Uitwerkingen

[k0]R Relativiteit[k0x]

1
Het antwoord op de tweede vraag *lijkt* in tegenspraak met het antwoord op de derde vraag. Hoe kan het dat je binnen een minuut naar de zon kunt reizen *zonder* sneller te gaan dan het licht?
Het antwoord op de vierde vraag *lijkt* in tegenspraak met het antwoord op de laatste vraag. Is materie iets anders dan massa?
Over deze schijnbare tegenstrijdigheden vind je in dit hoofdstuk de antwoorden en achtergronden.

2

[k1]R.1 **Voorgeschiedenis**[k1x]

3
Er is geen enkel experiment dat je kunt doen waarmee je de snelheid van die trein van binnenuit kunt bepalen. Als je bijvoorbeeld een voorwerp loslaat, valt het voorwerp voor jou recht omlaag. De beginsnelheid in horizontale richting is namelijk gelijk aan de horizontale snelheid van de trein.

B4
Omdat zonlicht de aarde bereikt. Tussen de aarde en de zon zit (vrijwel) geen lucht.

B5
Omdat licht ook door glas en water heen kan. Als licht ether nodig heeft, moet ether daar dus ook in zitten.

B6
a niet afhankelijk
b afhankelijk
c niet afhankelijk
d niet afhankelijk

C7
a 96 km/h + 36 km/h = 132 km/h = 37 m/s.
b $\sqrt{(96^2 + 96^2)}$ = 135,8 km/h = 38 m/s.
c 96 km/h = 27 m/s.
d Omdat de snelheidsvector van de vogel niet dezelfde richting heeft als de snelheidsvector van de auto. Je moet snelheden optellen als vectoren, niet als skalars.
e Dit is niet geschonden. Het gaat er niet om of de snelheden de autosnelheid van elkaar verschillen. Het gaat erom dat dezelfde natuurwetten gelden. In dit geval is dat de eerste wet van Newton. Die geeft aan: als er geen resulterende kracht op een voorwerp werkt, blijft de snelheid constant. In beide stelsels bleven de snelheden constant.

C8
a Het voorwerp blijft zweven.
b Ja, dan is de eerste wet van Newton altijd geldig (net als andere andere wetten van de mechanica).
c Dit voorwerp zal versneld naar beneden bewegen.
d Die is niet geldig. Zonder dat er een kracht op het voorwerp werkt, is er toch sprake van een versnelde beweging.
e Dit principe is niet geschonden. In het niet-inertiaalstelsel (de versnelde raket) golden wel andere wetten, maar het relativiteitsprincipe zegt alleen iets over inertiaalstelsels, dat was die versnelde raket niet.
f Aan de eerste wet van Newton kun je herkennen of je je in een inertiaalstelsel bevindt. Als voor jou de eerste wet van Newton geldt, dan bevindt je je in een inertiaalstelsel.
g Dit kun je berekenen. Als je weet wat de versnelling van de raket is, weet je ook met welke versnelling het losgelaten voorwerp naar de raketbodem beweegt.

C9

a Een dergelijk experiment bestaat niet, volgens het eerste postulaat van Einstein.
b Dit experiment is er. Als je bijvoorbeeld een voorwerp loslaat, kun je meten met welke versnelling dit voorwerp gaat bewegen. Die versnelling is gelijk aan de versnelling van de raket.
c De snelheid kun je niet bepalen. Dit volgt uit het eerste postulaat van Einstein: absolute snelheid bestaat niet. Ook in een versnelde raket lukt het niet om je snelheid te bepalen.
d Nee, zo iemand is er niet. Dit volgt uit het eerste postulaat van Einstein. Je kunt (zoals je in deze opdracht ook ziet) niet bepalen wat je snelheid is.

C10
a In werkelijkheid waren de 'armen' (de afstand die het licht aflegde) bij Michelson en Morley zo'n 11 meter lang. De golflengte van licht is kleiner dan een micrometer. Het lukte toentertijd niet (en nu ook niet) om twee zulke lange armen te maken die binnen micrometers nauwkeurig even lang zijn.
b Ze bekeken of het interferentiepatroon verandert, door de opstelling over 360 graden te draaien. Of de armen exact even lang zijn, doet er dan niet meer toe.

