de somformule.

18 Iemand spaart door jaarlijks op 1 januari 600 gulden op een spaarrekening te storten, te beginnen vanaf 1 januari 1995 ($n = 0$). Op 1 januari het jaar daarop keert de bank 4% rente uit. De differentievergelijking die hier bij hoort is:
$K_n = 1{,}04\ K_{n\text{-}1} + 600$
$K_0 = 600$
K_n is het totale gespaarde bedrag (inclusief rente) na n jaar.

a. In het schema hieronder is in beeld gebracht hoe je door herhaald invullen K_1, K_2, , ... kunt berekenen. Schrijf op dezelfde manier de berekening van K_3.

b. Van welke meetkundige rij krijg je zo de opeenvolgende somwaarden te zien?

c. Hoe kun je de somformule gebruiken bij het berekenen van K_{20}?

1 jan 95 — $K_0 = 600$

1 jan 96 — $K_1 = 1.04 \times K_0 + 600 \quad = 1.04 \times 600 + 600$

1 jan 97 — $K_2 = 1.04 \times K_1 + 600 \quad = 1.04^2 \times 600 + 1.04 \times 600 + 600$

opmerking Het rentevoorbeeld uit het begin van deze paragraaf gaat over een *eenmalige* storting, waarvan de opeenvolgende rentebedragen bekeken zijn. Dit voorbeeld is gebruikt om de somformule *af te leiden*.
De opgave hierboven gaat over een *periodieke* storting die elk jaar herhaald wordt. Bij zo’n probleem kun je de somformule *toepassen*.
Deze twee situaties zijn essentieel verschillend.

19 In een pretpark staan allerlei apparaten, die om de zoveel tijd vervangen moeten worden. Wanneer dit moet gebeuren, is afhankelijk van de levensduur van het betreffende apparaat. Het blijkt dat de vervangingsprijs van een apparaat door prijsinflatie ieder jaar met 2,5% stijgt.
Stel, de nieuwwaarde van de draaimolen in 1996 is *f* 30.000,-. Z'n levensduur is 30 jaar, dus hij moet in 2026 vervangen worden.

a. Bereken de vervangingsprijs van de draaimolen in 2026.

Om een apparaat ook inderdaad te kunnen vervangen in het jaar dat dat nodig is, wordt er door de beheerder ieder jaar een vast bedrag opzij gezet. Over het gespaarde bedrag wordt 5% rente per jaar verkregen.
Het is de bedoeling dat je gereserveerde bedrag zó groot is dat je, inclusief rente, in het jaar van vervanging precies het juiste bedrag bijeen gespaard hebt.

b. Als de beheerder ieder jaar *f*750,- opzij zet, wordt dan het gereserveerde bedrag groot genoeg om de draaimolen te vervangen?

c. Bepaal zo nauwkeurig mogelijk het vaste reserveringsbedrag per jaar.

7: Het algemene model nader bekeken

In de vorige paragraaf heb je kennisgemaakt met meetkundige rijen en de somformule voor zo'n rij met n termen. In deze paragraaf pakken we de draad van de recurrente betrekkingen weer op. Met hulp van de computer ga je een bepaalde betrekking nader onderzoeken.

In deze paragraaf draait het om de betrekking:

$$X_n = aX_{n\text{-}1} + b$$
met beginwaarde X_0

1e orde lineaire differentie-vergelijking

De betrekking $X_n = aX_{n\text{-}1} + b$ wordt ook wel *1^e orde lineaire differentie vergelijking* genoemd. Het woord 'differentie' verwijst daarbij naar de schrijfwijze van de opgave hieronder, waarbij de notatie ΔX wordt gebruikt. Men spreekt van '1^e orde' omdat alleen de directe voorganger voorkomt en van 'lineair' omdat er alleen eerstegraads vormen in voorkomen (dus geen kwadraat o.i.d.). *a* en *b* heten de *parameters* van het model.

20 Laat zien dat je $X_n = aX_{n\text{-}1} + b$ ook kunt schrijven als:
$\Delta X_{n\text{-}1} = (a - 1)X_{n\text{-}1} + b$
$X_n = X_{n\text{-}1} + \Delta X_{n\text{-}1}$

21 Geef van de volgende differentievergelijkingen aan of ze '1e orde lineair' genoemd kunnen worden:
a. $X(t+1) = 2X(t\text{-}1) + 5$.
b. $Q_n = 0.8\ Q_{n\text{-}1} + 0.2\ Q_{n\text{-}2}$
c. $K_t = K_{t\text{-}1} - 0.1\ K_{t\text{-}1}^2$
d. $\Delta Y_{n\text{-}1} = p - q\ Y_{n\text{-}1}$

22 Kijk nog eens terug naar het eerste hoofdstuk. Welke van de volgende verschijnselen die daar aan bod kwamen, werden beschreven met een 1e orde lineaire differentievergelijking?
a. het aantal bomen op een bosperceel
b. de groei van een kapitaal door rente-op-rente
c. het aantal zetten bij de torens van Hanoi
d. het aantal mensen uitgenodigd voor Shirley's verjaardag
e. het aantal geïnformeerde gezinnen bij een voorlichtingscampagne
f. dynamische vraag/aanbod modellen.

Onderzoeksopdracht

In deze onderzoeksopdracht ga je een spreadsheet maken en gebruiken voor 1e orde lineaire differentievergelijkingen. De opdracht bestaat uit drie onderdelen.

a. Ontwerp een spreadsheet waarmee je op eenvoudige wijze differentievergelijkingen van de vorm $X_n = aX_{n\text{-}1} + b$ kunt doorrekenen. De spreadsheet moet er goed uitzien. Dit betekent tenminste:
   – een overzichtelijke schermindeling
   – invoergetallen van het model kunnen makkelijk gewijzigd worden
   – uitvoer: zowel een tabel als een grafiek (kies als type de xy-grafiek).

b. Gebruik de spreadsheet om experimenteel te bepalen welke verschillende gevallen er te onderscheiden zijn bij de betrekking $X_n = aX_{n\text{-}1} + b$ en verwerk je bevindingen in een verslag.

c. In het pakketje Discrete Analyse voor de vierde klas staat een onderzoeksopdracht over medicijngebruik. De opdracht aan de leerlingen was om te analyseren hoe de medicijnspiegel in je lichaam verloopt als je van een bepaald medicijn 3 keer per dag een dosering van 500 mg neemt en er dagelijks 25% van het medicijn verdwijnt door uitscheiding. Hieronder staan drie fragmenten van uitwerkingen van leerlingen.
Aan die fragmenten liggen verschillende wiskundige modellen (differentievergelijkingen) ten grondslag, waardoor de uitkomsten ook verschillend zijn.
Aan jou de opdracht om uit te zoeken welke modellen in die fragmenten gebruikt zijn. Gebruik de spreadsheet voor het nalopen van berekeningen.
Wat is je commentaar op de verschillende modellen?

Fragment 1

	1e x	2e x	3e x	totaal
dag 1	375	375	375	1125
dag 2	(1125+500)·0,75 1218,75	(1218,75+500) 0,75 1289,06	(1289,06+500)0,75 1341,8	1341,8
dag 3	(1341,8+500)·0,75 1381,35	(1381,35+500)0,75 1411,01	(1411,01+500) 0,75 1433,26	1433,26
dag 4	(1433,26+500) 0,75 ~~143~~ 1449,94	(1449,94+500)0,75 ~~14,62~~ 1462,46	(1462,46+500) 0,75 1471,84	1471,84
dag 5	(1471,84+500)0,75 ~~1846,84~~ 1470,88	(1470,88+500) 0,75 ~~1846,8~~ 1484,16	(1484,16+500)0,75 1488,12	1488,12
dag 6	(1488,12+500) 0,75 1491,09	(1491,09+500)0,75 1493,32	(1493,32+500)0,75 1494,99	1494,99

Fragment 2

1e dag werkt 1500 mg
2e dag werkt 1125 mg + 1500 mg = 2625 mg
3e dag werkt 844 mg + 1125 mg + 1500 mg = 3469 mg
4e dag werkt 633 mg + 844 mg + 1125 mg + 1500 mg = 4102 mg
5e dag werkt 475 mg + 633 mg + 844 mg + 1125 mg + 1500 mg = 4576 mg
6e dag werkt 356 mg + 475 mg + 633 mg + 844 mg + 1125 mg + 1500 mg = 4932 mg

dagen	1	2	3	4	5	6
werkend medicijn (mg)	1500	2625	3469	4102	4576	4932
toename werkend medicijn (mg)	-	1125	844	633	475	356

dus:

$2000 \cdot 0{,}75^x = y$

x = dagen
y = toename werkend medicijn (mg)

dagen	26	27	28	29	30	31
werkend medicijn (mg)	5996	5996,3	5996,9	5997,4	5997,8	5998,1
toename werkend medicijn (mg)	1	0,8	0,6	0,5	0,4	0,3

Met het slikken van een vaste dagelijks dosis zal een eindpeil 6000 mg niet bereikt worden. Dat blijkt uit de bovenstaande tabel.

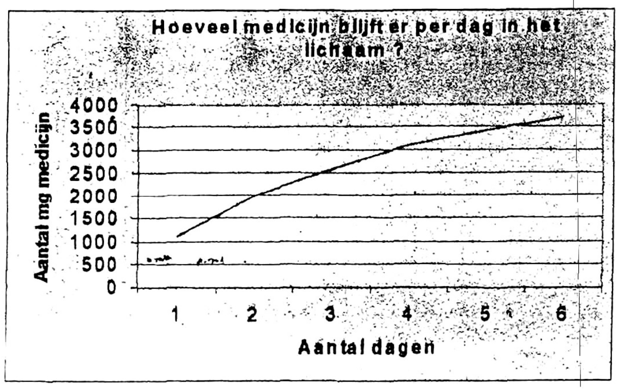
Fragment 3

de Medicijnspiegel

Als je eenmaal per dag naar het toilet gaat verlaat 25 % van de door jou ingenomen medicijnen je lichaam
Dat betekent dat als je eerste dag van je medicijngebruik 3 keer 500mg slikt er daarvan 1500 * 0,75 = 1125mg in je lichaam overblijft

Als je elke dag 3 keer 500mg van het medicijn zou slikken krijg je het volgende resultaat

Dag	*totaal (mg)*	*Vn1*	*Vn2*	*Vn3*
1	1125			
2	1986,75	843,75		
3	2601,5625	632,8125	210,9375	
4	3076,2	474,6375	158,175	52,7625
5	3432,1	355,9	118,7375	39,437
6	3699,09	266,99	88,91	29,8275



De verschilrijen worden niet constant dus is het ook niet mogelijk bij deze rij een directe formule te geven. Wel is er een recusieve formule die luidt : $t_{n+1} = (1500 + t_n) * 0,75$
Dit betekent dat het aantal medicijn in je lichaam geleik is aan het aantal van de vorige dag, daarbij komt 1500 mg en na het plassen blijft er nog 75 % van de totale hoeveelheid over in je lichaam

Het kan gebeuren dat je een dag vergeet je medicijnen in te nemen
Kun je dan zomaar de volgende dag de dubele dosis innemen en heeft dit gevolgen voor het eindpeil ?
Dat is in een tabel duidelijk weer te geven

Dag	*Constant*	*1 keer overslaan*
1	1125	1125
2	1986,75	843,75
3	2601,5625	2882,8125

Tussen de eindhoeveelheden zit niet zo een groot verschil, ongeveer 281,25 mg
Maar als je meerdere dagen overslaat en het later compenseert wordt het verschil steeds groter en krijgt het weldegelijk invloed op het eindpeil. Het is dan ook niet aan te raden dit te doen want hierdoor krijg je een veel te hoog eindpeil

Het kan natuurlijk ook voorkomen dat je een ander eindpeil hebt dan gewenst als je elke dag constant de medicijnen neemt. Dit kan komen doordat je gemiddeld meer of minder dan 25% uitscheid. Maar ook door hoe snel het lichaam de stoffen opneemt e.d

8: Een directe formule voor het algemene model

In de vorige paragraaf heb je met behulp van een spreadsheet experimenteel bepaald welk gedrag een 1[e] orde lineaire differentievergelijking kan vertonen. Deze paragraaf bouwt hier op voort, alleen gaan we nu meer theoretisch/analytisch te werk. De vraag waar het om draait, luidt:

Is er bij de $X_n = aX_{n-1} + b$ betrekking een directe formule te maken, waarmee je X_n rechtstreeks kunt uitdrukken in de beginwaarde X_0 en de parameters a en b?

Voor het geval $b = 0$ is deze vraag niet zo moeilijk, je hebt dan te maken met exponentiële groei met beginwaarde X_0 en groeifactor a. Blijft over het geval b „ 0. In schema:

Differentie-vergelijking

$X_n = aX_{n-1}$
met beginwaarde X_0

$X_n = aX_{n-1} + b$
met beginwaarde X_0

Directe formule

$X_n = a^n X_0$

(exponentiële groei)

?

Voorbeeld voor het geval $b = 0$:

Bij: $K_n = 1.04\, K_{n-1}$
$K_0 = 500$
hoort de directe formule: $K_n = 1.04^n * 500$

23 Welke directe formule hoort er bij $A(n+1) = 0.90\, A(n)$ als je bovendien weet dat A(5) = 1000?

Een voorbeeld voor het geval b „ 0 is een model voor het verloop van de medicijnspiegel, zoals

$U_n = 0.75\, U_{n-1} + 500$
$U_0 = 0$

24 a. Teken de grafiek bij dit model met spreadsheet of grafische rekenmachine. Neem n van 0 tot 20 en het tekenscherm [0 , 20] bij [0 , 2000].

b. Welk peil wordt uiteindelijk bereikt?

c. Beredeneer waarom het peil dat uiteindelijk bereikt wordt (de evenwichtswaarde), te berekenen is uit de vergelijking $U = 0.75\, U + 500$.

d. Controleer je antwoord op **b** door de vergelijking van **c** op te lossen.
e. Hoe ziet de directe formule voor U_n eruit in het geval $U_0 = 2000$?
f. Werk weer met $U_0 = 0$ en teken vervolgens in één figuur de grafieken van U_n en ook die van $V_n = 2000(1 - 0.75^n)$. Wat zie je gebeuren?

Het is inderdaad zo dat de grafieken van U_n en V_n samenvallen, maar om dat echt zeker te weten, is enige theorie nodig. Als je deze paragraaf uit hebt, heb je die theorie gehad. In die theorie speelt de evenwichtswaarde een belangrijke rol, dus daar gaan we eerst maar eens nader op in. Een bijkomend voordeel is, dat het niet zo moeilijk is om voor een willekeurige eerste orde differentievergelijking de evenwichtswaarde te bepalen.

25 Leg uit waarom de evenwichtswaarde van $X_n = aX_{n\text{-}1} + b$ gelijk is aan $\dfrac{b}{1-a}$

26 Bereken de evenwichswaarde bij het model
$B(t) = 0.85\,B(t\text{-}1) + 800$, met $B(0) = 3000$ (het bosperceel, opgave **2** uit Hoofdstuk 1).

Beginwaarde en evenwichtswaarde spelen een belangrijke rol bij de directe formule voor het algemene geval. We geven eerst het resultaat, en gaan daarna in op de wiskundige afleiding daarvan.

directe formule

De directe formule in woorden bij het algemene model $X_n = aX_{n\text{-}1} + b$ luidt:

$$\boxed{X_n = \textit{evenwichtswaarde} + a^n\,(\textit{beginwaarde} - \textit{evenwichtswaarde})}$$

27 a. Laat zien dat toepassen van dit resultaat toe op het model
$U_n = 0.75\,U_{n\text{-}1} + 500$
$U_0 = 0$
de directe formule $U_n = 2000(1 - 0.75^n)$ geeft.
b. Wat wordt de directe formule als de beginwaarde samenvalt met de evenwichtswaarde, d.w.z. $U_0 = 2000$?

28 a. Maak de directe formule bij het model
$B(t) = 0.85\,B(t\text{-}1) + 800$
met $B(0) = 3000$
b. Controleer je antwoord met spreadsheet of grafische rekenmachine.

De vorige opgaven laten zien dat de formule ‘werkt’, maar ook bij wiskunde A is het wel eens goed om stil te staan bij de vraag wanneer je in de wiskunde iets nu eigenlijk zeker weet. Daarom gaan we nu in op de wiskundige afleiding van de directe formule.

actief meelezen, ook zelf proberen!

De strategie bij deze afleiding is dezelfde als wat je gedaan hebt bij opgave **18** van paragraaf 6:
- schrijf een aantal stappen van de betrekking uit en druk X_1, X_2, X_3,... uit in X_0 (en a en b natuurlijk)
- bekijk wat voor regelmaat je ziet ontstaan
- pas de kennis over meetkundige rijen ui t paragraaf 6 toe.

Dat wordt:

$$X_0 = X_0$$

$$X_1 = a\,X_0 + b$$

$$X_2 = aX_1 + b = a\,(aX_0 + b) + b = a^2X_0 + ab + b$$

$$X_3 = aX_2 + b = a\,(a^2X_0 + ab + b) + b = a^3X_0 + a^2b + ab + b$$

$$X_4 = aX_3 + b = a\,(a^3X_0 + a^2b + ab + b) + b = a^4X_0 + a^3b + a^2b + ab + b$$

enzovoort.

29 a. Zet de regelmaat voort door nu zelf X_5 in X_0, a en b uit te drukken.

b. Ga na dat je voor X_n kunt schrijven:

$$X_n = a^nX_0 + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \dots + a^2b + ab + b$$

In feite is het gestelde doel nu bereikt: een directe formule voor X_n.
Maar...., deze formule lijkt nog absoluut niet op de’woordformule’ van de vorige pagina. Daarvoor moet deze formule nog een heel eind vereenvoudigd worden. Dat kan door de somformule voor rijen te benutten.

De bovenstaande formule voor X_n bestaat eigenlijk uit twee stukken: de eerste term met X_0 erin, en de rest:

$$a^nX_0 + \boxed{a^{n-1}b + a^{n-2}b + \dots + a^2b + ab + b}$$

Als je het gedeelte in het hok van rechts naar links leest, kun je er de som van een meetkundige rij in herkennen (de rij b, ba, ba^2, ba^3, ..., enzovoort).
Dit tweede stuk kan daarom vereenvoudigd worden met behulp van de somformule uit de vorige paragraaf.

