

# WISKUNDE B-DAG 2003



28 november 2003

## WISKUNDIG DOOR DE BOCHT



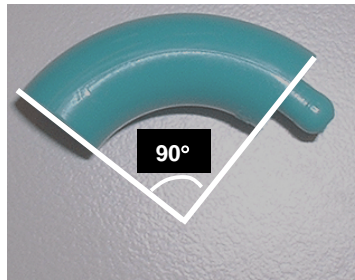
De Wiskunde B-dag wordt gesponsord door **Texas instruments**

## Inleiding

Soms dringt wiskunde zich spontaan op, bijvoorbeeld in een stukje speelgoed. Je hoeft het alleen maar ter hand te nemen om uren te construeren en aan de hand daarvan te redeneren en te rekenen.

Vandaag gaan we dat doen aan de hand van een setje zogenaamde "elleboogjes".

Een elleboogje is een kwartcirkel. Met één klik kunnen de elleboogjes worden geschakeld.



We bekijken alleen gesloten schakelingen van elleboogjes (dus zonder begin- en eindpunt). Zo'n gesloten schakeling noemen we een *circuit*.

Onderstaande foto's tonen een aantal voorbeelden van circuits. Je ziet vier *vlakke* circuits, bestaande uit 8, 12, 16 en 28 elleboogjes: ze kunnen plat op tafel worden gelegd.

Maar linksonder is ook een *ruimtelijk* circuit gegeven met 7 elleboogjes. Deze vorm kan niet plat op tafel gelegd worden.



We noemen een circuit dus alleen vlak als alle elleboogjes van het circuit in hun geheel plat op tafel liggen. Om misverstanden te voorkomen: de twee onderstaande foto's tonen twee circuits met 8 elleboogjes. Links is sprake van een vlak circuit; rechts ligt het circuit niet in zijn geheel plat op tafel en daarom is het dus niet vlak.

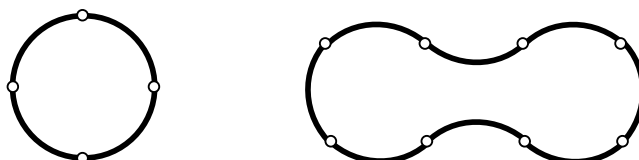


### **Wiskundige representaties van elleboogjes.**

De elleboogjes kunnen we wiskundig representeren als kwartcirkels met straal 1. Bij deze wiskundige weergave verwaarlozen we de dikte van het materiaal van de elleboogjes. In de verbindingen zitten de kwartcirkels met hun eindpunten aan elkaar en hebben daar een gezamenlijke raaklijn.



Hieronder zijn twee vlakke circuits, met 4 resp. 8 elleboogjes, op deze manier weergegeven.



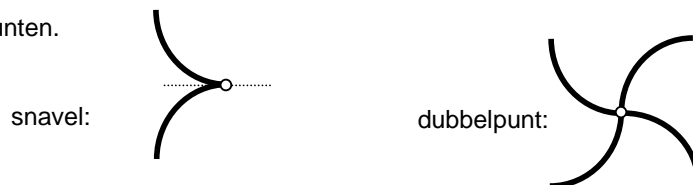
Soms lijkt een *plastic* circuit wel te kunnen (met een beetje wringen), maar als je het op bovenstaande wijze met kwartcirkels probeert weer te geven, blijkt het *wiskundig* gezien niet mogelijk. Wij zullen dat dan niet als "circuit" erkennen.

De raaklijneigenschap van de wiskundige representatie betekent voor de concrete elleboogjes: van twee geschakelde elleboogjes sluiten de grensvlakken naadloos op elkaar aan.

Een wiskundige omschrijving van een circuit van  $n$  elleboogjes luidt dus:

**Een  $n$ -circuit is een gesloten kromme, bestaande uit  $n$  kwartcirkels die in alle verbindingpunten steeds een gezamenlijke raaklijn hebben.**

Het lijkt overbodig (omdat de elleboogjes het niet toelaten), maar wiskundig moet het nog worden uitgesloten: in een gesloten kromme staan we geen 'snavels' toe en ook geen dubbelpunten.