C11
a De objectieflens convergeert de bundel op een plaats dichter bij de oculairlens.
[f]
R.1[fx]
b De objectieflens convergeert de bundel op een plaats verder van de oculairlens.
[f]
R.2[fx]
c Je zou kunnen concluderen dat de ether niet bestaat. Historisch is dat overigens niet gebeurt. De historische conclusie was dat het effect van ether subtieler is dan met dit experiment kan worden aangetoond. Michelson en Morley ontwikkelden een veel geavanceerder experiment om subtielere effecten van de ether alsnog aan te kunnen tonen.

C12
a1 zuidwaarts, dus naar je hoofd toe
a2 oostwaarts, dus naar je linkerkant toe
a3 noordwaarts, dus naar je achterhoofd toe
a4 westwaarts, dus naar je rechterkant toe
b Als de richting van de regen steeds verandert en 'een rondje maakt', dan rijdt je een rondje.
c Je meet nu geen aberratie omdat de ventilatorwind precies de ‘wind’ compenseert die ontstaat doordat je snelheid hebt.
d Als de aarde de ether zou meeslepen, zou je geen aberratie meten. Je meet op aarde wel aberratie, dus kun je concluderen dat de aarde de ether niet meesleept.

D13
a $v' = \sqrt{(c^2 + v^2)}$
b $t_{boot1} = 2 \cdot l / \sqrt{(c^2 - v^2)} = 2 \,.\, l / \{c \cdot \sqrt{(1 - v^2/c^2)}\}$
c $t_{heen} = l / (c + v)$
d $t_{terug} = l / (c - v)$
e $t_{boot2} = t_{heen} + t_{terug} = l / \{c + v\} + l / \{c - v\} = 2 \cdot c \cdot l // \{c^2 - v^2\} = 2 \cdot l / \{c \cdot (1 - v^2/c^2)\}$
f Deze uitkomst staat al weergegeven bij het antwoord van **b**.
g Deze uitkomst staat al weergegeven bij het antwoord van **e**.
h De uitdrukking voor de tijd van boot 1 en boot 2 lijken heel veel op elkaar. Het enige verschil is dat je bij boot 1 de wortel neemt van de noemer. Het argument van die wortel zit tussen 0 en 1. De wortel van een getal tussen 0 en 1 is groter dan het getal zelf (voorbeeld: √0,5 = 0,707 en 0,707 > 0,5). Je deelt dus bij boot 1 door een groter getal dan bij boot 2, dus boot 1 heeft minder tijd nodig. Boot 1 wint.

[k1]R.2 **Tijd**[k1x]

14
a b a c
b De wet van behoud van energie wordt niet gebroken als je de tijdvolgorde omkeert. De foto’s zijn dusdanig snel na elkaar genomen dat de invloed van weerstandskrachten (nog) verwaarloosbaar is, ook is er geen (nauwelijks) energieverlies bij de botsingen. In afbeelding b heeft alleen de witte bal

veel snelheid, in afbeelding a en c hebben meerdere ballen snelheid, maar steeds is de totale kinetische energie hetzelfde.
Ook andere bewegingswetten zijn niet gebroken als je de tijdvolgorde omkeert. Het is alleen heel erg moeilijk om de gekleurde ballen allemaal precies de juiste snelheid te geven, zodat ze geordend tegen elkaar eindigen.
Samengevat: Er is geen enkele natuurwet, die je al gehad hebt, gebroken.