30 Leg uit dat het stuk in het hok gelijk is aan $b\ \dfrac{a^n - 1}{a - 1}$

De conclusie is, dat de directe formule voor X_n ook te schrijven is als (voor a „ 1):

$$\boxed{X_n = a^n X_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1}}$$

oplossings-formule

Deze directe formule wordt wel de *oplossingsformule voor de 1e orde lineaire differentievergelijking* genoemd. Met deze formule kan X_n voor elke waarde van n rechtstreeks berekend worden door invullen van X_0 (de beginwaarde), de parameters a en b en natuurlijk n.

Deze formule is nog steeds niet dezelfde als de eerder gegeven woordformule, maar het komt al wel in de richting. Je kunt in ieder geval alvast controleren of deze formule hetzelfde resultaat geeft.

31 a. Bekijk nogmaals het model voor de medicijnspiegel:
$U_n = 0.75\ U_{n\text{-}1} + 500$
$U_0 = 0$
en pas de bovenstaande directe formule toe.
b. Ga na dat je de formule die je nu krijgt, in overeenstemming is met de eerder gevonden formule $U_n = 2000(1 - 0.75^n)$

De laatste stap is, om de directe formule zodanig te herschrijven, dat die in overeenstemming is met de eerder gegeven woordformule.

variant oplossings-formule

32 a. Laat zien dat de directe formule is om te werken tot:

$$\boxed{X_n = \frac{b}{1-a} + a^n \left(X_0 - \frac{b}{1-a}\right)}$$

b. Ga na dat hier eigenlijk hetzelfde staat als in de woordformule.

Er zijn dus verschillende schrijfwijzen van de oplossingsformule mogelijk. Je kunt zelf kiezen wat je wanneer het handigste vindt.

33 a. Waarom is de formule niet goed als $a = 1$?
b. Maak zelf een formule die wél goed is voor het geval $a = 1$.

34 In de vorige paragraaf (opgave **18**) kwam in verband met een spaaractie de volgende differentievergelijking voor:
$K_n = 1.04 * K_{n\text{-}1} + 600$
$K_0 = 600$
a. Laat zien dat $K_n = 15600 * 1.04^n - 15000$ de oplossing is van deze betrekking.
b. Maak de beginwaarde twee keer zo groot, dus $K_0 = 1200$.
Hoe verandert dan de de oplossingsformule voor K_n?

Opmerking: Voor het geval b „ 0 komt de oplossingsformule in feite dus neer op:

constante + exponentiële groei

35 Iemand heeft een schuld uitstaan van 15000 gulden en moet daarover 4% rente betalen aan de bank.

a. Hoeveel moet jaarlijks aan de bank betaald worden om ervoor te zorgen dat de schuld in elk geval niet toeneemt?

b. De persoon in kwestie betaalt het bedrag dat je bij **a.** hebt uitgerekend jaarlijks aan de bank. Wat moet je veranderen aan de differentievergelijking van opgave **34** zodat hij past bij deze situatie?

c. Werk ook de oplossingsformule uit voor dit geval. Welke bijzonderheid merk je op?

36 In Hoofdstuk 1 heb je de differentievergelijking $P_t = -0.5P_{t-1} + 180$ afgeleid (zie opgave **61 a**). Daarbij was $P_0 = 80$.

a. Welke waarden voor a en b horen hierbij?

b. Maak een oplossingsformule voor P_t en teken de grafiek van P_t op de GR.

c. Bereken P_{20} en P_{21}.

d. Waar gaat P_t op den duur naar toe? Vergelijk dit met de evenwichtsprijs die je in Hoofdstuk 1 hebt gevonden.

e. De waarden van P_t zijn aan schommelingen onderhevig. Kun je dat verklaren uit de formule?

begin-waarde onbekend

Tot nu toe was er steeds een beginwaarde gegeven. Dat hoeft echter niet altijd het geval te zijn. Ook zonder beginwaarde kun je nog een heel eind komen met de oplossingsformule.

37 a. Ga na dat de oplossingsformule voor P_t in het geval P_0 niet bekend is, geschreven kan worden als

$$P_t = 120 + (-0{,}5)^t \quad (P_0 - 120)$$

b. Hoe kun je aan deze formule zien bij welke beginwaarde P_0 de prijs verder niet meer verandert?

even-wichtsprijs

De beginwaarde waarbij de prijs verder niet meer verandert, is tevens de *evenwichtsprijs*.

38 a. Uitspraak: “Onafhankelijk van de beginwaarde zal de prijs zich altijd bewegen in de richting van de evenwichtsprijs.”
Klopt deze uitspraak? Waarom wel/niet?

b. Hoe kun je de evenwichtsprijs rechtstreeks berekenen uit $P_t = -0.5P_{t-1} + 180$?

c. Hoe kun je dit zien aan de oplossingsformule?

39 Bepaal de directe formule voor het aantal zetten bij de torens van Hanoi (hoofdstuk 1, opgave **9 a**): $U_n = 2\ U_{n-1} + 1$, met $U_0 = 1$.

40 a. Waarom kan het probleem van Shirley (zie paragraaf **2** van het eerste hoofdstuk) met de theorie uit deze paragraaf niet opgelost worden?

b. Waarom kan het model voor logistische groei met de theorie uit deze paragraaf niet opgelost worden?

9: Indeling in categorieën

In de vorige paragraaf heb je geleerd dat de differentievergelijking $X_n = aX_{n-1} + b$ (met a ongelijk 1) een algemene oplossing heeft, die je onder andere kunt schrijven als:

$$X_n = \underbrace{\frac{b}{1-a}}_{\text{evenwichtswaarde}} + a^n \left(X_0 - \frac{b}{1-a}\right)$$

In een eerdere paragraaf heb je met behulp van een spreadsheet programma experimenteel onderzocht wat voor verschillende situaties zich bij dit model voor kunnen doen. Het doel van deze paragraaf is om de conclusies uit het spreadsheetonderzoek te combineren met de theorie. Hiertoe gaan we systematisch na welke essentieel verschillendesituaties er zijn, afhankelijk van de waarden van de parameters a en b.

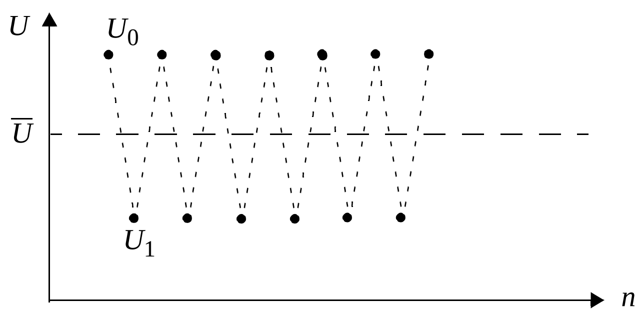
Tot nu ben je al heel wat lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde tegen gekomen. Je hebt vergelijkingen doorgerekend op de grafische rekenmachine, web-grafieken getekend, tijd-grafieken getekend en gewerkt met de oplossingsformule. Geregeld kwam daarbij het begrip *evenwicht* ter sprake. Soms bleek een rij berekende waarden naar het evenwicht toe te gaan, en soms was dat niet het geval. Bovendien trad in sommige gevallen schommeling rondom het evenwicht op, en in andere gevallen niet.
De vraag is nu: zit hier een bepaalde systematiek in, en zo ja, welke?

het geval
***a* = -1**

41 Beantwoord voor het geval a = -1, dat is dus de betrekking $U_n = -U_{n-1} + b$, de volgende vragen:
a. Hoe ziet de oplossingsformule eruit?
b. Teken voor $b = 10$ en $U_0 = 2$ de web-grafiek op de GR.
Wat verandert er als je (bij $b = 10$) begint met $U_0 = 20$?
En als je begint met $U_0 = 5$?
c. Wat is de evenwichtswaarde $\overline{U}$ bij $b = 10$? En bij een willekeurige b-waarde?

alternerende oplossingsrij

Mits U_0 ongelijk is aan $\overline{U}$, ontstaat in het geval a = -1 een *alternerende oplossingsrij* (ook wel oscillerend genoemd). De achtereenvolgende waarden U_0, U_1, U_2, U_3, ... schommelen als het ware om de evenwichtswaarde $\overline{U}$ heen. De evenwichtswaarde zelf wordt nooit bereikt (tenzij $U_0 = \overline{U}$). De bijbehorende tijdgrafiek ziet er zo uit:



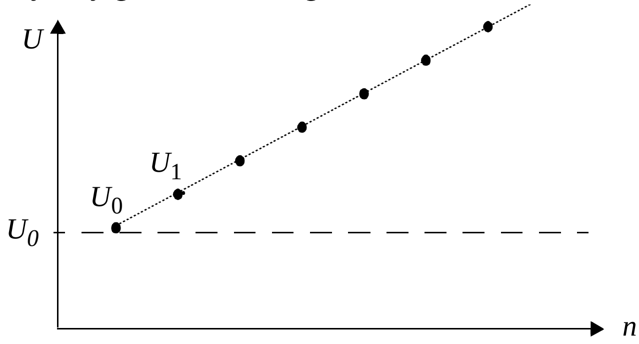
42 a. Ga na of deze figuur in overeenstemming is met je antwoorden op de vorige vraag.

b. Hoe kun je b in deze figuur terugvinden?

***a* = 1**

43 Bestudeer de betrekking $U_n = U_{n\text{-}1} + b$. Kijk daarbij naar dezelfde aspecten als in opgave **41**. Kies zelf waarden voor b en U_0.
NB: Doet het er voor je onderzoek toe of $b = 0$ dan wel b „ 0?

Een mogelijke tijdgrafiek voor dit geval is:



44 a. Waar vind je b terug in deze figuur?
b. Hoe ziet de figuur eruit als $b = 0$? En als $b < 0$?

monotone oplossingsrij

Het geval $a = 1$ levert een *monotone* oplossingsrij op (tenzij $b = 0$). Met monotoon wordt bedoeld dat U_n steeds toeneemt dan wel afneemt, dus in elk geval niet om een evenwichtswaarde heen schommelt.
Je hebt nu twee speciale (grens)gevallen bekeken: resp. het geval $a = -1$ en $a = 1$.

***a* > 0**

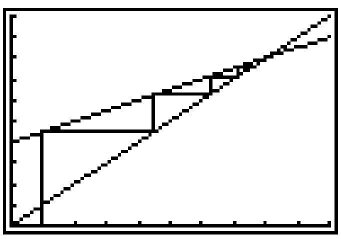
We gaan nu nader in op het geval $a > 0$.

45 Ga na dat zich hierbij (naast het grensgeval $a = 1$) twee esentieel verschillende situaties voor kunnen doen: het geval $0 < a < 1$ en $a > 1$. Gebruik spreadsheet of grafische rekenmachine om een aantal waarden voor a te proberen.

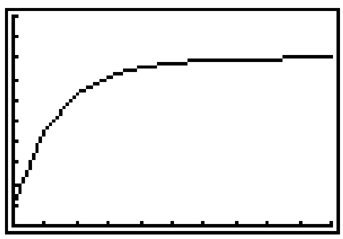
monotone convergentie

Als $0 < a < 1$ dan treedt *convergentie* op. De rij U_0, U_1, U_2, ... beweegt zich onherroepelijk naar een evenwichtswaarde $\overline{U}$ toe. Als in de beginsituatie het evenwicht al bereikt is ($U_0 = \overline{U}$) dan zal het nooit meer verlaten worden. In dit geval spreekt men van *monotone convergentie*.

webgrafiek



tijdgrafiek



46 Hierboven zie je een web-grafiek en een tijd-grafiek van de differentievergelijking: $U_n = 0.5U_{n\text{-}1} + 4$ met $U_0 = 1$.
a. Hoe kun je, gegeven de web-grafiek, daaruit de bijbehorende tijdgrafiek construeren?
b. Leg uit hoe je in beide grafieken kunt zien wat de evenwichtswaarde $\overline{U}$ is.

c. Hoe kun je in beide grafieken zien dat U_5 al behoorlijk dicht bij de evenwichtswaarde ligt?

monotone divergentie

Als $a > 1$ dan treedt divergentie op. De rij U_0, U_1, U_2, ... beweegt zich onherroepelijk van de evenwichtswaarde $\overline{U}$ af, tenzij in de beginsituatie het evenwicht al bereikt is ($U_0 = \overline{U}$). In dat geval zal het nooit meer verlaten worden. Men spreekt hier van *monotone divergentie*.

47 Teken nu ook een web-grafiek en een tijd-grafiek bij een speciefieke situatie met $a > 1$, waarmee je goed de divergentie kunt illustreren.

***a* < 0**

Blijft over de situatie dat $a < 0$. Hiervan is het geval $a = -1$ al onderzocht, dat bleek te leiden tot een alternerende oplossingsrij.

48 Maak het overzicht compleet, door de gevallen $a < -1$ en $-1 < a < 0$ te onderzoeken. Leg zelf het verband tussen tijd-grafieken en web-grafieken.

alternerende divergentie

49 Als $a < -1$ treedt *alternerende divergentie* op. Wat zal hier precies mee bedoeld worden?

alternerende convergentie

50 Als -1 < a < 0 treedt *alternerende convergentie* op. Wat zal hier precies mee bedoeld worden?

overzicht

De verschillende gevallen samengevat in een schema (exclusief de grensgevallen):

	$a > 0$	$a < 0$
$\lvert a \rvert < 1$	monotoon convergent	alternerend convergent
$\lvert a \rvert > 1$	monotoon divergent	alternerend divergent

10: Toepassing: een macro-economisch model

In Hoofdstuk 1 heb je gezien hoe het dynamisch maken van de vraag-aanbod vergelijkingen tot een differentievergelijking voor de prijs leidde. Een andere belangrijke toepassing van differentievergelijkingen in de economie zijn de macro-economische modellen.

In de macro-economie worden grootheden geanalyseerd die betrekking hebben op de volkshuishouding als geheel. Belangrijke grootheden in dit verband zijn het nationaal inkomen (Y), de consumptie (C) en de investeringen (I).
Aannames:

- van het nationaal inkomen wordt door de consumenten een deel geconsumeerd en een deel gespaard (de besparingen)
- producenten produceren de consumptiegoederen en investeren ter grootte van de besparingen.

statisch model

Een eenvoudig voorbeeld van een *statisch* macro economisch model is:

$C = 0{,}6\,Y + 50$ (de consumptiefunctie)
$I = 10$ (de investeringen)

Er treedt evenwicht op als de som van consumptie en investeringen gelijk is aan het nationaal inkomen, dat wil zeggen:

$Y = C + I$ (de evenwichtsvergelijking)

51 a. Bereken bij welk nationaal inkomen dit evenwicht optreedt ($\overline{Y}$).
b. Stel dat de investeringen blijvend met 10 toenemen.
Wat wordt dan het nieuwe evenwichtsinkomen? Met hoeveel is het evenwichtsinkomen dan toegenomen?

Het duurt wel enige tijd voordat bij een blijvende verhoging van de investeringen het nieuwe evenwicht tot stand komt. Hoe het proces precies verloopt, kan geanalyseerd worden door het statische model *dynamisch* te maken.
Extra aanname:

- de bestedingen van de consumenten hangen af van hun inkomen in de periode daarvoor.

dynamisch model

Het aangepaste model wordt:

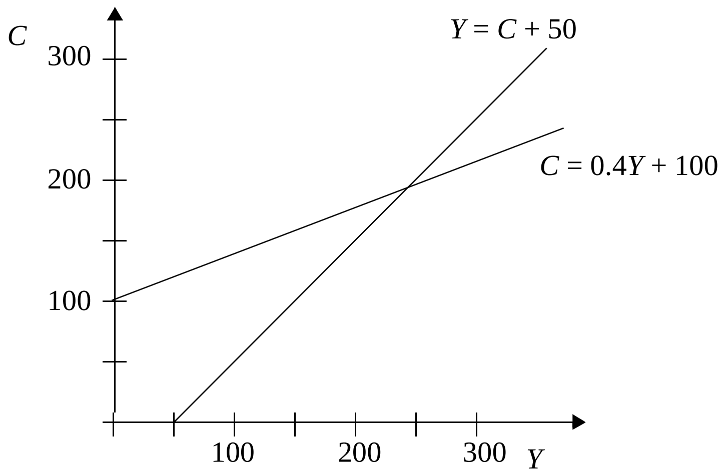
$C_t = 0{,}6\,Y_{t\text{-}1} + 50$ (de consumptiefunctie)
$I_t = 20$ (de blijvend verhoogde investeringen)
$Y_t = C_t + I_t$ (de evenwichtsvergelijking)

52 Analyseer dit model. Neem als beginwaarde Y_0 het antwoord op opgave **51 a**.
Probeer bij je analyse zoveel mogelijk van wat je tot nu toe geleerd hebt te gebruiken.

Het kan ook zijn dat de verhoging van de investering van 10 naar 20 slechts eenmalig is, dus geen blijvend karakter heeft.

53 Stel dat de achtereenvolgende investeringen gegeven worden door de rij:
$I_1 = 10$, $I_2 = 10$, $I_3 = 20$, $I_4 =10$, $I_5=10$, ...enzovoort.
a. Ga het effect hiervan na op Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, ... enzovoort. Neem $Y_0 = 150$.
b. Wat wordt de evenwichtswaarde $\overline{Y}$ in dit geval?
c. Heeft een eenmalige verhoging van de investeringen een tijdelijk of een permanent effect op de evenwichtswaarde $\overline{Y}$?

54 Gegeven is het macro-economisch model:
$I_t = 50$
$C_t = 0.4\ Y_{t\text{-}1} + 100$
$Y_t = C_t + I_t$
a. Maak in onderstaande figuur aanschouwelijk hoe de ontwikkeling van het nationaal inkomen verloopt, als $Y_0 = 100$ de beginsituatie is.



b. Stel een differentievergelijking op voor Y_t en bepaal daar de oplossingsformule van.
c. vergelijk je antwoorden op **a** en **b**. Komen die met elkaar overeen?

