



Diversiteit

Wiskunde A-lympiade
Finale 1992-1993

Het gaat niet goed met de planten en dieren op onze aarde. Steeds meer soorten sterven uit of worden ernstig in hun voortbestaan bedreigd. Lokaal en globaal proberen instellingen voor natuurbehoud het tij te keren. Maar het lijkt een hopeloze strijd. Naast de economische en financiële problemen zijn er ook nog biologische: het bevoordelen van de ene soort is vaak nadelig voor de andere soort.

Al deze problemen bij het handhaven van een zo groot mogelijke verscheidenheid aan soorten hebben het denken hierover gelukkig niet verlamd.

In deze finale-opgave komen twee verschillende aspecten van diversiteit aan bod. In deel 1 gaat het over verscheidenheid, waarbij naar soorten en aantallen wordt gekeken. Deel 2 gaat over genetische verwantschap tussen soorten.

Deel 1

Bij een rubberplantage is de verscheidenheid aan gewassen uiteraard kleiner dan bij een natuurlijk bos. Voor de verscheidenheid wil men een maat invoeren, de 'diversiteit'.

Om een inzicht te krijgen waaraan deze maat moet voldoen, heeft men vier foto's gemaakt van verschillende combinaties van vijf gewassen; A, B, C, D en E. Op de foto's waren de volgende aantallen planten te zien:

	A	B	C	D	E
foto 1	40	10	20	5	5
foto 2	40	20	0	25	30
foto 3	40	20	10	25	30
foto 4	40	30	10	0	20

Aan deskundigen werd gevraagd deze foto's te rangschikken naar afnemende verscheidenheid. Unaniem vond men de verscheidenheid op foto 3 het grootst, en kwalificeerde men foto 2 voor foto 4. Over de plaats van foto 1 was men het niet helemaal eens. Uiteindelijk kwam men tot deze volgorde, in afnemende verscheidenheid: foto 3, foto 2, foto 4 en foto 1.

Opdracht I

Geef factoren aan die kennelijk belangrijk worden gevonden voor de 'diversiteit'.

Opdracht II

Een van de mogelijkheden om 'diversiteit' te definiëren is deze gelijk te stellen aan de kans dat men bij een willekeurige greep van twee elementen uit een verzameling twee verschillende soorten treft (formeel is dat trekken zonder teruglegging, maar we rekenen alsof het trekken mét teruglegging is).

- Geef een formule voor deze definitie van 'diversiteit'.

- Onderzoek hoe de formule zich gedraagt, bijvoorbeeld door te kijken naar:
 - tussen welke grenzen de 'diversiteit' ligt
 - wanneer voor een verzameling van s soorten de 'diversiteit' maximaal is
- Kun je voor deze maximale diversiteit ook een formule geven?
- Welke rol kan deze maximale diversiteit spelen?

Opdracht III

Is het resultaat van de definitie van opdracht II in overeenstemming met het resultaat van het gehouden onderzoek met de foto's?

Wat heeft het uitdunnen van een of meer van de gewassen voor gevolgen voor de diversiteit?

Deel 2

Tot nu toe hebben we alleen gekeken naar verhoudingen van aantallen. In principe is elke soort even belangrijk voor de verscheidenheid. Maar er is ook wat voor te zeggen om niet alle soorten even belangrijk te vinden. Als het om het behoud van soorten gaat, is de genetische variatie eigenlijk interessanter. Er zijn wetenschappers die geprobeerd hebben daar bepaalde maatstaven voor te ontwikkelen.

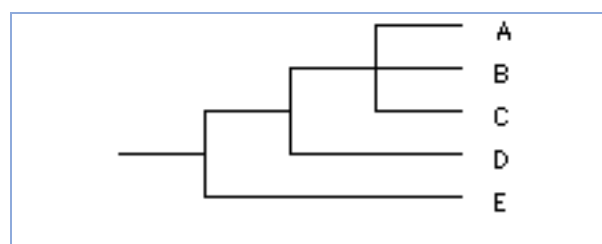
De huidige gedachte bij sommige biologen is: laten we het hoge ideaal van het bewaren van bijna alle soorten maar als onbereikbaar opgeven en in plaats daarvan al onze inspanningen richten op het behoud van een beperkt aantal soorten. Die soorten moeten dan wel verstandig gekozen worden.

Nu ontstaat een nieuw probleem: door wie en op welke wijze wordt bepaald of een soort, bij wijze van spreken, wel of niet een plaatjes in de ark zal krijgen (denk aan het bijbelverhaal van Noah, Genesis 6, 14-22)?

Om volslagen willekeur te voorkomen, probeert men een redelijk objectief systeem te bedenken waarbij rekening wordt gehouden met de belangrijkheid van de soorten, vanuit genetisch oogpunt gezien. Dit moet dan leiden tot een (relatieve) waardenschaal: bijvoorbeeld van 0 procent tot 100 procent; of de laagste plaats op 1 stellen en de rest daarop afstemmen. Elke soort krijgt een plaats op deze waardenschaal. Aangezien het economisch gezien niet mogelijk is alle met uitsterven bedreigde soorten te handhaven, zullen we ons moeten concentreren op de soorten die het hoogst genoteerd staan op de waardenschaal. Daarnaast zal ook de moeite die het kost om een soort te beschermen, een rol spelen.