Toch weet je dat je het meteen ziet als een tijdvolgorde omkeert. Je ziet het bijvoorbeeld meteen als je een film achteruit draait. Dat zit hem in de eerdergenoemde ordening: in de juiste tijdvolgorde neemt de *wanorde* toe met de tijd. In de omgekeerde tijdvolgorde neemt daarentegen de *orde* toe met de tijd. Er bestaat een natuurwet (de tweede hoofdwet van de warmteleer) die stelt dat naarmate de tijd toeneemt, neemt bij spontane processen de wanorde toe. Voorbeeld: stel je hebt in een kamer aan de linkerkant blauwe rook hangen, aan de rechterkant hangt rode rook. Er is dus sprake van een nette ordening. Als je wacht, zal de rook mengen. Dus de wanorde neemt toe. Als de rook eenmaal gemengd is (wanordelijk), zal de rook niet weer spontaan ontmengen: alle blauwe rook gaat niet spontaan naar het linkerdeel van de kamer, en de rode rook naar het rechterdeel.
De tweede hoofdwet van de warmteleer wordt wel gebroken als je de tijdvolgorde omdraait. Dit is de enige natuurwet die gebroken wordt. Dit is ook de natuurwet waarmee je het verstrijken van de tijd aantoont.

A15
Het muon kan niet-relativistisch maximaal afleggen: $2{,}2 \cdot 10^{-6} \times 3{,}0 \cdot 10^{8} = 6{,}6 \cdot 10^{2}$ m. Ze kunnen dus niet de aarde bereiken.
Relativistisch gezien (en dus ook in werkelijkheid) klopt dit niet. Wij (een stilstaande waarnemer op aarde) zien dat de levensduur van het muon $3{,}5 \cdot 10^{-5}$ s is, en dan kan een muon wel 10 km afleggen en de aarde bereiken, overeenkomstig met de praktijk.

A16
Bart heeft gelijk, alleen hij zit de hele tijd in een inertiaalstelsel.
Jeroen zit niet in een inertiaalstelsel:
1 bij het versnellen als hij van de aarde vertrekt;
2 bij het omkeren, als hij eerst moet afremmen, omdraaien, en dan weer versnellen;
3 bij het afremmen als hij weer op aarde terugkomt.

A17
Tijddilatatie beïnvloed alles, niet alleen klokken. Dus bijvoorbeeld ook biologische processen als hartslag en veroudering. Vandaar dat het muon uit opdracht A16 daadwerkelijk de aarde kan bereiken.

B18
a De lorentzfactor $\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/\sqrt{1-(10/(3 \cdot 10^8))^2} = 1{,}0$.

b $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} = 1/\sqrt{1-(1000 \cdot 10^3/(3 \cdot 10^8))^2} = 1{,}000006 = 1{,}0$.

c $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} = 1/\sqrt{1-(\frac{0{,}1c}{c})^2} = 1/\sqrt{1-(0{,}1)^2} = 1{,}005 = 1{,}0$.

d $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} = 1/\sqrt{1-(\frac{0{,}5c}{c})^2} = 1/\sqrt{1-(0{,}5)^2} = 1{,}2$.

e $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} = 1/\sqrt{1-(\frac{0{,}99c}{c})^2} = 1/\sqrt{1-(0{,}99)^2} = 7{,}1$.

f $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} = 1/\sqrt{1-(\frac{0{,}999c}{c})^2} = 1/\sqrt{1-(0{,}999)^2} = 22$.

g $\gamma = 1{,}01 \rightarrow 1{,}01 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow \frac{1}{1{,}01} = \sqrt{1-v^2/c^2} \rightarrow (\frac{1}{1{,}01})^2 = 1 - v^2/c^2 \rightarrow 1-(\frac{1}{1{,}01})^2 = v^2/c^2$

$\rightarrow v = \sqrt{(3{,}00 \cdot 10^8)^2 \times (1-(\frac{1}{1{,}01})^2)} = 5{,}9 \cdot 10^6 \text{ m/s} \approx 0{,}02c$.

@ x is bedoeld als ×@
h [f]
Ru.3[fx]
i In bovenstaande antwoorden en in het diagram zie je dat bij 0,4*c* er een effect is van zo'n 10%. Dus vanaf een snelheid die iets lager ligt dan de helft van de lichtsnelheid, houd je rekening met tijddilatatie en andere relativistische effecten.