Samenvatting

Met behulp van de somformule voor meetkundige rijen is het mogelijk om een directe formule te maken voor differentievergelijkingen van het type $X_n = a\,X_{n-1} + b$ met beginwaarde X_0. Een spreadsheet is een geschikt hulpmiddel om te onderzoeken hoe deze differentievergelijking zich gedraagt. Een belangrijke toepassing uit de economie is het macro-economische model.

voorbeeld
Op een spaarrekening wordt jaarlijks op 1 januari een storting van *f* 600,- gedaan. Verder keert de bank op 1 januari 4% rente uit. De diffferentievergelijking voor het kapitaal K na n jaren is:
$K_n = 1.04\,K_{n-1} + 600$ met $K_0 = 600$.

meetkundige rij
$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$

somformule voor de eerste n termen (r „ 1) van een meetkundige rij

$$\boxed{a + ar + a\,r^2 + \ldots + a\,r^{n-1} = a\,\frac{r^n - 1}{r - 1}}$$

1e orde lineaire differentievergelijkingen

differentievergelijking	*directe formule*
$X_n = a\,X_{n-1}$ beginwaarde X_0	$X_n = a^n X_0$
$X_n = a\,X_{n-1} + b$ beginwaarde X_0	$X_n = \frac{b}{1-a} + a^n \left(X_0 - \frac{b}{1-a}\right)$ *evenwichtswaarde*

Het gedrag van $X_n = a\,X_{n-1} + b$ is afhankelijk van de waarde van a

	$a > 0$	$a < 0$
$\lvert a \rvert < 1$	monotoon convergent	alternerend convergent
$\lvert a \rvert > 1$	monotoon divergent	alternerend divergent

Hoofdstuk 3 - Complexe modellen en de computer

In het voorgaande hoofdstuk is de theorie van de 1e orde lineaire differentievergelijkingen uitvoerig behandeld. In de praktijk worden modellen echter al gauw complexer. In de inleidende paragrafen van hoofdstuk 1 heb je daar al enkele voorbeelden van gezien. Dit laatste hoofdstuk gaat in op enkele bijzondere modellen. Daarbij wordt ook het verband met matrices gelegd.

11: Het verband met matrices

In deze paragraaf leer je een wiskundig model maken bij een situatie waarbij er meerdere 'spelers in het veld' zijn. Je maakt kennis met stelsels differentievergelijkingen en leert iets over het verband met matrixrekening.

In Hoofdstuk 1 heb je verschillende manieren geleerd om discrete exponentiële groei te beschrijven. Met behulp van de groeifactor kun je y_t uitdrukken in y_{t-1}:

$$y_t = \textit{groeifactor} * y_{t-1}$$

Een andere mogelijkheid is om eerst de verandering te berekenen, en die vervolgens op te tellen bij de oude waarde (voor het gemak laten we de tijdsindex bij Dy even weg):

$$\mathrm{D}y = \textit{groeivoet} * y_{t-1}$$
$$y_t = y_{t-1} + \mathrm{D}y$$

Vooral dit tweede model voor exponentiële groei is vaak een goed startpunt voor het opstellen van ingewikkelder wiskundige modellen. De werkwijze die in het eerste hoofdstuk gevolgd is bij het maken van een model voor geremde groei is daar een voorbeeld van. In deze paragraaf gaan we iets dergelijks doen, aan de hand van dit (verzonnen) krantenbericht:

> **Felle concurrentie op wasmiddelenmarkt**
>
> Op de wasmiddelenmarkt had de fabrikant van *Bioclean* tot voor kort de touwtjes stevig in handen. Totdat... de concurrent nieuwkomer *Whitewash* lanceert. De introductie van Whitewash is gepaard gegaan met een intensieve reclamecampagne, waardoor een flink aantal kopers van Bioclean overstapt naar dit nieuwe merk. De marketingafdeling van de fabrikant van Bioclean heeft gevonden dat het maandelijks om zo'n 20% van de kopers van Bioclean gaat. Daar staat tegenover dat 10% van de kopers van Whitewash de daaropvolgende maand toch weer het vertrouwde Bioclean koopt. Aanvankelijk kocht iedereen Bioclean. De marketingafdeling waarschuwt echter dat het marktaandeel van Bioclean 'binnen afzienbare tijd' 'flink zal teruglopen'.

1 Bij dit bericht ga je een wiskundig model opstellen. Om de zaak niet al te ingewikkeld te maken, doen we eerst de volgende extra aannames:
- er zijn alleen deze twee merken Bioclean en Whitewash
- de groep kopers van wasmiddelen is constant van omvang.

a. Leg uit dat je de verandering in het aantal kopers Bioclean kun je schrijven als:
$\mathrm{D}B = -\,0.2\,B_{t-1} + 0.1\,W_{t-1}$ (t in maanden)

b. Stel dat Whitewash gelanceerd wordt op tijdstip $t = 0$. Bioclean heeft op dat moment een marktaandeel van 100%, Whitewash heeft 0% van de markt.
Bereken B_1 en W_1 bij de beginwaarden $B_0 = 100$ en $W_0 = 0$.

stelsel differentie-vergelijkingen

c. Laat zien dat je uit de antwoorden op a. en b. het volgende *stelsel* differentievergelijkingen kunt afleiden:
$B_t = 0.8\,B_{t-1} + 0.1\,W_{t-1}$
$W_t = 0.2\,B_{t-1} + 0.9\,W_{t-1}$

2 **a.** Reken het stelsel van de vorige opgave door op de grafische rekenmachine. Teken ook de grafieken van B_t en W_t. Wat valt je daaraan op?
(Aanwijzingen voor de TI82: zet de machine in de goede mode, gebruik zowel U_n als V_n; vergeet niet de instellingen onder window).

b. Hoe verhouden de marktaandelen tussen Bioclean en Whitewash zich op den duur?

In de vorige opgaven heb je gezien hoe het verhaal van de wasmiddelenfabrikanten wiskundig vertaald kan worden in een stelsel differentievergelijkingen. Verder heb je geleerd hoe je met zo'n stelsel kunt werken op de GR.

matrices

Maar, een stelsel differentievergelijkingen is niet het enige wiskundige hulpmiddel dat je ter beschikking staat. Het kan ook anders, en wel met *matrices*. (Misschien was dat zelfs wel je eerste idee bij het lezen van het krantenbericht?) De opgaven die nu volgen, gaan daar over.

graaf

3 **a.** Lees het krantenbericht nogmaals en teken er een *graaf* bij.

b. De situatie kan gemodelleerd worden met een 2x2 overgangsmatrix van de vorm:

$$\begin{array}{cc} & \text{VAN} \\ A= & \begin{bmatrix} 0{,}8 & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{NAAR}$$

Ga dit na en vul op de stippeltjes de ontbrekende getallen in.

c. Bereken met deze matrix de marktaandelen voor Bioclean en Whitewash op tijdstip t =1 als de beginsituatie (in procenten) gegeven wordt door:

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{ marktaandeel Bioclean op } t = 0 \\ \longrightarrow \text{ marktaandeel Whitewash op } t = 0 \end{array}$$

d. Laat zien dat het stelsel differentievergelijkingen van hiervoor ook te schrijven is in de vorm:

$$\begin{bmatrix} B_t \\ W_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{t-1} \\ W_{t-1} \end{bmatrix}$$

4 **a.** Reken het model nogmaals door, maar werk nu met de matrix-gedaante. Je kunt de berekeningen uitvoeren met een computerprogramma (bijvoorbeeld het programma *Grafen en Matrices*), met een spreadsheet, of met de grafische rekenmachine.
Instructies voor de TI-82 staan in het kader op de volgende pagina.

b. Onderzoek wat de invloed is van de beginsituatie op de verhouding tussen de marktaandelen op den duur.

Matrixrekening op de GR

1. Invoeren van een matrix:
Druk op de toets MTRX en ga naar het EDIT menu. Noem de matrix A en druk daarvoor op 1. Geef de afmetingen van de matrix op, dus 2 ENTER, 2 ENTER voor een 2x2 matrix (standaard staat er 1x1).
Als het goed is, heb je nu op het scherm staan:

Matrix[A] 2 x2
[0.........0........]
[0 ....0........]]

Je kunt nu onder op het scherm een element invoeren. Na ENTER komt het getal dat je invoert in de matrix terecht op de plaats waar de cursor staat.
Ga met 2ND QUIT terug naar het basisscherm.

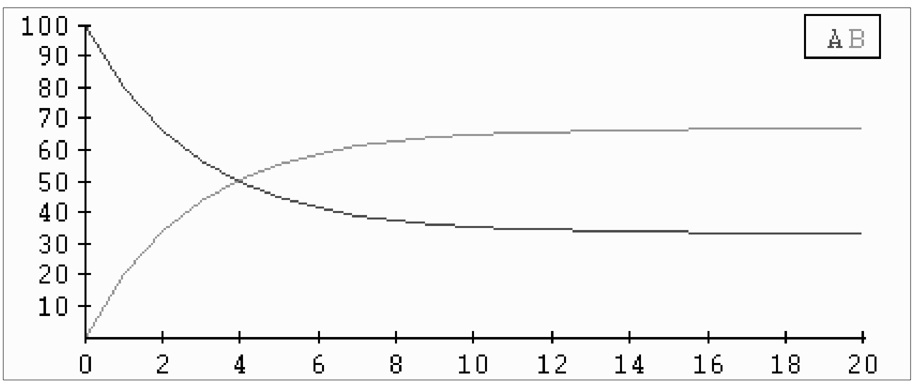
2,. Tonen van een matrix in het basisscherm.
Druk op de toets MTRX, kies NAMES, en zet de cursor op het nummer van de matrix die je wilt zien. Dus 1 voor matrix A. Na enter staat er [A] op het scherm. Nogmaals enter geeft de inhoud van de matrix te zien.

3. Matrices met elkaar vermenigvuldigen.
Definieer twee matrices, bijvoorbeeld A en B, zoals beschreven bij 1. Zorg dat de afmetingen toegestaan zijn voor de vermenigvuldiging die je wilt maken.
Gebruik de namen van de matrices (zie 2.) om de vermenigvuldiging uit te schrijven.
Voor AxB krijg je dan in het venster:
[A] [B] , waarna ENTER de uitkomst geeft.
Een uitdrukking als [A]* ANS kan ook, mits de afmetingen kloppen natuurlijk.

Als het goed is, heb je gevonden dat er op den duur een vaste verhouding tussen de aantallen kopers van Bioclean en Whitewash ontstaat. Deze vaste verhouding is onafhankelijk van de beginsituatie. Er zijn nu twee vragen:

- Krijg je met dit model (een stelsel differentievergelijkingen of graaf en matrix) altijd een vaste verhouding op den duur?
- Kun je de vaste verhouding beredeneren met behulp van de differentievergelijkingen, graaf of matrix?

Voor een overzicht op het resultaat in de loop der tijd is een grafiek erg duidelijk. Hieronder zie je het resultaat van het computerprogramma Grafen&Matrices:



onderzoek **5** Hieronder volgen twee situaties die met een stelsel differentievergelijkingen, graaf of matrix kunnen worden gemodelleerd. Onderzoek met een computerprogramma (bijvoorbeeld: spreadsheet of Grafen&Matrices) of op de grafische rekenmachine* of je in deze twee situaties de twee bovenstaande vragen kunt beantwoorden.

a. Een bank heeft een nieuw kantoor geopend vlak naast een treinstation. De bank vindt dat veel medewerkers met de trein moeten komen. Dat is namelijk één van de redenen om het kantoor naast het station te kiezen. De bank heeft 1000 medewerkers. Na de opening komt 65% van de medewerkers met de auto. De rest komt met de trein.
De bank vindt dit niet voldoende. Ze stimuleert medewerkers met de trein te gaan. Iedere maand wordt met een enquête bekeken of de actie succes heeft.
Het blijkt dat na iedere maand 15% van de reizigers met de auto op de trein is overgegaan, terwijl 10% van de trein-reizigers weer met de auto komt.
Is de actie van de bank een succes?

b. Nederlanders houden van verhuizen. De gemiddelde Nederlander woont ongeveer zeven jaar op hetzelfde adres en gaat dan weer verhuizen. In sommige plaatsen is men echter erg honkvast, bijvoorbeeld in Katwijk en Noordwijk. Het verhuispatroon van de Katwijkers en Noordwijkers is vastgelegd in de volgende migratiematrix:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{VAN} \\ & & \begin{array}{cc}\text{Katw} & \text{Noordw}\end{array} \\ \text{NAAR} & \begin{array}{c}\text{Katwijk} \\[2ex] \text{Noordwijk}\end{array} & \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{16} \\[1ex] \frac{1}{8} & \frac{15}{16} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{tijdseenheid: 5 jaar}$$

Op een zeker moment wonen er 40.000 mensen in Katwijk en 16.000 in Noordwijk. Onderzoek hoe de bevolking van de beide plaatsen zich ontwikkelt, uitgaande van deze migratiematrix (die uiteraard een versimpeling van de werkelijkheid is). Neem aan dat het totale aantal inwoners van Katwijk en Noordwijk constant blijft.

---

* Op de grafische rekenmachine kun je ook de berekeningen in een grafiek zien. Daarvoor moet je wel een klein programmaatje schrijven of van je buur kopiëren. Het programma hieronder gaat ervan uit dat de matrix is ingevoerd in [A] en de beginsituatie in [B]. Kies geschikte grenzen voor het WINDOW.

PROGRAM:GRAFIEK	invoeren van een programma gaat met PRGM en dan EDIT
:ClrDraw	deze opdracht krijg je via de knop DRAW
:[B]fi [G]	de matrices haal je uit het MATRX-menu, het pijltje krijg je met STO>
:1fi T	
:While T<Xmax	While krijg je via PRGM, het <-teken via TEST en Xmax via VARS
:[A]*[G]fi [G]	
:Pt-On(T,[G](1,1))	Pt-On krijg je via DRAW
:Pt-On(T,[G](2,1))	
:T+1fi T	
:End	End krijg je via PRGM

Het afsluiten van invoeren gaat met QUIT. Het draaien van het programma gaat via PRGM en dan EXEC.

evenwichts-situatie

Als de vaste verhouding tot stand is gekomen, is er sprake van een *evenwichtssituatie*. Bekijk nog eens het voorbeeld van de wasmiddelenmarkt. Kenmerkend van het evenwicht is, dat de marktaandelen niet meer veranderen. Wiskundig gezien, kun je hier op verschillende manieren tegen aan kijken. De volgende opgaven gaan daarover.

6 Kun je zeggen dat in de evenwichtsituatie niet meer van merk gewisseld wordt? Verklaar!

7 **a.** Wat betekent de zinsnede 'de marktaandelen veranderen niet meer' voor DB en DW?

b. Kun je met behulp van je antwoord op **a.** de evenwichtswaarden $\overline{B}$ en $\overline{W}$ berekenen?

c. Leg uit dat voor het evenwicht ook moet gelden:
$B = 0.8B + 0.1W$
$W = 0.2\,B + 0.9\,W$

d. Kun je dit stelsel oplossen? Welk extra gegeven kun je goed gebruiken om het evenwicht te vinden, en waarom?

8 Bij opgave **3 a.** heb je een graaf getekend bij de situatie. Hoe kun je met behulp van die graaf beredeneren wat het evenwicht moet zijn?

9 Bekijk nog eens je resultaten bij opgave **5**. Kloppen je bevindingen?

We zijn tot nu toe niet ingegaan op de vraag hoe je bij *stelsel differentievergelijkingen* de directe formules kunt vinden. In Hoofdstuk 2 heb je alleen een standaard oplossingsmethode geleerd voor de 1e orde lineaire differentievergelijking, en niet voor een stelsel. In het voorbeeld van de marktaandelen is die theorie echter wel te gebruiken. Het blijkt mogelijk te zijn om het stelsel te vervangen door differentievergelijkingen die wél de goede gedaante hebben. Vervolgens kan dan de standaardoplossingsmethode uit het vorige hoofdstuk toegepast worden.

Theorie uit Hoofdstuk 2:

De differentievergelijking:

$X_n = aX_{n-1} + b$
met beginwaarde X_0

heeft als evenwichtswaarde:

$$X_n = \frac{b}{1-a}$$

als directe oplossingsformule:

$$X_n = \frac{b}{1-a} + a^n\left(X_0 - \frac{b}{1-a}\right)$$

10 **a.** Zie je kans om de twee vergelijkingen van opgave **1 c.** te reduceren tot één vergelijking? Op wat voor probleem stuit je?

Om van de twee vergelijkingen één te maken, is een handigheidje nodig.
De list is: gebruik een extra gegeven, en wel het gegeven dat de som van B_t en W_t constant is.

b. Waarom is dat eigenlijk zo?

In het voorbeeld geldt dat $B_t + W_t = 100$, voor alle t.

c. In de vergelijking voor B_t kun je W_t nu vervangen door $100 - B_t$.
Laat zien dat dit de differentievergelijking $B_t = 0{,}7\,B_{t-1} + 10$ oplevert, een vergelijking waar W niet meer in voorkomt!

d. Maak op vergelijkbare wijze een vergelijking voor W_t, waar B niet in voorkomt.

11 **a.** Laat zien dat de directe formule, die in Hoofdstuk 2 behandeld is, voor B_t te schrijven is als (neem als beginwaarde weer $B_0 = 100$):
$B_t = 33.3 + 66.7 * 0.7^t$

b. Kijk goed naar deze formule. Wat kun je (zonder al te veel te rekenen) zeggen over de getallenrij B_0, B_1, B_2, B_3,..... enzovoort?

c. Stel zelf een dergelijke formule voor W_t op, uitgaande van de differentievergelijking voor W_t, die je dus eerst nog moet bepalen.

d. Teken met behulp van de grafische rekenmachine de grafieken van B_t en W_t. (Aanwijzing: zet de GR in de functie-mode en voer in Y1=... en Y2=...)

e. Controleer of inderdaad voor elke t geldt $B_t + W_t = 100$.

f. Bereken nogmaals de evenwichtswaarden $\overline{B}$ en $\overline{W}$.

g. In Hoofdstuk 2 heb je een ‘indeling in categoriën’ geleerd. Hoe kun je de oplossingsrij voor B_t typeren? En die voor W_t?

oefen-opgaven

12 Kijk nog eens terug naar de situatie van opgave **5a** (over het reisgedrag van de bankmedewerkers).

a. Laat zien dat deze situatie gemodelleerd kan worden met de vergelijkingen:
$A_t = 0.75\, A_{t-1} + 100$
$T_t = 0.75\, T_{t-1} + 150$
met $A_0 = 650$ en $T_0 = 350$.

b. Bereken de evenwichtswaarden $\overline{A}$ en $\overline{T}$. Komt dit overeen met wat je bij opgave **5a** al gevonden had?

c. Stel de directe formule voor A_t op. Waar vind je de evenwichtswaarde terug in deze formule?

d. Bepaal op twee verschillende manieren de directe formule voor T_t. Welke manier vind jij het handigst?