## De Opgave

Bij deze Wiskunde B-dag ga je op zoek naar mogelijkheden en onmogelijkheden van vlakke en ruimtelijke circuits van elleboogjes en eigenschappen daarvan. Het setje van 18 elleboogjes is bedoeld om daadwerkelijk constructies uit te voeren die het denken en redeneren over circuits in algemene zin (dus ook voor circuits met meer dan 18 elleboogjes) kunnen ondersteunen.

De opdracht is gesplitst in 3 delen.

In deel A worden de vlakke circuits onderzocht. In deel B worden ruimtelijke circuits bekeken die aan bepaalde voorwaarden moeten voldoen; je krijgt daar dus maar beperkt de ruimte. Daarna krijg je in deel C de volledig vrije ruimte.

De genummerde vragen in de delen A, B en C zijn bedoeld om richting te geven aan je onderzoekingen. Ze hoeven niet in de gegeven volgorde bekeken te worden; het werk daaraan kan ook worden verdeeld binnen de groep.

In elk deel worden ook algemene vragen gesteld. Dat zijn de onderzoeksvragen waarmee je jezelf kunt onderscheiden van anderen in wiskundige diepgang en volledigheid.

## Eindopdracht

Van je bevindingen in de delen A, B en C maak je een zelfstandig leesbaar werkstuk. Dit houdt in dat een lezer, die zelf beschikt over een setje elleboogjes, aan de hand van je verslag duidelijk zicht krijgt op de mogelijkheden, onmogelijkheden en eigenschappen van vlakke en ruimtelijke circuits.

In het verslag speelt de volgorde van de vragen zoals ze in deze Wiskunde B-dag opdracht zijn gezet geen enkele rol. Zorg er wel voor dat je bevindingen bij de verschillende vragen aan bod komen, maar voorkom dat je verslag alleen maar een beantwoording is van de afzonderlijke vragen.

### ***Belangrijk!!***

Het verslag moet **geprint** worden of met **zwarte pen** geschreven zijn, in verband met het kopiëren. Als je in je verslag figuren opneemt, moeten deze ook geprint zijn of met zwarte pen gemaakt. Als je een digitale camera hebt, kan het aantrekkelijk zijn om foto's van circuits op te nemen in het verslag.

### ***Ten slotte:***

Bedenk dat het maken van het verslag veel tijd vergt. Het lijkt verstandig om daar ongeveer 2 uren voor te reserveren. Begin dus rond 14:00 uur met het maken er van.

*Veel plezier met je onderzoek en... maak er wat van !!*

## Deel A: Vlakke circuits

Duidelijk is dat het kleinst mogelijke vlakke circuit uit vier elleboogjes bestaat. We noemen dit een vlak 4-circuit.

### Vlakke $n$ -circuits

Een vlak  $n$ -circuit is dus een gesloten kromme zonder dubbelpunten van precies  $n$  elleboogjes, waarvan alle elleboogjes plat op tafel liggen.

In dit deel bekijken we eerst welke vlakke  $n$ -circuits mogelijk zijn.

Je hebt de beschikking over een setje van 18 echte elleboogjes om mee te experimenteren. Bedenk dat een deel van de vragen ook gaat over waarden van  $n$  die groter zijn dan 18.

1. Leg met 8 elleboogjes een vlak 8-circuit. Zijn er meerdere mogelijkheden? Geef ook alle mogelijkheden voor een vlak 12-circuit. Toon daarbij overtuigend aan dat je ze allemaal hebt gevonden.
2. Circuits daadwerkelijk maken is een kwestie van proberen. Daarbij zal het setje elleboogjes zeker helpen. Maar op papier communiceren over een circuit, zonder dat je daarbij steeds zo'n circuit tekent, is een ander verhaal. Bij het beantwoorden van veel vragen is het daarom nuttig om een manier te hebben waarmee je een willekeurig circuit kunt beschrijven. Dat kan op velerlei manieren. Aan jullie de taak om zelf een handige beschrijvingswijze te zoeken, waarmee je makkelijk kunt communiceren. Zorg er wel voor dat je de gekozen beschrijving precies vastlegt voor de lezer.
3. Je kunt heel wat 16-circuits maken. Bedenk een systematiek om ze allemaal te vinden en beschrijf die systematiek.
4. Met een oneven aantal elleboogjes kun je nooit een vlak circuit leggen. Leg dat uit.
5. Maak een schakeling van drie elleboogjes. De grenspunten nummeren we 0, 1, 2 en 3 zoals hier schematisch is weergegeven.