B19
Bepaal eerst wat Δt is en wat Δt_0: wie meet de eigentijd en wie meet de gedilateerde tijd.
Dat kun je op twee manieren bepalen:
1 Beredeneren aan de hand van de definitie. De vuurtoren ziet het uitzenden bij zichzelf gebeuren: die meet dus de eigentijd, dus $\Delta t_0 = 2{,}0$ s.
Jij vliegt erlangs en ziet het flitsen dus niet bij jezelf gebeuren maar bij de vuurtoren, jij meet dus de gedilateerde tijd, ofwel $\Delta t = 3{,}1$ s.
2 Beredeneren aan de hand van de grootte van de waarden: 3,1 s > 2,0 s. De gedilateerde tijd moet altijd groter zijn dan de eigentijd, ofwel: $\Delta t = 3{,}1$ s en $\Delta t_0 = 2{,}0$ s.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow 3{,}1 = \frac{2{,}0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow \frac{2{,}0}{3{,}1} = \sqrt{1-v^2/c^2} \rightarrow (\frac{2{,}0}{3{,}1})^2 = 1-v^2/c^2 = 1-v^2/(3{,}00\cdot 10^8)^2$$

$$\rightarrow v = 2{,}3\cdot 10^8 \text{ m/s} = 0{,}76c.$$

B20

a $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-c^2/c^2}} = \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-1}} = \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{0}} = \text{kan niet, oneindig.}$

b Het foton 'ziet' dat alles buiten hem oneindig lang duurt, ofwel, de tijd voor het foton staat stil.

B21
Beredeneer eerst wie de eigentijd meet en wie de gedilateerde tijd.
Het ontstaan en verval van het onbekende deeltje, gebeurt bij dat deeltje zelf. Het deeltje meet dus de eigentijd, jij meet de gedilateerde tijd.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow 4{,}22\cdot 10^{-6} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(2{,}80\cdot 10^8)^2/(2{,}998\cdot 10^8)^2}} \rightarrow \Delta t_0 = 1{,}51\cdot 10^{-6} \text{ s.}$$

C22
a De eigentijd is $2{,}60 \cdot 10^{-8}$ s, de gedilateerde tijd is $5{,}3 \cdot 10^{-8}$ s.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow 5{,}3\cdot 10^{-8} = \frac{2{,}60\cdot 10^{-8}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow \frac{2{,}60}{5{,}3} = \sqrt{1-v^2/c^2} \rightarrow (\frac{2{,}60}{5{,}3})^2 = 1-v^2/c^2 = 1-v^2/(3{,}00\cdot 10^8)^2$$

$$\rightarrow v = 2{,}6\cdot 10^8 \text{ m/s} = 0{,}87c.$$

b $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2{,}60\cdot 10^{-8}}{\sqrt{1-0{,}993^2}} = 2{,}20\cdot 10^{-7} \text{ s. } \Delta x = v\cdot \Delta t = 0{,}993 \text{ x } 2{,}998\cdot 10^8 \text{ x } 2{,}201\cdot 10^{-7} = 65{,}5 \text{ m.}$

@ x is bedoeld als ×@
c Het pion legt meer afstand af dan bij opdracht **b**. Je kunt nu bij heel goede benadering zeggen, dat het pion met de lichtsnelheid gaat.

d $\Delta x = v\cdot \Delta t \rightarrow 200 = 2{,}998\cdot 10^8 \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = 6{,}67\cdot 10^{-7}$ s.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow 6{,}671\cdot 10^{-7} = \frac{2{,}60\cdot 10^{-8}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow \frac{2{,}60}{66{,}71} = \sqrt{1-v^2/c^2} \rightarrow (\frac{2{,}60}{66{,}71})^2 = 1-v^2/c^2 = 1-v^2/(2{,}998\cdot 10^8)^2$$

$$\rightarrow v = 2{,}996\cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

e Je mag nu niet meer de snelheid van het pion benaderen met de lichtsnelheid. Noem de snelheid: $v = A \cdot c$, met A een constante (druk de snelheid uit in een deel van de lichtsnelheid).