13 Kijk nog eens terug naar de situatie van opgave **5b** (over het verhuisgedrag van de Katwijkers en Noordwijkers). Onderzoek deze situatie nogmaals en volg daarbij de lijn die in de vorige opgave is aangegeven. Je moet om te beginnen het matrixmodel dus omzetten in een stelsel differentievergelijkingen.

14 Kijk terug op de inhoud van deze paragraaf en maak een overzicht van de verschillende manieren die je nu kent om de evenwichtssituatie te bepalen.

Je hebt nu geleerd hoe je bij een situatiebeschrijving zowel een (2 bij 2) overgangsmatrix als een stelsel differentievergelijkingen kunt maken en hoe je die twee vormen in elkaar om kunt zetten. Vervolgens heb je gezien hoe je de directe formules kunt opstellen.
Bij grotere matrices kun je ook een stelsel differentievergelijkingen maken. Het stelsel wordt dan weliswaar te groot voor de grafische rekenmachine, maar je kunt het wel doorrekenen met een spreadsheet. In de volgende opgaven ga je daarmee aan de slag.

15 In de jaren vijftig is in Engeland en Wales onderzoek gedaan naar sociale mobiliteit. De twee onderzoekers Kemeny en Snell hadden de arbeidsbevolking in drie klassen ingedeeld (upper, middle en lower class) en gingen na wat de kans was dat een zoon in een andere sociale laag terecht kwam dan zijn vader (moeders en dochters werden indertijd niet in het onderzoek betrokken).

De volgende matrix is gebaseerd op de authentieke gegevens van Kemeny en Snell:

$$
\begin{array}{llc}
 & & \text{Son} \\
 & & \begin{array}{ccc} \text{Up} & \text{Mid} & \text{Low} \end{array} \\
\text{Father} & \begin{array}{l} \text{Upper} \\ \text{Middle} \\ \text{Lower} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}45 & 0{,}48 & 0{,}07 \\ 0{,}05 & 0{,}70 & 0{,}25 \\ 0{,}01 & 0{,}50 & 0{,}49 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

a. Van de beroepsbevolking in een Engels plaats werkt op een zeker moment 10% in upper-class beroepen, 60% in middle-class beroepen en 30% in lower-class beroepen. Hoe ziet die verdeling er de volgende generatie uit, volgens dit model?

b. Maak bij dit matrixmodel een stelsel differentievergelijkingen voor U_t, M_t en L_t.

c. Reken dit stelsel door met een spreadsheet (gebruik een kolom voor U, M en L). Hoe ziet de evenwichtsverdeling eruit?

16 Vanwege vrije handelsgrenzen worden twee, oorspronkelijk evengrote, wasmiddelenmarkten samengevoegd tot één grote markt. Het resultaat is, dat naast de fabrikanten van Bioclean en Whitewash er nu een derde aanbieder is: Cleanspan. De gebruikers van Bioclean en Whitewash hebben geen belangstelling voor dit nieuwe merk: zij wijzigen hun gedrag niet. De kopers van Cleanspan hebben daarentegen wel belangstelling voor de twee andere merken: elke maand gaat 15% over naar Bioclean en 15% naar Whitewash.
Onderzoek hoe de marktaandelen tussen de drie aanbieders zich ontwikkelen, als de beginsituatie (in procenten) is: $B_0 = 50$, $W_0 = 0$ en $C_0 = 50$.

GR-TIP:
Op de grafische rekenmachine kun je maar twee vergelijkingen tegelijk invoeren, dus het lijkt er misschien op alsof je daar nu niet veel meer aan hebt. Maar...., je kunt wel het programmaatje GRAFIEK voor de GR uitbreiden voor een 3x3 matrix. Daarvoor moet je de volgende zaken aanpassen:
- de matrices [A], [B] en [G] die gebruikt worden de juiste afmetingen geven
- de regel: Pt-On(T,[G](3,1)) inlassen.

12: Prooi-roofdiermodellen

In de jaren twintig van deze eeuw is door de onderzoekers Lotka en Volterra een wiskundig model ontwikkeld voor de interactie tussen twee diersoorten. Men bestudeerde het verloop van aantallen prooidieren en roofdieren, bijvoorbeelden konijnen en vossen, en probeerde dat verloop te vangen in een wiskundig model. Andere combinaties van diersoorten waarop dit model wel is toegepast, zijn: vissen en snoeken, havikken en mussen, hazen en lynxen. In het algemeen spreekt men van *prooidieren* en *roofdieren.* In deze paragraaf gaan we in op een eenvoudig prooi-roofdiermodel.

Het prooi-roofdier model probeert interactie tussen twee variabelen te beschrijven. Het aantal roofdieren hangt af van het aantal prooidieren en omgekeerd. Bovendien is daarbij ook nog sprake van een zekere tijdsvertraging.

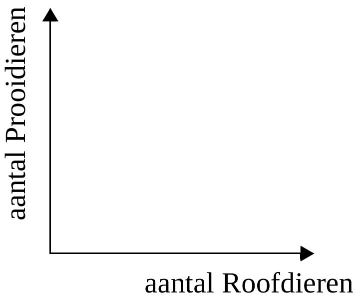
17 a. Om erin te komen: probeer op basis van gezond verstand het volgende verhaaltje af te maken:

> In een zeker bos neemt op een bepaald moment het aantal roofdieren toe. Als gevolg daarvan zal het aantal prooidieren .... nemen (toe/af). Die ....name (toe/af) blijft op zijn beurt niet zonder gevolgen voor het aantal ..... dieren (prooi/roof). Er treedt voor hen een ...... (overschot/tekort) aan voedsel op, waardoor zij in aantal zullen ..... (verminderen/vermeerderen). Dit is vervolgens weer van invloed op het aantal ..... dieren (prooi/roof) en hun aantal zal ..... nemen (toe/af). Maar, daardoor neemt het aantal ..... dieren (prooi/roof) weer .... (toe/af), waardoor het kringetje rond is.

Roof//Prooi-grafiek

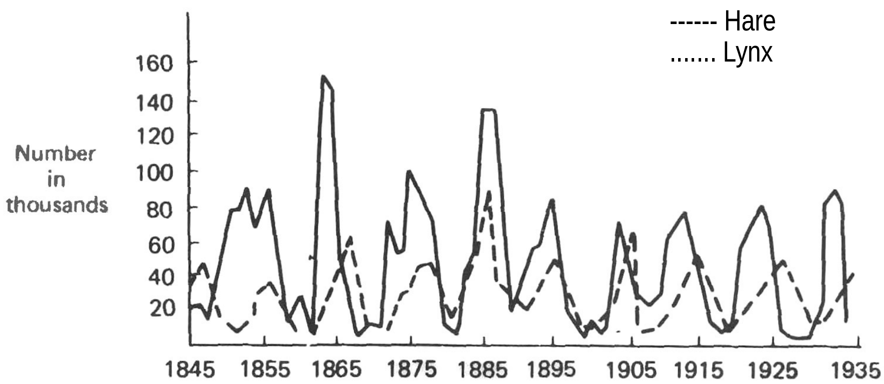
b. Breng dit verhaaltje grafisch in beeld, door er een globale grafiek van te schetsen met horizontaal het aantal roofdieren en verticaal het aantal prooidieren.

c. Wat verandert er in de grafiek als de prooidieren horizontaal en de roofdieren verticaal worden uitgezet?

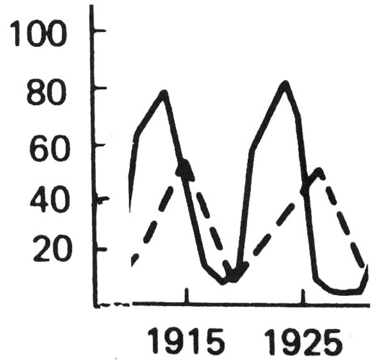


Naar de variabelen bij de assen noemen we dit type grafiek een Roof/Prooi-grafiek.

18 In Canada heeft men jarenlang aantallen lynxen en hazen bijgehouden. Het resultaat is de volgende tijd-grafiek:



Hieronder is deze grafiek uitvergroot voor de periode 1910-1930 en zijn (zo goed en zo kwaad als dat gaat) enige waarden afgelezen.

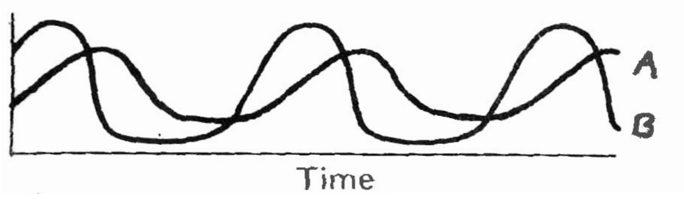


jaar	aantal lynxen	aantal hazen
1910	15.000	35.000
1912	36.000	70.000
1914	58.000	60.000
1916	40.000	20.000
1918	20.000	9.000
1920	13.000	40.000
1922	22.000	72.000
1924	37.000	72.000
1926	45.000	30.000
1928	34.000	4.000
1930	13.000	5.000

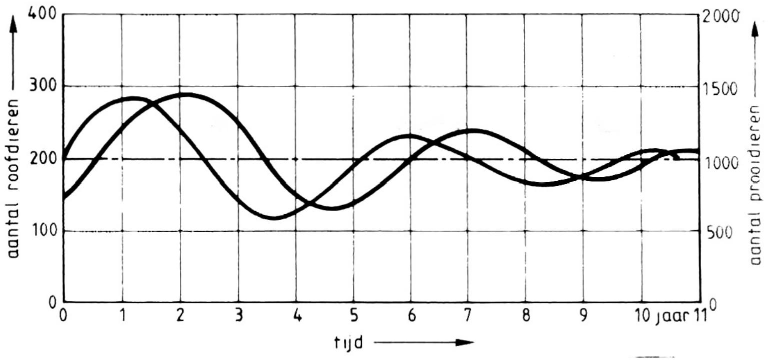
a. Maak met behulp van deze gegevens een Roof/Prooi-grafiek (evt. op de GR, zie de aanwijzingen hieronder). Lees eventueel tussenliggende waarden af uit de grafiek als je dat nodig acht.
b. Na hoeveel jaar herhaalt de cyclus zich?

Aanwijzingen TI-82 voor het plotten van data:
- zet data in lijsten, die krijg je met de knop STAT en daarna de keuze EDIT
- zet de jaartallen in L1 en de aantallen lynxen en hazen in resp. in L2 en L3
- stel met 2nd STATPLOT de plots in die je wil maken:
    gebruik bijv. Plot1 voor de tijdgrafieken (Xlist: L1 en Ylist: L2 L3)
    en Plot2 voor Roof/Prooi grafiek (Xlist: L2 en Ylist: L3)
- vergeet de scherminstellingen onder WINDOW niet
- teken tenslotte met GRAPH de grafieken

19 In de figuur hieronder is een prooi-roofdier systeem in beeld gebracht. Kun je beredeneren welke curve de prooidieren voorstelt en welke de roofdieren?



20 De diersoorten die in de grafiek hieronder zijn uitgebeeld, stabiliseren zich op den duur. Schets bij deze tijd-grafiek de bijbehorende Roof/Prooi-grafiek.



wiskundig model

Na deze kennismaking met het fenomeen van de prooi-roofdiersystemen gaan we nu proberen om in een aantal stappen een *wiskundig model* te maken voor dergelijke systemen.

In een bosgebied leven konijnen en vossen. Samen vormen zij een prooi-roofdiersysteem. Het doel is om een wiskundig model op te stellen voor dit systeem. We doen dit met behulp van differentievergelijkingen.

Het maken van zo'n model komt in principe neer op het uitwerken van:

$K_t = K_{t-1} + \mathrm{D}K$

$V_t = V_{t-1} + \mathrm{D}V$

met K_t het aantal konijnen op tijdstip t (t in maanden) en V_t het aantal vossen.
We bekijken de beide diersoorten om te beginnen elk apart en doen de aannames:

- er is onbeperkt voedsel voor konijnen
- zonder vossen neemt het aantal konijnen toe met 5% per maand
- zonder konijnen neemt het aantal vossen af met 3% per maand

en de *voorlopige* aanname:

- de aanwezigheid van de ene diersoort heeft geen invloed op de andere diersoort.

21 a. Wat kun je op basis van deze aannames opschrijven over $\mathrm{D}K$ en $\mathrm{D}V$?
b. Wat gebeurt er op den duur met de konijnen en de vossen? Teken hier ook een schets van.

interactie

De volgende stap is, om de *interactie* tussen de twee diersoorten in te bouwen in het model. De voorlopige aanname wordt vervangen door:

- vossen eten konijnen

Dat klinkt nogal logisch, maar de vraag is, hoe je dit wiskundig kunt uitwerken.

Zonder interactie heb je gezien dat de groeivoet voor de konijnen in de formule voor $\mathrm{D}K$ constant is: 0.05. Met interactie is de groeivoet afhankelijk van het aantal vossen: hoe meer vossen, hoe kleiner de groeivoet.

zonder interactie	*met* interactie
constante groeivoet	groeivoet afhankelijk van aantal vossen

zonder interactie	*met* interactie
$\mathrm{D}K = 0.05*K_{t\text{-}1}$	$\mathrm{D}K = (0.05 - 0.001 * V_{t\text{-}1})*K_{t\text{-}1}$

22 a. Leg uit dat in het rechter model inderdaad de aanwezigheid van vossen remmend werkt op het aantal konijnen.
b. Welke aanname is gemaakt over de invloed van het aantal vossen op de groeivoet?

We passen D*K* en D*V* als volgt aan:

$\mathrm{D}K = (0.05 - 0.001 * V_{t\text{-}1}) * \mathrm{K}_{t\text{-}1}$
$\mathrm{D}V = (\text{-}0.03 + 0.002 * K_{t\text{-}1}) * \mathrm{V}_{t\text{-}1}$

De getallen 0.001 en 0.002 kun je opvatten als schalingsfactoren.

23 Leg uit wat de invloed van het aantal konijnen op het aantal vossen is.

24 Stel dat er op tijdstip $t = 0$ in het bos 250 konijnen en 40 vossen zijn.
a. Hoeveel konijnen zijn er dan op $t = 1$?
b. En op $t = 2$?
c. Je zou de vergelijkingen voor D*K* en D*V* ook zonder haakjes kunnen schrijven, haakjes wegwerken dus. Leg uit dat de berekening van vraag **a.** echter de minste rekenstappen kost als je de haakjes laat staan.

evenwicht

Je kunt je afvragen of er ook een evenwichtssituatie bestaat bij dit prooi-roofdiersysteem. Met andere woorden, een combinatie van beginwaarden waarbij de aantallen verder niet meer veranderen.

25 a. Leg uit dat je het evenwicht (als het er is!) kunt vinden door oplossen van het stelsel:
$(0.05 - 0.001\ V) * K = 0$
$(\text{-}0.03 + 0.0002\ K) * V = 0$
b. Bereken het evenwicht $(\overline{V}, \overline{K})$.
c. Stel dat de vruchtbaarheid van de konijnen toeneemt, terwijl er verder niets verandert. Wat is het effect hiervan op het evenwicht?

26 Laat zien dat je het uiteindelijke model (bijvoorbeeld) kunt schrijven als:
$K_t = (1.05 - 0.001\ V_{t\text{-}1})K_{t\text{-}1}$
$V_t = (0.97 + 0.0002*K_{t\text{-}1})V_{t\text{-}1}$

Het handmatig doorrekenen van dit model is, met of zonder haakjes, al gauw veel werk. Het is daarom wel zo praktisch om grafische rekenmachine of computer in te schakelen. We kiezen hier voor een spreadsheetprogramma op de computer. (Doorrekenen op de grafische rekenmachine gaat wel, maar het blijkt nogal traag te zijn.)

computer-opdracht

27 Verwerk het model van de vorige opgave met behulp van een spreadsheetprogramma. Gebruik drie kolommen: respectievelijk voor de tijd, het aantal konijnen en het aantal vossen. Laat de computer rekenen voor een periode van 30 jaar (360 maanden), neem weer de beginwaarden $K_0 = 250$ en $V_0 = 40$. Onderzoek dit model en verwerk je resultaten in een verslag.
Mogelijke onderdelen voor het verslag zijn:

- Grafieken van het aantal vossen en konijnen uitgezet tegen de tijd.
- Een grafiek met horizontaal het aantal vossen en verticaal het aantal konijnen.
- In welke jaren is het aantal konijnen resp. vossen maximaal? Minimaal? Om de hoeveel jaar herhaalt hetzelfde patroon zich? (Dit heet de cycluslengte.)
- Ga na wat het effect is van variatie in de beginwaarden K_0 en V_0. Zijn er beginwaarden waarbij de aantallen vossen en konijnen verder helemaal niet meer veranderen?

Je hebt nu gezien hoe een prooi-roofdier model eruit ziet. Een relativerende opmerking is echter wel op z'n plaats. Het hier behandelde model is in de praktijk niet erg realistisch. Zo wordt verondersteld dat er voor de prooidieren onbeperkt voedsel aanwezig is en dat de roofdieren in principe onverzadigbaar zijn.
Om tegemoet te komen aan de bezwaren van dit model, zijn in de loop der jaren allerlei varianten op dit basismodel ontwikkeld. Een mogelijke variant krijg je bijvoorbeeld door niet exponentiële groei als vertrekpunt te nemen (zoals we hier hebben gedaan), maar geremde groei. Maar...., het gaat te ver om dat hier allemaal uit te werken!

13: Groei van ratten - een onderzoek

Bij een ingewikkeld probleem weet je niet meteen welke aanpak succes oplevert. In deze paragraaf zie je dat verschillende wiskundige modellen uiteindelijk allemaal tot hetzelfde resultaat leiden.