Houd nu de punten 0 en 1 (dus het eerste elleboogje) vast. Beschrijf waar de eindpunten van volgende elleboogjes 2, 3, 4, .... dan kunnen komen te liggen, inclusief de richting waarin een nieuw elleboogje in zo'n eindpunt moet aansluiten.

6. Is een vlak 6-circuit mogelijk?

*Algemene vraag I:*

Voor welke waarden van  $n$  is een vlak  $n$ -circuit mogelijk? Kun je dit ook hard maken?

### Omsloten oppervlakte van een vlak $n$ -circuit

We bekijken nu alleen de wiskundige representatie van de elleboogjes, waarbij de materiële dikte van de elleboogjes wordt verwaarloosd. Dat zijn kwartcirkels met straal 1. De omsloten oppervlakte van het 4-circuit is dus  $\pi$ .

Natuurlijk hangt de oppervlakte van een vlak  $n$ -circuit samen met de waarde van  $n$ , maar daarnaast is ook de vorm van het circuit van invloed op de omsloten oppervlakte.

7. Laat zien dat de oppervlakte binnen een vlak 8-circuit gelijk is aan  $\pi + 4$ .

Je ziet dat oppervlakte  $\pi$  en  $\pi + 4$  mogelijk zijn.

*Algemene vraag II:*

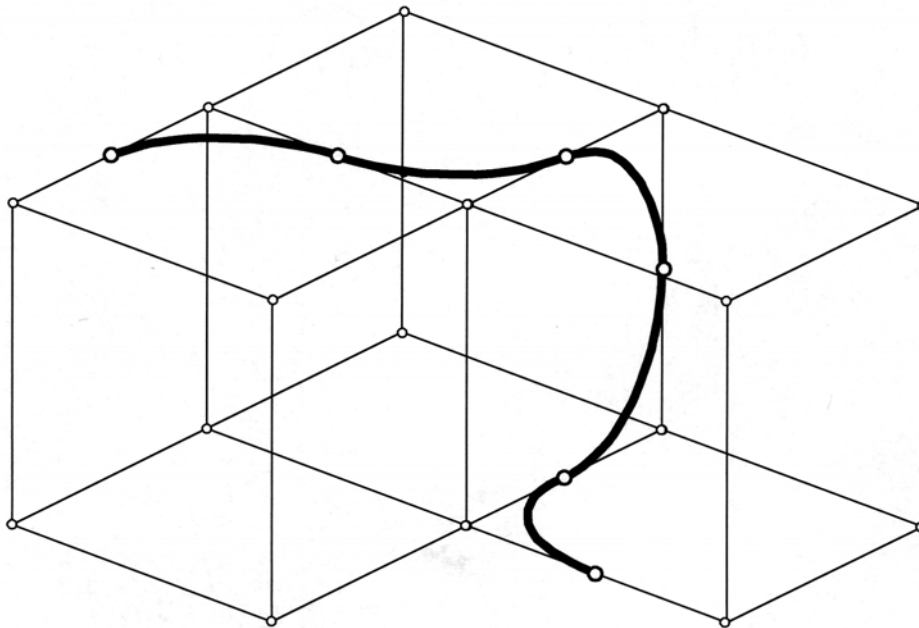
Welke oppervlaktes kunnen bij vlakke 12-, 16-, ...,  $n$ -circuits voorkomen?

## Deel B: Beperkte Ruimte

Met de elleboogjes kunnen ook ruimtelijke circuits worden gevormd. In de ruimte heb je eindelijk veel constructiemogelijkheden, omdat een elleboogje dat vast zit aan een ander in de ruimte over elke hoek kan worden gedraaid. Daarom leggen we in dit deel voorlopig een *beperking* aan de bewegingsruimte op:

De elleboogjes liggen in de vlakken van een kubisch rooster, met de eindpunten van de elleboogjes steeds op de middens van ribben van de kubussen van dat rooster.

Hieronder is een klein deel van zo'n kubisch rooster getekend, met daarin een voorbeeld van 5 geschakelde elleboogjes die aan de eis voldoen. In principe zijn de kubussen van zo'n rooster ook stapelbaar.