Men kan natuurlijk van mening verschillen over de aspecten die men als belangrijk moet beschouwen. Maar het is in ieder geval een poging om tot een objectief systeem te komen. Verschillende biologen zijn alvast begonnen met vingeroefeningen voor zo'n systeem. Ze zijn uitgegaan van deze aanname: het is wenselijk dat de diversiteit van de erfelijke eigenschappen zo groot mogelijk blijft (denk hierbij aan de zorg voor resistente en produktieve rassen). Ze gebruiken daarbij stambomen. Zo'n stamboom geeft voor een groep van soorten de mate van genetische verwantschap.

Hieronder staat een voorbeeld van een groep, bestaande uit de vijf soorten A, B, C, D en E.



Voorbeeld Stamboom

Met deze stamboom probeert men onder meer aan te geven dat bijvoorbeeld A en B genetisch meer verwant zijn dan A en D. Dus als er maar twee soorten gered kunnen worden, dan is bijvoorbeeld de combinatie B en D een betere dan de combinatie A en B. Daarom zal D wat hoger op de waardenschaal komen dan A. Hoeveel hoger, is van het geheel afhankelijk.

Opdracht IV

Ontwerp een waardenschaal voor deze groep van vijf soorten. Hierop moet af te lezen zijn welke soort je als eerste zou opofferen, als je 'voor Noach zou spelen'.

Als er (helaas!) een soort is afgevallen, is er een nieuwe situatie ontstaan. Daar hoort dus ook een nieuwe waardenschaal bij. Probeer een overzicht te maken waarin ook de volgende 'slachtoffers' zijn af te lezen.

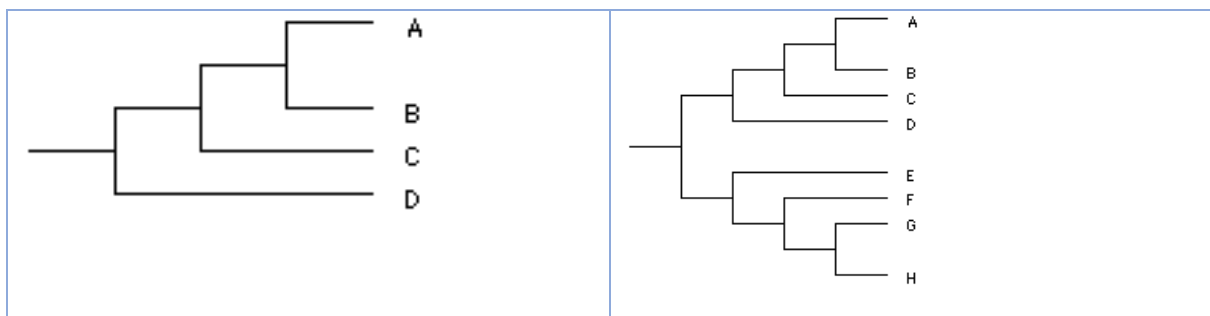
Wat heet 'eerlijk'?

De waardenschaal die je in opdracht IV hebt ontworpen is hopelijk beter dan het 'elke soort even zwaar wegen', maar het is vast nog niet ideaal. Zo kan in een groep met veel soorten één bepaalde soort extreem scoren. Een systeem dat iets meer afgevlakte resultaten geeft, is in zo'n geval beter.

Opdracht V

Ontwerp één of meer van zulke systemen en bespreek de voor- en nadelen ten opzichte van het vorige systeem of van de nieuwe systemen ten opzichte van elkaar.

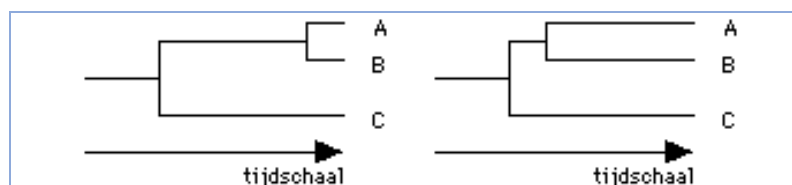
Aanwijzing: je zou als uitgangspunt voor je discussie onderstaande twee bomen kunnen nemen, en deze met elkaar kunnen vergelijken bij de verschillende systemen.



Twee stambomen ter vergelijking

Rekening houdend met de tijd

Als alleen op de knopen en takken wordt gelet, is er geen verschil tussen de volgende situaties:

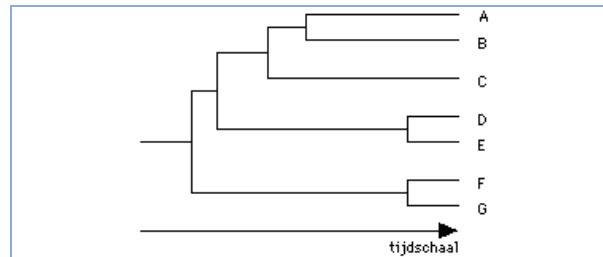


Gelijke situaties ?

Als je ook rekening houdt met de tijd en uitgaat van de veronderstelling dat met de tijd ook de verschillen groter worden, dan zijn de situaties niet meer gelijk. In het ene geval lijkt het redelijk C zwaarder te wegen dan A of B. In het andere geval is het billijker A, B en C ongeveer hetzelfde gewicht toe te kennen. Een stamboom waarbij ook de tijd een rol speelt, noemen we een evolutieboom.

Opdracht VI

Ontwerp een algemeen systeem dat ook rekening houdt met de tijd.
Bespreek dit systeem door het toe te passen op de volgende situatie:



Evolutieboom

Ten slotte

Verwerk je ideeën en bevindingen in een verslag. Dat mag een lopend verhaal worden, waarbij je zelf accenten kunt leggen. Het is dus niet erg als de verschillende opdrachten niet allemaal met dezelfde 'diepgang' zijn uitgewerkt.