De volgende passage komt uit het boek *Ratten* van Maarten ‘t Hart:

> Ook over de hoeveelheid nakomelingen van één rattenpaar in één jaar worden zeer verschillende getallen verstrekt. In het volgende hoofdstuk zal ik de schaarse gegevens van onderzoek over de vruchtbaarheid van ratten in de natuur bespreken, maar het is misschien aardig hier een schatting te maken van het aantal nakomelingen van één paar, uitgaande van de meest optimale omstandigheden. Daartoe gebruik ik de volgende gegevens.
> Gemiddeld is het aantal jongen per worp te stellen op zes; van deze zes jongen behoren er drie tot het vrouwelijk geslacht. De draagtijd is eenentwintig dagen; het zogen duurt ook eenentwintig dagen. Een vrouwtje kan echter al bevrucht worden tijdens de periode van het zogen van haar jongen, ze kan zelfs al bevrucht worden op de dag van de bevalling. Gemakshalve stel ik de periode tussen twee bevallingen op veertig dagen. Als nu een vrouwtje op 1 januari bevalt van zes jongen is dat vrouwtje veertig dagen later opnieuw in staat om zes jongen ter wereld te brengen. De vrouwtjes van de eerste worp van zes jongen zijn zelf na honderd twintig dagen in staat om nakomelingen voort te brengen.
> Als ik ervan uitga dat er bij elke worp steeds drie vrouwtjes zijn en als ik dan alle nakomelingen optel van alle vrouwtjes in één jaar kom ik op 1808 ratten op 1 januari van het volgende jaar, het oorspronkelijke paar meegerekend. Dit is een fictief getal. Er is sterfte; moeders verwerpen soms hun jongen; vrouwtjes komen soms lange tijd niet in oestrus. Niettemin geeft dit getal enig idee van het leger ratten dat na een jaar ontstaan kan zijn.

28 Maarten ‘t Hart doet in dit verhaal een aantal aannames over de populatiegroei bij ratten. Op basis van die aannames komt hij tot de conclusie dat er, startend met één rattenpaar, een jaar later 1808 ratten zijn. Hoe zou hij aan dat getal gekomen zijn?

a. Maak een tabel om dit getal te controleren.

Aanwijzingen:

Verdeel het jaar in 9 perioden van 40 dagen (tijdseenheid: 40 dagen) en stel 1 januari, de datum waarop de eerste bevalling plaats vindt, op $t = 0$.

Aangezien er ook een vader in het spel moet zijn, is het aantal ratten 40 dagen eerder gelijk aan 2. Anders gezegd: $R(-1) = 2$.

Op $t = 0$ komen er 6 jongen, dus $R(0) = 2 + 6 = 8$.

Maak een tabel voor t = -1, 0, 1, 2,..... 9.

b. Bij $t = 3$ gebeurt er iets bijzonders. Leg uit dat je $R(3)$ kunt vinden uit $R(2)$ en $R(0$, als volgt:
$R(3) = R(2) + R(0) * 6 / 2$

c. Stel zelf zo’n betrekking op voor $R(4)$ en controleer door getallen in te vullen of het klopt.

d. Veralgemeniseer deze betrekking tot een differentievergelijking voor $R(t+3)$.

differentie-vergelijking

29 a. Reken de differentievergelijking door met een spreadsheetprogramma en controleer of je weer op het getal 1808 uitkomt bij $t = 9$.

b. Zet de gevonden waarden uit in een grafiek en onderzoek hoe de groei van ratten verloopt: lineair, kwadratisch, exponentieel? Of een combinatie misschien? Probeer of je een passend functievoorschrift kunt vinden.

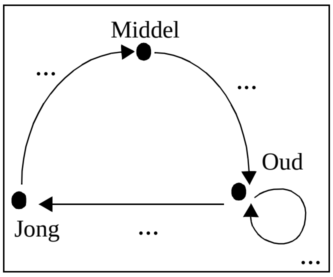
Je hebt nu gezien hoe je het verhaal van Maarten ‘t Hart wiskundig kunt vertalen in een differentievergelijking. De strategie is om eerst grip op het probleem te krijgen door een tabel te maken en met de hand wat waarden door te rekenen. Vervolgens probeer je dan de regelmaat te vinden, om van daaruit de algemene betrekking op te stellen.

Maar een differentievergelijking is niet de enige manier om dit probleem te modelleren. Het blijkt ook met matrices te kunnen. Aan jou de taak om die matrix op te stellen. De volgende opgave gaat daar over.

matrix en graaf

Om een matrixmodel te kunnen opstellen, moet je om te beginnen weten welke categorieën er voorkomen. In de matrix zelf wordt dan vastgelegd hoe je van de ene categorie in de andere kunt komen. Een handig hulpmiddel waarmee je in beeld kunt brengen hoe de overgangen tussen de categorieën verlopen, is de *graaf*.

30 Hiernaast is een begin gemaakt van een graaf bij het rattenprobleem..



a. Verklaar deze graaf. Waarom zijn er drie categorieën ratten genomen? Had twee (‘Jong’ en ‘Oud’) niet kunnen volstaan?
b. Welke getallen moeten er op de stippeltjes staan?
c. Stel de *overgangsmatrix* op bij deze graaf.
d. Reken de aantallen ratten nogmaals door op computer of grafische rekenmachine, maar werk nu met dit matrixmodel. Ga na of het getal 1808 ook nu weer klopt.

31 Maarten ‘t Hart geeft zelf in zijn tekst zelf al aan dat de geschetste situatie in feite niet erg realistisch is.
a. Pas het matrixmodel aan, waarbij je de volgende aannames verwerkt:
- van de zes geworpen ratjes sterft er gemiddeld één vrijwel meteen na de geboorte
- de ratten die tenminste veertig dagen oud zijn, hebben een kans van 80% om de volgende veertig dagen te overleven.

b. Reken het aangepaste model door. Hoeveel ratten zijn er nu op $t = 9$?

Antwoorden Hoofdstuk 1 - Oriëntatie

1: Recurrente betrekkingen

1 **a.**

tijdstip t	*aantal bomen B(t)*
$t = 0$	$B(0) = 3000$
$t = 1$	$B(1) = 3350$
$t = 2$	$B(2) = 3647.5$
$t = 3$	$B(3) = 3900$
$t = 4$	$B(4) = 4115$
$t = 5$	$B(5) = 4298$

b. Het lijkt erop dat het aantal bomen steeds verder toeneemt. Na ongeveer 30 jaar neemt het aantal bomen echter nog maar weinig toe.

c. Na ongeveer 50 jaar zijn er 5333 bomen (afgezien van afrondingsaspecten).

2 **a.** $B(t)$ is het aantal bomen na t jaar. Dit aantal is te berekenen met het aantal bomen van het jaar ervoor: $B(t\text{-}1)$. Namelijk van dat aantal blijft 85% over (er wordt 15% gekapt), dat geeft: $0.85 * B(t\text{-}1)$.
En er worden 800 bomen geplant, dus na t jaar zijn er: $0.85 * B(t\text{-}1) + 800$ bomen.

b. Ja, maar het duurt wel langer voordat het evenwicht bereikt is.

3 **a.**

tijdstip t	*kapitaal K(t)*
$t = 0$	$K(0) = 500$
$t = 1$	$K(1) = 525$
$t = 2$	$K(2) = 551.25$
$t = 3$	$K(3) = 578.81$

b. $K(0) = 500$
$K(t) = 1.05\ K(t\text{-}1)$

c. Na 15 jaar is het kapitaal fl. 1039.46

4 Formules (2) en (4) zijn correct.

5 **a.** $K(0) = 100$
$K(1) = 100 + 0.004*100 + 100 = 200.40$
$K(2) = 200.44 + 0.004*200.40 + 100 = 301.20$
$K(3) = 301.20 + 0.004*301.20 + 100 = 402.41$

b. $K(t) = 1.004\ K(t\text{-}1) + 100$ met $K(0) = 100$

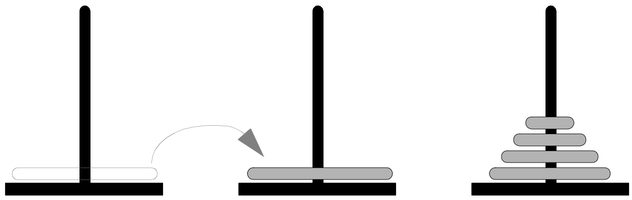
c. Na 12 maanden fl. 1226.76

6 0.15 * evenwichtswaarde = 800 en 800 / 0.15 is ongeveer 5333

7 Bij 2 schijven: 3 zetten
Bij 3 schijven: 7 zetten
Bij 4 schijven: 15 zetten.

8 **a.** Bij 4 schijven moet je, om de onderste te verplaatsen, eerst een toren van drie schijven verplaatsen, daarna de onderste op de goede plek zetten, en vervolgens weer de toren van drie op die verplaatsen bovenop de onderste. Dus twee keer een toren van drie, plus 1 zet om de onderste te verplaatsen.

b.



c. Bij 5 schijven: 15 zetten om de stapel van 4 te verplaatsen + 1 zet voor de onderste schijf, dat is 16 zetten. Dan nogmaals 15 zetten om de stapel van vier terug te zetten op de onderste schijf, dus in totaal 31 zetten.

9 **a.** $Z(n) = 2 * Z(n\text{-}1) + 1$ met beginwaarde $Z(1) = 1$ ($Z(0) = 0$ kan ook).
b. 1023 zetten voor een toren van 10 schijven.

10 -

2: Recurrente betrekkingen doorrekenen

11 **a.** *f* 2623,76
b.

	A	B
1	100	100
2	200.4	175.5
3	301.2016	251.3775
4	402.4064	327.6344
5	504.016	404.2726
6	606.0321	481.2939
7	708.4562	558.7004
8	811.29	636.4939
9	914.5352	714.6764
10	1018.193	793.2497
11	1122.266	872.216
12	1226.755	951.5771
13	1331.662	1031.335
14	1436.989	1111.492
15	1542.737	1192.049
16	1648.908	1273.009
17	1755.503	1354.374
18	1862.525	1436.146
19	1969.976	1518.327
20	2077.855	1600.919
21	2186.167	1683.923
22	2294.911	1767.343
23	2404.091	1851.18
24	2513.708	1935.435
25	2623.762	2020.113

12 Voor 20 schijven heb je iets meer dan een miljoen zetten nodig.
De groeifactor zie je als je opeenvolgende termen deelt.
Het lijkt op den duur een groeifactor van 2 te worden.

	A	B
1	1	
2	3	3
3	7	2.333333
4	15	2.142857
5	31	2.066667
6	63	2.032258
7	127	2.015873
8	255	2.007874

13 a. Shirley zelf én de mensen die op maandag (1), dinsdag (1) en woensdag (2) zijn uitgenodigd, nodigen op vrijdag iemand uit. In totaal 5 personen.

b. De mensen die op donderdag zijn uitgenodigd mogen op zaterdag ook gaan uitnodigen, dus die komen bij het antwoord van **a**. In totaal worden op zaterdag 8 mensen uitgenodigd.

c.

dag	*ma*	*di*	*wo*	*do*	*vr*	*zat*
aantal mensen dat komt	2	3	5	8	13	21

d. -

14 -

15 De begin getallen zijn bijvoorbeeld: $K(0) = 3$ en $K(1) = 2$.
Dit geeft $K(2) = 2/3$, $K(3) = 1/3$, $K(4) = 1/2$, $K(5) = 3/2$, $K(6) = 3$, $K(7) = 2$.
Omdat $K(6)$ resp. $K(7)$ gelijk zijn aan $K(0)$ resp. $K(1)$, gaat het proces zich herhalen en ontstaat een periodieke grafiek.

3: Exponentiële en geremde groei

16 a. $K_2 = 1.05\ K_1 = 1.05^2\ K_0$
$K_3 = 1.05\ K_2 = 1.053\ K_0$

b. $K_n = 10.5\ K_{n\text{-}1} = 1.05^n\ K_0$

17 a. Xmin = 0, Xmax = 25, Ymin = 0, Ymax = 2000 (deze laatste is een schatting)

b. -

c. -

d. Na 62 jaar is het bedrag aangegroeid tot fl. 10296.90, dus misschien wel.

18 De linker grafiek suggereert dat het bedrag continu toeneemt, maar dat is niet het geval. De rechter grafiek brengt de sprongsgewijze toename beter in beeld.
De stippen in de rechter grafiek zijn wel erg vet en de ‘gaten’ tussen de stippen kloppen eigenlijk ook niet. Een derde mogelijkheid is een grafiek die bestaat uit horizontale streepjes.

19 Het aantal zetten bij de torens van Hanoi en Shirley’s manier van uitnodigen zijn discrete verschijnselen met discrete modellen.
De hoeveelheid geld op een bankrekening en het aantal bomen in een bos waar geplant en gekapt wordt lijken discrete verschijnselen omdat de veranderingen sprongsgewijs verlopen. Maar je zou ook kunnen zeggen dat het continu verschijnselen zijn, omdat de tijd continu verloopt. De recurrente bertekking is een discreet model van de situatie. Als je $f(x) = 500{*}1.05^x$ kiest als model voor het bedrag op een bankrekening, waarbij x alle waarden groter of gelijk aan nul kan aannemen, dan is er sprake van een continu model.

20 a. De grafiek lijkt op de grafiek die je bij opgave **17 a** hebt gezien.

b. -

21 5% rente bij wat je had is 1.05 keer wat je had: $K(n) = 1.05\ K(n\text{-}1)$.
Wat je had plus 5% rente van wat je had geeft: $K(n) = K(n\text{-}1) + 0.05\ K(n\text{-}1)$.

22 Groeifactor = 1 + groeivoet.

23 -

24 a. $U(0) = 1$
$DU = U(n\text{-}1)$
$U(n) = U(n\text{-}1) + DU$
Dit is exponentiële groei met groeifactor 2 en groeivoet 1.

b. $K(0) = 100$
$DK = 0.004 * K(t\text{-}1) + 100$
$K(t) = K(t-1) + DK$

c. $V(0) = 6000$
$DV = \text{-}0.25\ V(n\text{-}1)$
$V(n) = V(n\text{-}1) + DV$
Dit is exponentiële groei met groeifactor 0.75 en groeivoet -0.25.

25 a. Vanaf 1982 neemt het aantal aids-slachtoffers tot aan 1992 steeds sneller toe. Daarna, in 1993, treedt een kentering op.

b. $y = 15*1.4^{x\text{-}82}$ geeft een redelijk beeld van het verloop tot 1992.

26 a. Exponentiële groei, met groeivoet = 0.8 en groeifactor = 1.8

b. Vermoedelijk om niet met grote getallen te hoeven rekenen.

c. $N_t = 1.8 * N_{t\text{-}1}$ met $N_0 = 1$

d. -

e. Na 7 jaar is 61% van de gezinnen bereikt.

f. Na 8 jaar zijn alle gezinnen bereikt.

g. Nee, er is gerekend in procenten.

27 In het begin loopt de grafiek steeds steiler: het aantal neemt steeds sneller toe. In de rechter helft van de grafiek neemt de steilheid af: de toename van het aantal gaat dus steeds langzamer.

28 a. Zolang $0 < N_{t\text{-}1} < 100$ is de remfactor een getal tussen 0 en 1. Vermenigvuldiging met zo'n getal verkleint de toename DN_t.

b. Zodra $N_{t\text{-}1} = 100$ is iedereen bereikt (100% van de mensen). De remfactor wordt dan 0 en het aantal neemt niet verder toe.

c. 0 < remfactor < 1

29 a. $V_n = V_{n\text{-}1} + 0.8 * V_{n\text{-}1} * (1 - V_{n\text{-}1}/100)$ met $V_0 = 1$

b. -

c. Na 8 jaar is 65% van de gezinnen bereikt. Na 12 jaar zijn (vrijwel) alle gezinnen bereikt.

d. De eerste jaren is er niet zo heel veel verschil tussen de twee modellen. Vanaf jaar 8 is er wel veel verschil.

30

$$N_t = N_{t-1} + g\ \ N_{t-1}\left(1 - \frac{N_{t-1}}{K}\right) = N_{t-1} + g\ \ N_{t-1} - g\ \ \frac{N_{t-1}^2}{K}$$

$$= (1+g)N_{t-1} - \frac{g}{K}N_{t-1}^2$$

31 a. $N_t = 2\ N_{t\text{-}1}\ \text{-}\ 0.001\ N^2_{t\text{-}1}$
$N_t = 474$ bij $t = 6$. De grenswaarde wordt bereikt bij $n = 10$.
b. $N_t = 2\ N_{t\text{-}1}\ \text{-}\ 0.0005\ N^2_{t\text{-}1}$
$N_t = 549$ bij $n = 6$. De grenswaarde wordt bereikt bij $n = 11$.

32 In de tabel hieronder staan de oorspronkelijke meetwaarden zoals die door de onderzoeker Carlson in 1913 gepubliceerd zijn.
Een goed passend model ontstaat door bijvoorbeeld $N_0 = 9.6$, $g = 0.62$ en $K = 665$ te nemen in het logistische groeimodel. De berekende modelwaarden bij dit model zijn ook in de tabel opgenomen.

tijd in uren	*meetwaarden*	*modelwaarden*
0	9.6	9.6
1	18.3	15.5
2	29.0	24.8
3	47.2	39.7
4	71.1	62.8
5	119.1	98.0
6	174.6	149.8
7	257.3	221.8
8	350.7	313.4
9	441.0	416.2
10	513.3	512.7
11	559.7	585.5
12	594.8	628.9
13	629.4	650.1
14	640.8	659.1
15	651.1	662.7
16	655.9	664.1
17	659.6	664.7
18	661.8	664.9

33 Een passend model ontstaat door bijvoorbeeld $N_0 = 12$, $g = 0.6$ en $K = 200$ te nemen in het logistische groeimodel, waarbij t loopt van 0 tot 10:

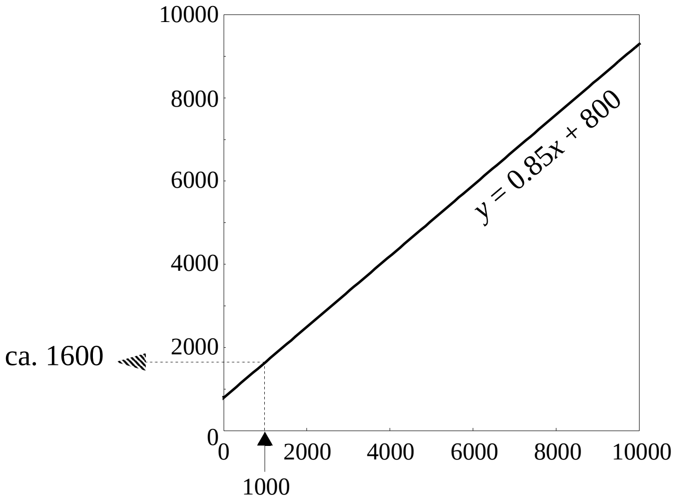
$$N_0 = 12$$

$$N_t = N_{t-1} + 0{,}6\ \ N_{t-1}\ \left(1 - \frac{N_{t-1}}{200}\right)$$

4: Web-grafieken

34 a. A3 = 24 en A4 = 48.
b. De grafiek van y = 2x
c. Nee.