8. Er zijn twee verschillende ruimtelijke 6-circuits mogelijk die aan de gestelde beperking voldoen. Probeer ze te maken en beschrijf ze met behulp van het rooster. Onderzoek welke 8- en 10-circuits voldoen aan de opgelegde beperking.
9. Is het mogelijk een ruimtelijk  $n$ -circuit te maken, binnen de beperkingen van het rooster, voor oneven waarden van  $n$ ?

*Algemene vraag III*

Voor welke waarden van  $n$  is een ruimtelijk  $n$ -circuit op een kubisch rooster mogelijk?

## Deel C: De vrije ruimte

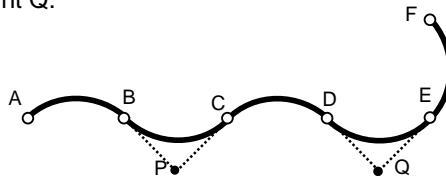
In dit deel krijg je echt vrije speelruimte. Zoals eerder is gezegd maakt dat het geheel veel complexer, omdat er zoveel bewegingsvrijheid is. Bij onbeperkte bewegingsruimte blijken ook ruimtelijke circuits mogelijk voor bepaalde oneven waarden van  $n$ .

Bij het experimenteren met de elleboogjes moet je bedenken dat het materiaal altijd wat speling toelaat. Daardoor kun je plastic circuits maken met wat wringen, die wiskundig niet als circuit mogelijk zijn. Houd je dus bij het construeren van ruimtelijke circuits aan de wiskundige beschrijving van een  $n$ -circuit zoals die in de inleiding op bladzijde 2 is gegeven.

### Een geval apart: $n = 5$

Het blijkt onmogelijk te zijn om, zonder vervorming bij de grensvlakjes, een ruimtelijk circuit te maken met 5 elleboogjes. De volgende activiteit kan wellicht helpen om een idee te krijgen waarom het niet mogelijk is.

Leg 5 geschakelde elleboogjes op tafel. Houd het middelste elleboogje (CD in onderstaande figuur) goed vast op zijn plaats en bekijk hoe eindpunt A in de ruimte kan bewegen door de twee elleboogjes CB en BA te draaien. Alle mogelijke posities voor punt A blijken een zelfde karaktertrek te hebben: ze liggen allemaal op een vaste afstand van het snijpunt P van de raaklijnen in B en C. Hetzelfde geldt voor alle mogelijke posities van punt F: die liggen allemaal op een vaste afstand van punt Q.



10. Toon aan dat voor alle mogelijke posities van punt A steeds geldt dat de afstand tot punt P constant is. Bereken ook die afstand.

De laatste opdracht is weer een algemene en daarbij heb je ook nog eens vrijheid van keuze. De ruimtelijke circuits geven alle aanleiding tot het jezelf vragen stellen. Mogelijke vragen:

- Kun je het idee van vraag 10 gebruiken om aannemelijk te maken dat een 5-circuit niet mogelijk is?
- Er zijn twee ruimtelijke 6-circuits. De ene is flexibel (kan in verschillende vormen worden gedraaid zonder te wringen). De andere is star en kan dus niet worden overgevoerd in een andere vorm. Hoe zit dat? Zijn er nog meer starre ruimtelijke circuits?
- Voor welke oneven waarden van  $n$  is een ruimtelijk circuit mogelijk?

Vragen van dit soort zijn beslist niet makkelijk te beantwoorden, maar wellicht kan het gericht experimenteren met het concrete materiaal je nog op goede gedachten brengen.

#### *Algemene vraag IV*

Doe nog wat onderzoek aan ruimtelijke vormen en probeer uitdagende problemen op het spoor te komen die met het setje ellebogen kunnen worden aangepakt. Ook als je die problemen niet zelf oplost, kun je ze in het werkstuk van de eindopdracht beschrijven.

### Ten slotte:

Voer de eindopdracht uit op de manier die beschreven is op bladzijde 3. Bedenk daarbij nogmaals dat het niet de bedoeling is dat je de afzonderlijke vragen van de delen A, B en C beantwoordt. Zorg dat je een samenhangend verslag geeft van de bevindingen rond vlakke en ruimtelijke circuits en schroom zeker niet om uitdagende problemen in je verslag op te nemen.