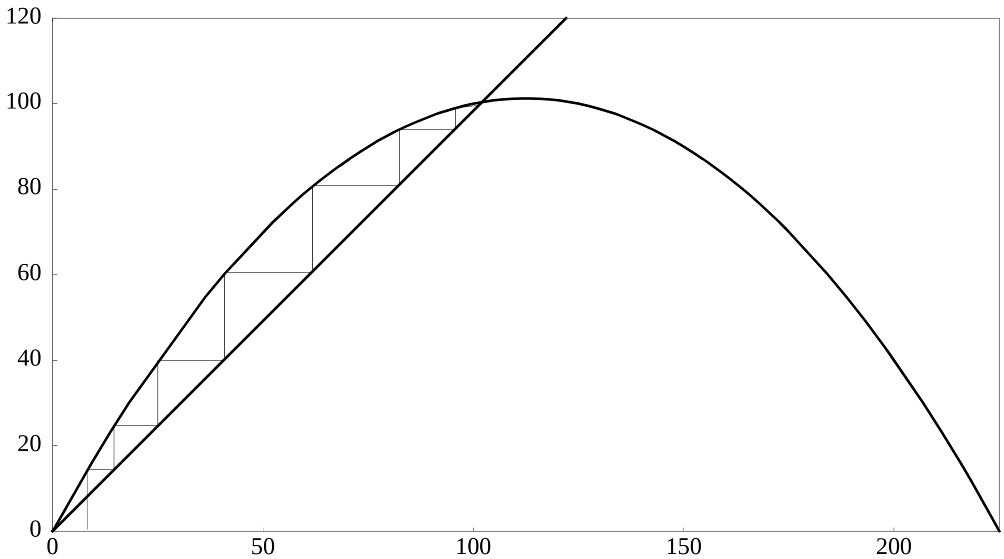
35 a.



b. 7500

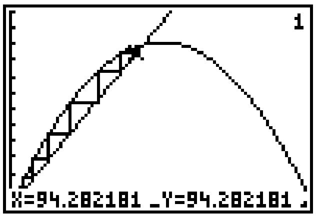
36 a. Vertikaal B_1, B_2 en B_3. Horizontaal: B_0, B_1, B_2 en B_3.
b. -
c. Het web nadert het snijpunt.
d. Als je in het snijpunt begint, u(nMin) = 5333, dan kom je er niet meer uit, omdat dan 15% eraf precies gelijk is aan 800 bomen erbij.
e. Het web gaat ook richting het snijpunt.

37 a. $U_n = U_{n-1} + 0.8\ U_{n-1} - 0.8\ U_{n-1}^2/100 = -0.008\ U_{n-1}^2 + 1.8\ U_{n-1}$
b.



c. Snijpunten zijn (0, 0) en (100, 100). Er zullen steeds meer mensen door de campagne worden bereikt, het aantal nadert de 100%.

38 a. *Om het web op de GR te krijgen moet je, na het volgen van de instructies boven deze opgave, eerst op TRACE drukken en vervolgens op het pijltje naar rechts.* Het web begint dan bij Unstart:



b. Blijft naderen naar het snijpunt (ook als rechts van het snijpunt begint, hoewel die waarden eigenlijk geen betekenis hebben in deze context).

39 -

40 Het probleem is dat de twee lijnen bijna over elkaar lopen. Door de grenzen van het scherm 'vierkant' te kiezen kun je ze wel onderscheiden. Het volgen van het web blijft echter moeilijk.

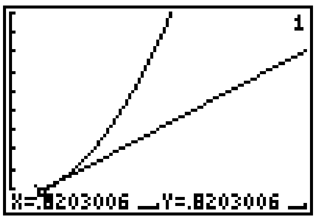
41 Het enige evenwichtspunt is (0, 0).

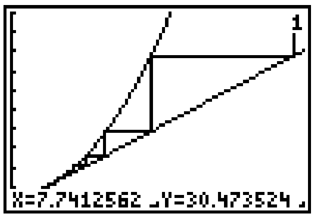
42 -

43 De eventwichtspunten van de recurrente betrekkingen uit opgave 39 en 42 zijn stabiel en die uit 40 en 41 zijn instabiel.

44 a. Het eventwichtspunt (2, 2) is instabiel.
b. Een stabiel evenwichtspunt.
c. Stabiel.

45 a. Deze betrekking heeft een evenwichtspunt dat genadert wordt als je links ervan begint (bijvoorbeeld Unstart = 0.5), maar als je rechts begint dan raak je er steeds verder van verwijderd.
b. Als je in het web begint bij 0.5 dan lijkt het een tijdje te blijven hangen rond (1, 1), maar uiteindelijk schiet hij er wel doorheen:





46 -

5: Vraag en aanbod

47 -

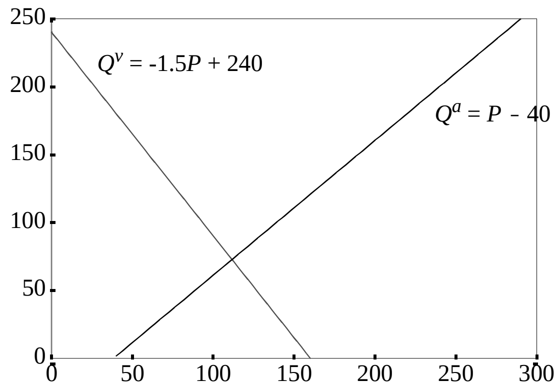
48 Mogelijk antwoord: Aanstaande studenten weten dat er op dit moment een tekort aan informatici is en ze besluiten daarom in grote getale informatica te gaan studeren. Tegen de tijd dat ze afgestudeerd zijn, is het tekort echter al lang opgeheven en ontstaat er een overschot aan informatici. Voor de aanstaande studenten van dat moment is informatica dan geen aantrekkelijke studie meer, waardoor het aantal studenten weer zal gaan afnemen.

49 a. De prijs van het varkensvlees is laag, waardoor de fokkers zich terug trekken uit de markt (1). Anderhalf jaar later zal het aanbod van varkensvlees laag zijn, ten gevolge waarvan de prijs op dat moment zal stijgen (2). Dit trekt nieuwe aanbieders aan, waardoor er anderhalf jaar later juist véél aanbod van varkensvlees zal zijn (3). De prijs zal daardoor weer dalen en de cyclus begint opnieuw (4).

b. Zie de nummertjes bij **a**, die verwijzen naar de pijlen in de figuur.

50 In de aanbodvergelijking zie je dat als de prijs toeneemt, dan ook de aangeboden hoeveelheid toeneemt.
Uit de vraagvergelijking blijkt dat als de prijs toeneemt, dat dan de gevraagde hoeveelheid afneemt (vanwege het negatieve getal -1.5 voor de prijs).

51 a.



b. De evenwichtsprijs is P = 112

c. Q = 72

d. Nieuwe vraag vergelijking wordt $Q^v = -1.5P + 250$
Nieuwe evenwicht: $P = 116$, $Q = 76$

52 $Q^v{}_t = -\ 1.5P_t + 240$
$Q^a{}_t = P_{t\text{-}1} - 40$
$Q^a{}_t = Q^v{}_t$

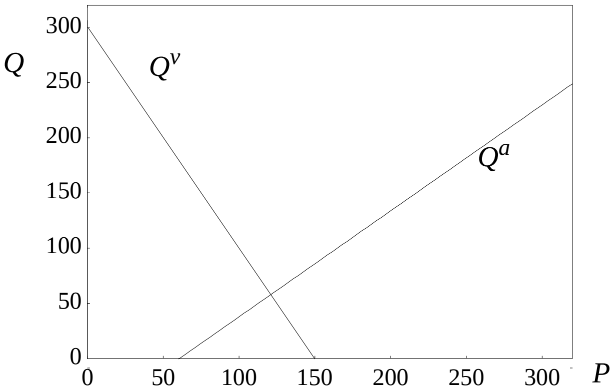
53 a. $Q^a{}_1 = 20$

b. Herschrijven van de vraagvergelijking $Q^v{}_t = -\ 2P_t + 300$ geeft $P_t = 150 - 0.5\ Q^v{}_t$

c.

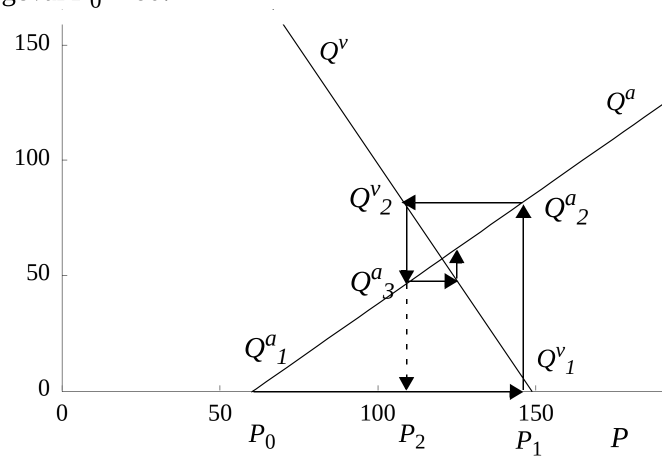
t	$P_{t\text{-}1}$	Q^a_t ($=P_{t\text{-}1}$ - 60)	Q^v_t ($= Q^a_t$)	P_t (= 150 -0.5 Q^v_t)
1	80	20	20	140
2	140	80	80	110
3	110	50	50	125
4	125	65	65	117.5
5	117.5	57.5	57.5	121.25
6	121.25	61.25	61.25	119.375
7	119.375	59.375	59.375	120.3125

54



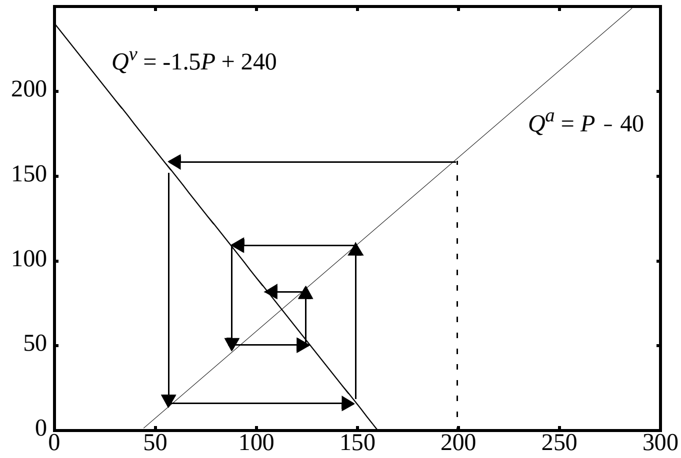
55 a. Ga na dat het startpunt in de figuur coördinaten (P_0, $Q^a{}_1$) = (80, 20) heeft, enz.
b. -
c. P en Q bewegen zich naar het snijpunt van de twee grafieken toe.

56 Het (grens) geval P_0 = 60:



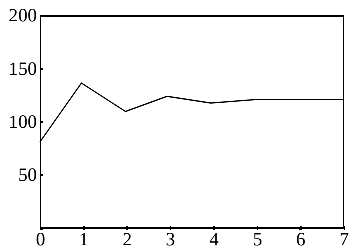
Alhoewel de beginwaarde anders is, gebeurt er uiteindelijk toch hetzelfde P en Q bewegen zich in de richting van de evenwichtswaarde, in de figuur het snijpunt van de twee grafieken.

57 Bijvoorbeeld bij $P_0 = 200$:



58 Bij de web-grafiek worden op de horizontale en de verticale as dezelfde variabelen uitgezet. Het ‘overbrengen’ van A_n naar A_{n-1} gebeurt met behulp van de lijn $y = x$. Bij de afbeelding van het ‘spinneweb-theorema’ zijn de variabelen bij de assen verschillend: gebruikelijk is horizontaal de prijs en verticaal de hoeveelheid. Het overbrengen van P_t naar P_{t-1} gebeurt door het aan elkaar gelijkstellen van vraag en aanbod ($Q_a = Q_v$).

59 De prijs-tijd grafiek met $P_0 = 80$:



60 **a.** Uit de vergelijkingen volgt dat $P_t = 160 - 2/3(\ P_{t-1} - 40\ ) = 186\ 2/3 - 2/3P_{t-1}$
Voor het evenwicht $\overline{P}$ moet gelden $\overline{P} = 186\ 2/3 - 2/3\overline{P}$,
hieruit volgt $\overline{P} = 112$.

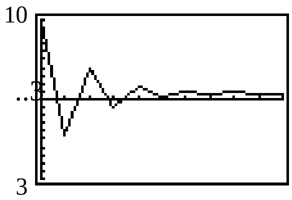
b. -

61 **a.** Uit de evenwichtsvergelijking volgt dat $-2P_t + 300 = P_{t-1} - 60$.
Dit is om te werken tot $P_t = -0.5P_{t-1} + 180$

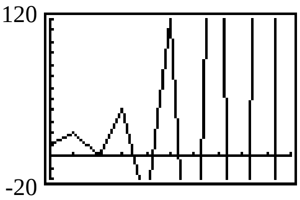
b. Herhaald invullen:
$P_1 = -0.5 * 80 + 180 = 140$
$P_2 = -0.5 * 140 + 180 = 110$
$P_3 = -0.5 * 110 + 180 = 125$
enzovoort.

62 a. $P_t = \frac{4}{7} P_{t-1} + \frac{80}{7}$

b. Evenwichtsprijs is $\overline{P} = 7.27$. Prijs-tijd grafiek:



63 a. $P_t = -2 P_{t-1} + 40$
b. $\overline{P} = 13.33$



c. Prijs en hoeveelheid bewegen zich van de evenwichtswaarde *af*, in plaats van er naar toe.

64 Het hangt af van de steilheid van de hellingen van Q^v en Q^a ten opzichte van elkaar. Als Q^v steiler is dan Q^a (absoluut gezien, dus afgezien van de richting) dan gaan *P* en *Q* naar de evenwichtswaarde toe. Als Q^a steiler is dan Q^v, dan bewegen *P* en *Q* zich juist van het evenwicht af.

Antwoorden Hoofdstuk 2 - Theorie met toepassingen

6: Rijen

1 **a.** 17 (= 1377 : 3^4)
b. 334611 (= 1377 * 3^5)

2 **a.** $t_0 = \frac{1}{2}$ en $r = 2$

b. $t_0 + t_1 + t_2 + ... + t_{12} = 4095\frac{1}{2}$

3 **a.** 1, -1, 1, -1, 1, -1
b. Als *n* even is is de som 0, als *n* oneven is is de som -1.

4 478.2969, dit is het achtste getal.

5 $\mathrm{D}K_0 + \mathrm{D}K_1 + \mathrm{D}K_2 + ... + \mathrm{D}K_{n-1} =$
$= (K_1 - K_0) + (K_2 - K_1) + (K_3 - K_2) + ... + (K_n - K_{n-1}) = K_n - K_0$
In woorden: de som van de toenames is gelijk aan het verschil van de laatste en de eerste waarde.

6 $500 * 1.05^5 = 638.1408$, afgerond is het bedrag *f* 638.14
rentedeel = *eindkapitaal* - *inleg* = $500 * 1.05^5 - 500 = 638.14 - 500 = 138.14$

7 *som van toegevoegde rentebedragen* = $\mathrm{D}K_0 + \mathrm{D}K_1 + \mathrm{D}K_2 + ... + \mathrm{D}K_{n-1}$
eindkapitaal - *inleg* = $K_n - K_0$

8 **a.** -
b. $K_1 = K_0 + \mathrm{D}K_0 = 500 + 500 * 0.05 = 500\ (1 + 0.05) = 500 * 1.05$
K2 = K1 + DK1 = 500 ∗ 1.05 + (500 ∗ 1.05) ∗ 0.05 =
$= 500 * 1.05 * (1 + 0.05) = = 500 * 1.05^2$
c.

jaarnummer *n*	toegevoegde rente per jaar: toename $\mathrm{D}K_{n-1}$	nieuw kapitaal: $K_n = K_{n-1} + \mathrm{D}K_{n-1}$
0		$K_0 = 500$
1	$\mathrm{D}K_0 = 500 * 0.05$	$K_1 = 500 * 1.05$
2	$\mathrm{D}K_1 = (500 * 1.05) * 0.05$	$K_2 = 500 * 1.05^2$
3	$\mathrm{D}K_2 = (500 * 1.05^{2)} * 0.05$	$K_3 = 500 * 1.05^3$
4	$\mathrm{D}K_3 = (500 * 1.05^{3)} * 0.05$	$K_4 = 500 * 1.05^4$
5	$\mathrm{D}K_4 = (500 * 1.05^{4)} * 0.05$	$K_5 = 500 * 1.05^5$

9 Tel de getallen in de kolom $\mathrm{D}K_{n-1}$ op en haal vervolgens 500 en 0.05 buiten haakjes.

10 Manier 1: *eindkapitaal* - *inleg* = *rentedeel* = $800 * 1.06^4 - 800 = 209.981568$
Het rentedeel is *f* 209.98
Manier 2: *rente jaar 1* + *rente jaar 2* + *rente jaar 3* + *rente jaar 4* =

48 + 50.88 + 53.9328 + 57.168768 = 209.981568, afgerond *f* 209.98

11 Dit volgt uit de antwoorden op de opgaven **6** en **9**.

12

$$r^n - 1 = (r - 1)\quad(1 + r + r^2 + ... + r^{n-1}) =$$

$$(r + r^2 + r^3 + ... + r^n) + (-1 - r - r^2 - ... - r^{n-1}) = r^n - 1$$

13 a. Links en rechts delen door r-1 geeft het gevraagde resultaat. Dit kan alleen als r „ 0 is.

b. -

14 a. $a + a\quad 1 + a\quad 1^2 + ... + a\quad 1^{n-1} = a\quad n$
De som van de eerste n termen bij beginwaarde a is dus na

b. Ja

15 a. het gaat om de som van de eerste 13 termen van een meetkundige rij met beginwaarde 1/2 en groeifactor 2:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\quad 2 + \frac{1}{2}\quad 2^2 + \frac{1}{2}\quad 2^3 + ... + \frac{1}{2}\quad 2^{12} = \frac{1}{2}\quad \frac{2^{13} - 1}{2 - 1} = \frac{1}{2}\quad \frac{8192 - 1}{1} = 4095\tfrac{1}{2}$$

b. In het geval n even is is de som 0, in het geval n oneven is is de som -1.

16 a. $1 + 6^1 + 6^2 + 6^3 + ... + 6^{10} = 1\quad \dfrac{6^{11} - 1}{6 - 1} = 72559411$

Dus ongeveer 72.6 miljoen personen.

b. Na 13 generaties. Neem in de formule n = 14:

$$\frac{6^{14} - 1}{5} = 1{,}567 \cdot 10^{10} = 15{,}67 \text{ miljard}$$

c. In de praktijk doet lang niet iedereen hier aan mee. Verder komen er al snel brieven terecht bij personen die al een brief gehad hebben.

17 a. Iets minder dan 2. Op de as kun je zien dat de som steeds dichter bij 2 komt naarmate er meer termen zijn, maar dat 2 nooit helemaal bereikt wordt.
Je kunt ook denken aan oppervlakken, bijv. één A4-tje + een half A4-tje + een kwart A4-tje .... enzoovoort. Je hebt aan twee A4-tjes genoeg om al deze stukjes te maken, en houdt (theoretisch) altijd een stukje over, hoe klein ook.

b.

$$1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{14} = 1\quad \frac{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{15} - 1}{\tfrac{1}{2} - 1} = 1{,}999939$$

18 a.

$$K_3 = 1{,}04 \cdot K_2 + 600 = 1{,}04 \cdot (1{,}04^2 \cdot 600 + 1{,}04 \cdot 600 + 600) + 600$$

$$= 1{,}04^3 + 1{,}04^2 \cdot 600 + 1{,}04 \cdot 600 + 600$$

b. De opeenvolgende waarden van het kapitaal K_n zijn sommen van de meetkundige rij met beginwaarde 600 en groeifactor 1.04 (‘van rechts naar links lezen’).

c. Het kapitaal na 20 jaar (K_{20}) is *f* 17866.85:

$$K_{20} = 600 + 600 \cdot 1{,}04 + 600 \cdot 1{,}04^2 + \ldots + 600 \cdot 1{,}04^{20}$$

$$= 600 \; \frac{1{,}04^{21} - 1}{1{,}04 - 1} = 17866{,}85$$

19 a. *f* 30.000,- ∗ 1.025^{30} = *f* 62.927.03

b. Als je aanneemt dat de eerst storting plaatsvindt op het moment dat de molen in 1996 wordt aangeschaft, en de laatste storting precies 30 jaar later, op het moment dat de molen vervangen moet worden, is bedraagt het gereserveerde bedrag (inclusief rente) in 2026 *f* 53070.59. Berekening:

$$750 \cdot 1{,}05^{30} + 750 \cdot 1{,}05^{29} + \ldots + 750 \cdot 1{,}05^{1} + 750 =$$

$$750 \; \frac{1{,}05^{31} - 1}{1{,}05 - 1} = 53070{,}59$$

Dit is dus niet voldoende voor de vervanging van de molen.

c. Nodig is het bedrag *f* 62.927.03. Noem het te reserveren bedrag per jaar *A* en los *A* op uit de vergelijking:

$$A \; \frac{1{,}05^{31} - 1}{1{,}05 - 1} = 62927{,}03$$

Dit geeft (afgerond) A = 889.29. het benodigde bedrag per jaar is dus *f* 889.29.

7: Het algemene model nader bekeken

20 $\Delta X_{n-1} = X_n - X_{n-1} = aX_{n-1} + b - X_{n-1} = (a-1)X_{n-1} + b$
en: $X_n = X_{n-1} + \Delta X_{n-1} = X_{n-1} + (a-1)X_{n-1} + b = aX_{n-1} + b$

21 a. Nee, hier is geen sprake van een *directe voorganger* in de differentievergelijking.
b. Nee, ook in deze vergelijking staat niet alleen de directe voorganger.
c. Nee, want er staat een kwadratische term in de vergelijking.
d. Ja.

22 Verschijnselen *a*, *b* en *c* werden beschreven met 1^e orde lineaire differentievergelijkingen. Verschijnsel *e* eerst ook, maar het model werd vervolgens aangepast met geremde groei en was toen geen lineaire differentievergelijking meer. De dynamische vraag-aanbod modellen kon je reduceren tot één differentievergelijking voor de prijs. Die vergelijking was meestal een 1^e orde lineaire differentievergelijking

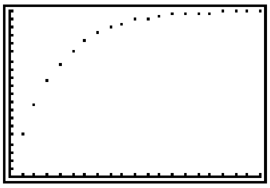
Onderzoeksopdracht

-

8: Een directe formule voor het algemene model

23 $A(n) = 1000 * 0.90^{n-5} = 1693.51 * 0.90^n$

24 a.



b. Aflezen uit de grafiek geeft een peil van 2000.
c. Op den duur verandert het peil niet meer, zodat $U_n = U_{n-1}$.
d. $U = 2000$
e. $U_n = 2000$
f. Het lijkt erop dat de grafieken samenvallen. Inzoomen versterkt dit idee.

25 In het evenwicht verandert X niet meer, dus $X_n = X_{n-1}$. Oplossen van de vergelijking $X = aX + b$ geeft de evenwichtswaarde.

26 B = 5333 (afgerond)

27 a. Invullen geeft $U_n = 2000 + 0.75^n\,(0 - 2000)$ en uitwerken hiervan de gegeven directe formule.
b. $U_n = 2000$

28 a. $B(t) = 5333\,{}^1/_3 - 2333\,{}^1/_3 \cdot 0.85^t$
b. -

29 a.

$$X_5 = a^5X_0 + a^4b + a^3b + a^2b + ab + b$$

b. Voortzetting van de regelmaat geeft het gevraagde.

30 Let op het gebruik van de letters: a en r worden b en a:

$$\boxed{b + ba + b\,a^2 + \ldots + b\,a^{n-1} = b\,\frac{a^n - 1}{a - 1}}$$

31 a. $U_n = -2000\,(0.75^n - 1)$
b. -

32 a. Twee stappen zijn belangrijk:
(1) buiten haakjes halen van a^n en
(2) bedenken dat: $-b/(a-1) = +b/(1-a)$. De rest is een kwestie van uitschrijven:

$$X_n = a^nX_0 + b\,\frac{a^n-1}{a-1} = a^nX_0 + \frac{b}{a-1}\,(a^n - 1) = a^nX_0 + \frac{b}{a-1}\,a^n - \frac{b}{a-1}$$

$$= a^n\left(X_0 - \frac{b}{1-a}\right) - \frac{b}{a-1} = a^n\left(X_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-a} + a^n\left(X_0 - \frac{b}{1-a}\right)$$

b. $b/(1-a)$ is evenwichtswaartde en X_0 is beginwaarde.

33 a. Dan wordt door nul gedeeld.
b. Dan geldt bijvoorbeeld:

$$X_5 = X_0 + b + b + b + b + b = X_0 + 5 \cdot b$$

Zelfde redenering voor X_n ;het algemene resultaat is: $X_n = X_0 + n \cdot b$.

34 a. Invullen van $a = 1.04$ en $b = 600$ en $X_0 = 600$.
b. $K_n = 16200 * 1.04^n - 15000$
c. -

35 a. *f* 600,-
b. $K_n = 1.04 * K_{n-1} - 600$
$K_0 = 15000$
c. $K_n = 15000$, het bedrag van de schuld is constant. Maar zo heb je ook die 600 gekozen!

36 a. $a = -0.5$ en $b = 180$.
b. $P_n = 120 - 40 * (-0.5)^n$
c. $P_{20} = 119.99996$ en $P_{21} = 120.00002$
d. -0.5^n wordt steeds kleiner als n groter wordt en is bovendien negatief voor oneneven n en positief voor even n.

37 a. -
b. Als $P_0 = 120$ dan komt er $(-0.5)^t \cdot 0 = 0$, en is P_t dus altijd gelijk aan 120.

38 a. In dit geval wel, omdat het grondtal tussen -1 en 1 zit (hier: -0.5). Als dat grondtal kleiner dan -1 is of groter dan 1, dan zal de prijs zich niet in de richting van de evenwichtsprijs bewegen.
b. Dan moet gelden $P_t = P_{t-1}$, dus door het oplossen van de vergelijking:
$P = -0.5\,P + 180$.

39 $U_n = -1 + 2^{n+1}$

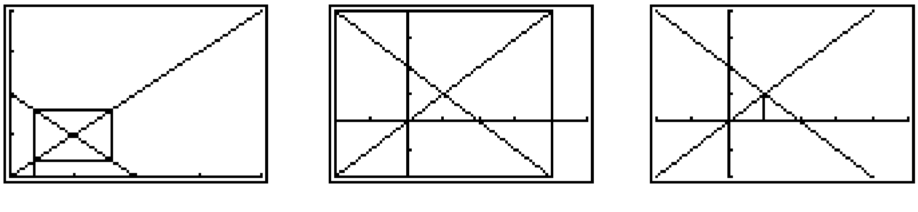
40 a. De bijbehorende betrekking is geen 1e orde lineaire differentievergelijking.
b. Idem..

9: Indeling in categorieën

41 a.

$$X_n = \frac{b}{2} + (-1)^n \left(X_0 - \frac{b}{2}\right)$$

b. Hieronder zie je de grafieken voor resp. $U_0 = 2$, $U_0 = 20$ en $U_0 = 5$:

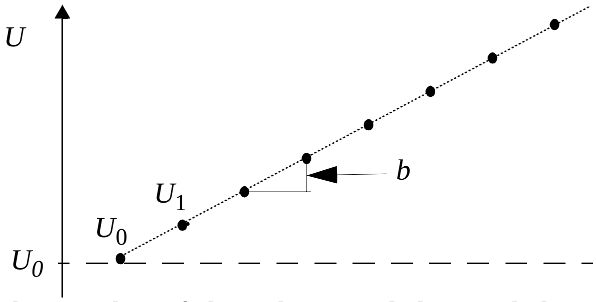


c. Bij $b = 10$ is de evenwichtswaarde $\overline{U} = 5$. Algemeen: $\overline{U} = b/2$.

42 a. Bij het web dat hoort bij $U_0 = 2$ is U_n afwisselend 8 en 2, en 'springt' dus steeds om de evenwichtswaarde 5 heen. In het geval $U_0 = 20$ treedt iets dergelijks op (afwisselend de waarden 20 en -10). In het derde geval is $U_0 = \overline{U} = 5$ en is er geen sprake van schommeling.
b. $b = 2 * \overline{U}$

43 Alleen voor $b = 0$ is er een evenwicht, dan is namelijk $U_n = U_0$ voor alle n. Als b „ 0 dan is er geen stabiel evenwicht. De algemene oplossingsformule is $U_n = U_0 + n*b$.

44 a.



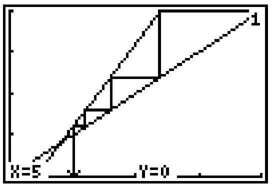
b. As $b = 0$ is de grafiek een horizontale lijn en als $b < 0$ een dalende lijn.

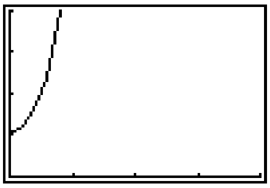
45 De belangrijkste conclusies:
- de oplossingsrij is in elk geval monotoon als a > 0
- evenwichtswaarde $\overline{U} = b/(1 - a)$ is stabiel voor $0 < a < 1$ en instabiel voor $a > 1$.

46 a. In een web-grafiek is de waarde van $\overline{U}$ af te lezen uit het snijpunt met de grafiek van $y = x$ (x- of y-coördinaat). In een tijd-grafiek is de waarde van $\overline{U}$ de hoogte van de horizontale asymptoot.

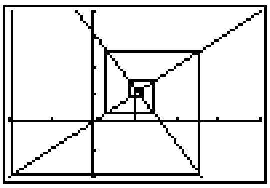
b. U_5 ligt dicht bij het snijpunt, respectievelijk de horizontale asymptoot.

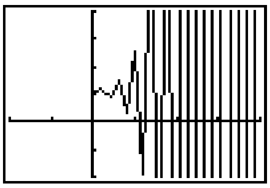
47 Hieronder zie je een web- en een tijd-grafiek van $U_n = 2U_{n-1} - 4$ met $U_0 = 5$:



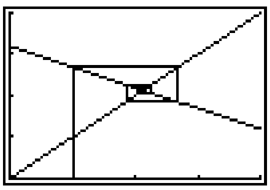


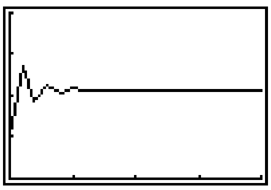
48 Hieronder zie je een web- en een tijd-grafiek van $U_n = -2U_{n-1} + 16$ met $U_0 = 5.1$:





In de web-grafiek 'spiraliseert' U_n van het evenwicht af, in de tijd-grafiek worden de 'uitslagen' steeds groter.
Hieronder zie je een web- en een tijd-grafiek van $U_n = -0.5U_{n-1} + 16$ met $U_0 = 5$:





49 Schommelend steeds verder van het evenwicht af.

50 Schommelend naderen naar het evenwicht.

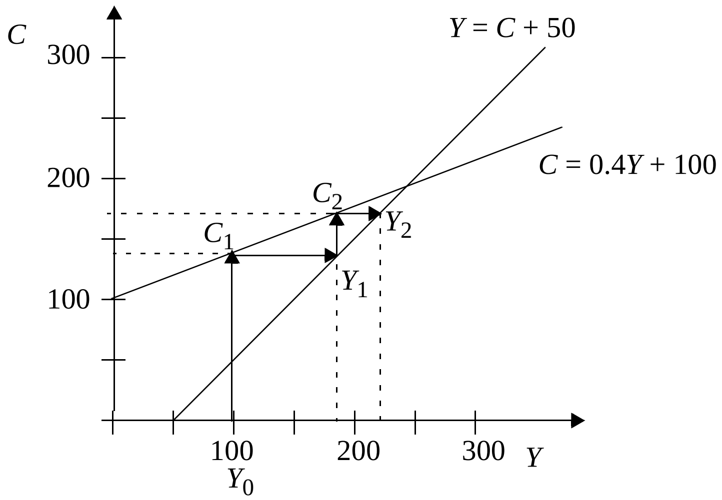
10: Toepassing: een macro-economisch model

51 a. Los Y op uit $Y = 0.6Y + 60$, dat geeft $\overline{Y} = 150$.
b. $\overline{Y} = 175$. Verhoging van de investeringen met 10 leidt tot een toename van het evenwichtsinkomen met 25.

52 Herhaald invullen geeft een eerste indruk van wat er gebeurt:
Y_0 --> C_1 --> Y_1 --> C_2 --> ...
150 -> 140 -> 160 -> 146 -> ...
Vervolgens kun je de evenwichtsvergelijking benutten om een differentievergelijking voor Y_t op te stellen, dat geeft $Y_t = 0.6Y_{t-1} + 70$
De evenwichtswaarde is 175 (zie de vorige vraag) en aan de vergelijking kun je al zien dat er monotone convergentie optreedt.
De algemene oplossing is $Y_t = 175 - 25 * 0.6^t$.
Je kunt ook een web- en een tijdgrafiek tekenen.

53 a. Herhaald invullen (begin weer met $Y_0 = 150$):
Y_0 --> C_1 --> Y_1 --> C_2 --> Y_2 --> C_3 -->...
150 -> 140 -> 150 -> 140 -> 150 -> 140 -> ...
en dan treedt opeens de verhoging van de investeringen op (wordt 20):
--> Y_3 --> C_4 --> ...
-> 160 -> 146 -> ...
die vervolgens weer terugvallen naar het oude niveau van 10:
Y_4 --> C_5 --> Y_5 --> C_6 --> ...
166 -> 149.6 -> 159.6 -> 145.76 -> ...
b. $\overline{Y} = 150$
c. Een eenmalige verhoging van de investeringen heeft slechts een tijdelijk effect.

54 a.



b. $Y_t = 0.4\ Y_{t-1} + 150$ met $Y_0 = 100$ heeft als oplossing $Y_t = 250 - 150 * 0.4^t$
$Y_1 = 250 - 150 * 0.4^1 = 190$, $Y_2 = 250 - 150 * 0.4^2 = 226$

Antwoorden Hoofdstuk 3 - Complexe modellen en de computer

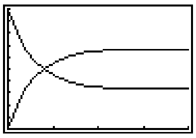
11: Het verband met matrices

1 **a.** -

b. $B_1 = 80$ en $W_1 = 20$.

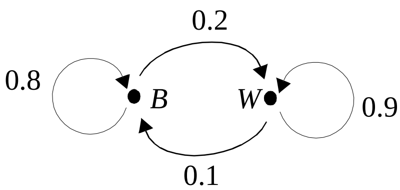
c. $B_t = B_{t\text{-}1} + \Delta B = B_{t\text{-}1} - 0.2B_{t\text{-}1} + 0.1\ W_{t\text{-}1} = 0{,}8\ B_{t\text{-}1} + 0{,}1\ W_{t\text{-}1}$
Idem voor W_t

2 **a.**



b. $B : W = 1 : 2$. Anders gezegd: 1/3 van de mensen koopt Bioclean, 2/3 koopt Whitewash.

3 **a.**



b.

$$\begin{array}{ccc} & \text{VAN} & \\ A= & \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix} & \text{NAAR} \end{array}$$

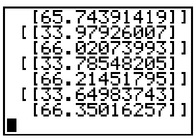
c.

$$\begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{ marktaandeel Bioclean op } t = 1 \\ \longrightarrow \text{ marktaandeel Whitewash op } t = 1 \end{array}$$

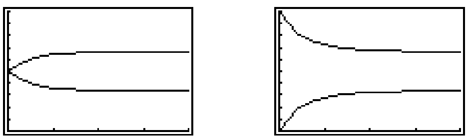
d.

$$\begin{bmatrix} B_t \\ W_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{t-1} \\ W_{t-1} \end{bmatrix}$$

4 **a.**



b. Eerst met begin [50, 50] en daarnaast met begin [0, 100]:



5 **a.** Werk met het stelsel differentievergelijkingen:
$A_t = 0.85\ A_{t\text{-}1} + 0.10\ T_{t\text{-}1}$ (autoreizigers)
$T_t = 0.90\ T_{t\text{-}1} + 0.15\ A_{t\text{-}1}$ (treinreizigers)
met $A_0 = 650$ en $T_0 = 350$.
Of met het matrixmodel:

$$\begin{bmatrix} A_t \\ T_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{t-1} \\ T_{t-1} \end{bmatrix}$$

Herhaald doorrekenen leert dat er een vaste verhouding ontstaat: 400 autoreizigers en 600 treinreizigers.

b. Volgens het model ontstaat er op den duur een vaste verhouding en wonen er (na ongeveer 150 jaar!) ongeveer 18.700 mensen in Katwijk, en 37.300 mensen in Noordwijk. De verhouding Katwijk : Noordwijk = 1 : 2. Dit komt overeen met de verhouding 1/16 : 1/8. Dit betekent dat de wisselingen van Katwijk naar Noordwijk en omgekeerd elkaar getalsmatig precies opheffen.

6 Er wordt nog wel gewisseld, maar de wisselingen heffen elkaar op.

7 **a.** DB = 0 en DW = 0
b. uit DB = 0 volgt: $-0.2B + 0.1\ W = 0$
uit DW = 0 volgt: $0.2B - 0.1W = 0$
Omdat deze twee vergelijkingen in feite het zelfde zijn (de tweede is het tegengestelde van de eerste) kun je hier alleen de *verhouding* tussen B en W uithalen:
$0.2\ B = 0.1\ W$, zodat B : W = 1 : 2.
Combinatie met het gegeven $B + W = 100\%$ levert $B = 33.3\%$ en $W = 66.7\%$
c. Omdat de marktaandelen niet meer veranderen, geldt $B_t = B_{t\text{-}1} = B$. Je kunt de tijdindices dus weglaten in de differentievergelijkingen.
d. Beide vergelijkingen zijn te schrijven als $0.2B = 0.1W$. Je kunt zo alleen de verhouding tussen B en W vinden, $B : W = 1 : 2$. Het extra gegeven is het feit dat de som van de marktaandelen steeds 100% is, zodat het marktaandeel van B uiteindelijk 33,3% is en dat van W 66,7%.

8 De aantallen die over en weer van B naar W gaan moeten ‘elkaar opheffen’. Daar volgt ook uit dat $0.2B = 0.1W$

9

10 **a.** Het lukt niet om de twee vergelijkingen te reduceren tot één vergelijking die óf alleen over B gaat óf alleen over W.
b. De som van de marktaandelen is 100% en het systeem is gesloten (er ‘verdwijnen’ geen kopers uit het systeem).
c. $B_t = 0.8B_{t\text{-}1} + 0.1\ (100 - B_{t\text{-}1}) = 0.7\ B_{t\text{-}1} + 10$
d. $W_t = 0.2\ (100 - W_{t\text{-}1}) + 0.9\ W_{t\text{-}1} = 0.7W_{t\text{-}1} + 20$

11 **a.** Invullen van $a = 0.7$ en $b = 10$ in de directe formule geeft

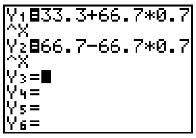
$$B_t = \frac{10}{0{,}3} + 0{,}7^t \left(100 - \frac{10}{0{,}3}\right) \text{»}\ 33{,}3 + 66{,}7 \cdot 0{,}7^t$$

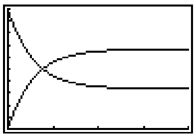
b. Naarmate t toeneemt, wordt de invloed van de term met 0.7^t kleiner. Voor $t = 2$ is de invloed van de tweede term al gehalveerd ($0.7^2 = 0.49$) ten opzichte van $t = 0$ ($B_0 = 100$). Na vier maanden is die invloed gereduceerd tot een kwart, zodat B_4 ongeveer 50 moet zIjn. Het marktaandeel van B loopt behoorlijk snel terug.

c.

$$W_t = \frac{20}{0{,}3} + 0{,}7^t \left(0 - \frac{20}{0{,}3}\right)$$ » $$66{,}7 - 66{,}7 \cdot 0{,}7^t$$

d.





e. Je kunt zien dat $B_t + W_t = 100$ door de formules bij elkaar op te tellen. Het tekenen van Y3 = Y1++Y2 wijst ook in die richting, maar het is geen bewijs!

f. De evenwichtswaarden kun je rechtstreeks aflezen uit de directe formules: $\overline{B} = 33.3$ en $\overline{W} = 66.7$. Een andere manier is om de vergelijkingen $B = 0.7\ B + 10$ en $W = 0.7\ W + 20$ op te lossen.

g. De oplossingsrij voor B_t is monotoon convergent en die voor W_t ook.

12 a. $A_t = 0.85\ A_{t-1} + 0.10\ T_{t-1}$
$T_t = 0.90\ T_{t-1} + 0.15\ A_{t-1}$
en $A_t + T_t = 1000$, invullen van $T_{t-1} = 1000 - A_{t-1}$ resp. $A_{t-1} = 1000 - T_{t-1}$ geeft het gevraagde.

b. $\overline{A} = 400$ en $\overline{T} = 600$.

c. $A_t = 400 + 250 * 0.75^t$, de eerste term in deze formule ($b/(1-a)$ is de evenwichtswaarde.

d. $T_t = 650 - 250 * 0.75^t$
Deze formule is te vinden door invullen van formule voor A_t in $T_t = 1000 - A_t$ of door invullen van de juiste waarden voor a en b in de directe oplossingsformule.

13 Stelsel differentievergelijkingen:
$K_t = 0.875\ K_{t-1} + 0.0625\ N_{t-1}$
$N_t = 0.125\ K_{t-1} + 0.9375\ N_{t-1}$
$K_t + N_t = 56000$
Hieruit afleiden:
$K_t = 0.8125\ K_{t-1} + 3500$
Evenwichtswaarde $\overline{K} = 18667$, zodat $\overline{N} = 37333$ (evt. globaler afronden)
Directe formules:
$K_t = 18667 + 21333 * 0.8125^t$
$N_t = 37333 - 21333 * 0.8125^t$

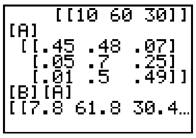
14 Evenwichtssituatie te bepalen uit:

- experimenteel, door herhaald doorrekenen van matrixmodel of differentievergelijkingen (grafisch/numeriek)
- berekenen uit herschreven 1e orde lineaire differentievergelijking, door gelijkstellen van X_t en X_{t-1} (Kenmerk evenwicht is immers dat aantallen niet meer veranderen (algebraïsch)
- door opstellen van directe formules, en nagaan wat er gebeurt als t heel groot wordt.

15 Het complete matrixmodel luidt (let op de richting!):

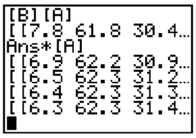
$$\begin{bmatrix} U_t & M_t & L_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{t-1} & M_{t-1} & L_{t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}45 & 0{,}48 & 0{,}07 \\ 0{,}05 & 0{,}70 & 0{,}25 \\ 0{,}01 & 0{,}50 & 0{,}49 \end{bmatrix}$$

a.



b. $U_t = 0.45\ U_{t\text{-}1} + 0.05\ M_{t\text{-}1} + 0.01\ L_{t\text{-}1}$
$M_t = 0.48\ Ut\text{-}1 + 0.70\ Mt\text{-}1 + 0.50\ Lt\text{-}1$
$L_t = 0.01\ U_{t\text{-}1} + 0.50\ M_{t\text{-}1} + 0.49\ L_{t\text{-}1}$

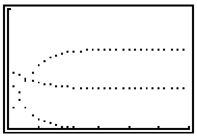
c. Hieronder zie je de uitvoer van Ans*[*A*], waarbij begonnen is met [*B*]*[*A*].

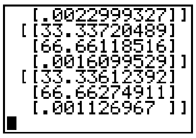


16 a. Met *matrices*: het matrixmodel is:

$$\begin{bmatrix} B_t \\ W_t \\ C_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}15 \\ 0 & 0 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{t-1} \\ W_{t-1} \\ C_{t-1} \end{bmatrix} \qquad \text{met} \begin{bmatrix} B_0 \\ W_0 \\ C_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

De uitvoer van het grafieken-programmaatje op de GR is dan:





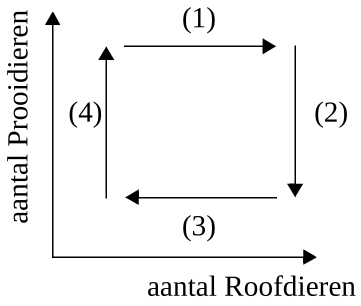
b. Met *differentievergelijkingen*: het bijbehorende stelsel is:
$B_t = 0.8\ B_{t\text{-}1} + 0.1\ W_{t\text{-}1} + 0.15\ C_{t\text{-}1}$
$W_t = 0.2\ B_{t\text{-}1} + 0.9\ W_{t\text{-}1} + 0.15\ C_{t\text{-}1}$
$C_t = 0.7\ C_{t\text{-}1}$
met bovendien $B_t + W_t + C_t = 100$
De eerste twee vergelijkingen kun je (door invullen van $C_{t\text{-}1} = 100 - B_{t\text{-}1} - W_{t\text{-}1}$) herschrijven tot:
$B_t = 0.65\ B_{t\text{-}1} - 0.05\ W_{t\text{-}1} + 15$
$W_t = 0.05\ B_{t\text{-}1} + 0.75\ W_{t\text{-}1} + 15$
Deze vergelijkingen kun je invoeren en doorrekenen op de GR, waarna *Ct* berekend kan worden uit $C_t = 100 - B_t - W_t$.
Het blijkt dat op den duur *B* naar 33.3 gaat, *W* naar 66.7 en *C* naar 0.
c. Het evenwicht is ook te berekenen, door te stellen dat $B_t = B_{t\text{-}1}$ en $W_t = W_{t\text{-}1}$ en vervolgens het stelsel op te lossen.
Dit geeft eveneens $\overline{B} = 33.3$ en $\overline{W} = 66.7$ (en $\overline{C} = 0$).

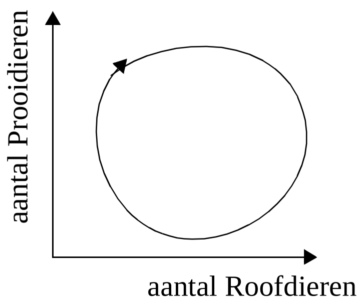
d. Het valt ook direct uit de gegevens te beredeneren wat het evenwicht moet zijn, omdat de kopers van Cleanspan geleidelijk aan allemaal overgaan op Bioclean en Whitewash. De evenwichtsverdeling tussen die twee was al bepaald, en is onafhankelijk van de beginsituatie.

12: Prooi-roofdiermodellen

17 a. af, af, roof-, tekort, verminderen, prooi-, toe, roof-, toe.

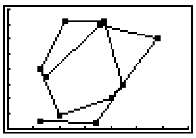
b. Twee mogelijke plaatjes:





c. De grafiek wordt gespiegeld, de pijlrichting draait daarbij om.

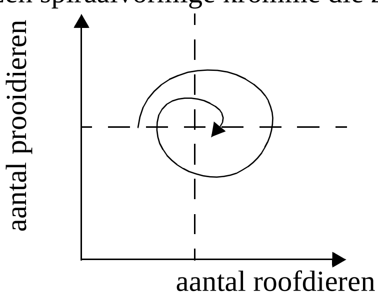
18 a.



b. De cyclus herhaalt zich na ongeveer 10 jaar.

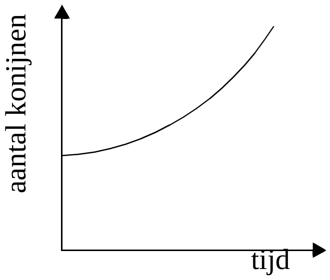
19 Curve A zijn de roofdieren en curve B zijn de prooidieren.

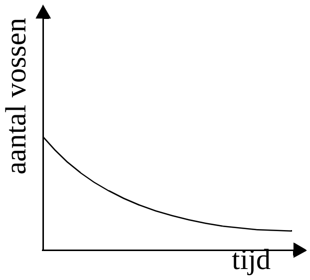
20 Een spiraalvormige kromme die zich naar het evenwichtspunt beweegt:



21 a. $DK = 0.05\ K_{t-1}$ en $DV = -0.03\ V_{t-1}$

b. Het aantal konijnen neemt exponentieel toe, het aantal vossen neemt exponentieel af. Een schets:





22 a. Hoe groter $V_{t\text{-}1}$ is, hoe kleiner de vermenigvuldigingsfactor voor $K_{t\text{-}1}$ is, het aantal vossen heeft dus een negatieve invloed op de toename van het aantal konijnen.

b. De groeivoet is een lineaire functie van het aantal vossen.

23 Het aantal konijnen heeft een positieve invloed op de verandering van het aantal vossen. Als het aantal konijnen groter is dan 150, neemt het aantal vossen zelfs toe in plaats van af.

24 a. $K_1 = 253$ en $V_1 = 41$

b. $K_2 = 255$ en $V_2 = 42$

c. Bij de schrijfwijze $\mathtt{D}K = (0.05 - 0.001 * V_{t\text{-}1}) * K_{t\text{-}1}$ zijn 3 rekenstappen nodig om $\mathtt{D}K$ te berekenen, bij de schrijfwijze $\mathtt{D}K = 0.05 * K_{t\text{-}1} - 0.001 * V_{t\text{-}1} * K_{t\text{-}1}$ zijn dat er 4. De berekening met haakjes kost dus de minste rekenstappen.

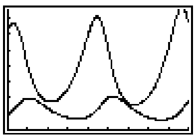
25 a. Voor het evenwicht geldt dat $\mathtt{D}K = 0$ en $\mathtt{D}V = 0$ en de tijdsindices doen niet meer ter zake.

b. Bedenk dat $A \,.\, B = 0$ als $A = 0$ of $B = 0$.
Het stelsel heeft twee oplossingen: $\overline{V}=0$, $\overline{K}=0$ en $\overline{V} = 50$, $\overline{K} = 150$.
De eerste oplossing is flauw, er zijn dan helemaal geen vossen en konijnen.

c. De vruchtbaarheid van de konijnen was uitgedrukt in het getal 0.05. Als dit getal groter wordt wordt $\overline{V}$ ook groter (bijb. bij 0.06 wordt dat $\overline{V} = 60$). De evenwichtswaarde voor het aantal konijnen verandert niet.

26 Invullen van $\mathtt{D}K$ en $\mathtt{D}V$ in resp. $K_t = K_{t\text{-}1} + \mathtt{D}K$ en $V_t = V_{t\text{-}1} + \mathtt{D}V$ en enig gemanipuleer met haakjes geeft het gevraagde.

27



Bijlage — Wat is QUATTRO en hoe gebruik je het?

QUATTRO is een spreadsheet: een computerprogramma dat je handig kunt gebruiken bij het maken van berekeningen. Een spreadsheet ziet eruit als een rekenmatrix. Het vraagt wat oefening om er mee te leren werken, maar het is de moeite van de inspanning waard.

1 **a.** Start QUATTRO. Met de pijltoetsen kun je een hok bewegen. Op het scherm staat ook de plek van het hok aangegeven.
Verplaats het hok naar de plek C6. Waarom is de naam van die plek C6?
b. Bestaat de plek B30?

> Op een plek in het spreadsheet kunnen getallen, formules of tekst staan.
> Een formule begint altijd met een **+** en tekst begint met een **'**.
>
> Het menu zie je na tikken van ***/***.
> Als je uit het menu wilt, kan dat met [**Esc**].

De ouders van Bertus zijn het gezeur over meer zakgeld zat. Bertus mag een voorstel doen voor een nieuwe zakgeldregeling die een tijd geldt.
Hij bedenkt twee mogelijkheden:
Voor deze week *f* 5.- en iedere week een dubbeltje erbij: volgende week *f* 5.10, daarna *f* 5.20, enzovoort.
Deze week *f* 0.01 en dan iedere week het dubbele: volgende week *f* 0.02 daarna *f* 0.04, enzovoort.
In de volgende opgave ga je de twee mogelijkheden vergelijken met het spreadsheet.

2 **a.** Zet in A1 het getal 5 en in A2 de formule **+**A1+ 0.10 .
De eerste **+** is nodig om duidelijk te maken dat je een formule invoert.
Het handige van een spreadsheet is dat je nu eenvoudig deze formule naar de andere plekken in kolom A kunt kopiëren.

Zet het hok op A2 en kies uit het menu (tik eerst: ***/***) de opdracht **Copy**.
Het programma vraagt wat gekopieerd moet worden: A2 is goed, dus bevestig dat.
Dan vraagt het programma waar het naar toe moet: van A3 tot aan A20.
Het blok A3..A20 is waar de formule moet komen.
b. Zet in C1 het getal 0.01 en in C2 de formule **+**C1* 2 .
Kopieer de formule van C2 naar C3..C20.
c. Wat vind je van beide zakgeld-regelingen?

Met een spreadsheet kun je meestal ook grafieken maken. In een **Graph**-menu moet je dan een aantal zaken instellen.
Als je een grafiek in een assenstelsel wilt kun je twee keuzes maken:
1. langs de horizontale as, de **X**-as, staan de getallen: 1, 2, 3, enzovoort en langs de verticale as staan de waarden van een rij of kolom.
2. ook langs de **X**-as staan waarden uit een rij of kolom, in dit geval moet je meestal kiezen voor het type **XY**-grafiek.

Bijlage QUATTRO

wat wil je?	*hoe doe je dat?*
Het menu zien	
Een formule invoeren	
Een formule kopiëren	
Een grafiek maken	