$$\Delta x = Ac\cdot \Delta t \rightarrow 16 = \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{16}{Ac}.$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow \frac{16}{Ac} = \frac{2{,}60\cdot 10^{-8}}{\sqrt{1-(Ac)^2/c^2}} \rightarrow \frac{2{,}60\cdot Ac}{16} = \sqrt{1-A^2} \rightarrow (\frac{2{,}60\cdot 10^{-8}}{16})^2 (Ac)^2 = 1-A^2$$

$$\rightarrow ((\frac{2{,}60\cdot 10^{-8}}{16})^2 c^2 + 1)\cdot A^2 = 1$$

$$\rightarrow A = 0{,}808 = 0{,}81.\ \text{Ofwel}: v = 0{,}81c = 2{,}4\cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

C23

a André meet de eigentijd van de reis, mensen op aarde meten de gedilateerde tijd. De gedilateerde tijd is dus 5 jaar.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow 5 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-0{,}80^2}} \rightarrow \Delta t_0 = 3 \text{ jaar.}$$

b Nu is de eigentijd gelijk aan 5 jaar.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{5}{\sqrt{1-0{,}80^2}} = 8 \text{ jaar.}$$

C24

a De eigentijd is 5,00 jaar, iemand op aarde meet een tijd die langer is: 100 jaar, de gedilateerde tijd. Je reist met een snelheid van $v = A \cdot c$, met A een constante (druk de snelheid uit in een deel van de lichtsnelheid).

Op aarde gemeten is de tijd:

$$\Delta x = v\cdot \Delta t \rightarrow 100 \text{ lichtjaar } = Ac\cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = 100/A \text{ jaar.}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \rightarrow 100/A = \frac{5}{\sqrt{1-(Ac)^2/c^2}} \rightarrow \frac{5\cdot A}{100} = \sqrt{1-(Ac)^2/c^2} \rightarrow \frac{A}{20} = \sqrt{1-A^2} \rightarrow (\frac{A}{20})^2 = 1-A^2$$

$$\rightarrow 1\frac{1}{20^2}\cdot A^2 = 1 \rightarrow A = 0{,}999 \rightarrow \text{je reist met } 0{,}999\,c\text{, wat overeen komt met } 2{,}99\cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

b methode 1

$$\Delta t = 100/A \text{ jaar } = 100/0{,}999 = 100{,}1 = 100 \text{ jaar.}$$

methode 2

$$\Delta t = \frac{5}{\sqrt{1-0{,}999^2}} = 100{,}1 = 100 \text{ jaar.}$$

C25

De klok beweegt in de horizontale richting, de *x*-richting. De lichtstraal moet zowel een verticale afstand afleggen (in de *y*-richting) als een horizontale afstand. De snelheid van de lichtstraal moet dus zowel een *x*-component hebben als een *y*-component.

Omdat de klok in dit gedachte-experiment in de *x*-richting met de lichtsnelheid gaat, moet de *x*-component van de snelheid van de lichtstraal ook gelijk zijn aan de lichtsnelheid. De *y*-component van de snelheid is dan nul (of oneindig klein). Het duurt dan oneindig lang om een afstand in de *y*-richting af te leggen. De tijd op die lichtklok is dus ‘oneindig gedilateerd’: de tijd tussen twee tikken is oneindig lang.

C26

$$\Delta t = \frac{2\cdot\sqrt{d^2+s^2}}{c} = \frac{2\cdot\sqrt{d^2+\frac{(v\Delta t)^2}{4}}}{c} \quad \Leftrightarrow \quad (\Delta t)^2 = \frac{4\cdot(d^2+\frac{(v\Delta t)^2}{4})}{c^2} = \frac{4\cdot d^2}{c^2}+\frac{v^2(\Delta t)^2}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow (\Delta t)^2 - (v^2/c^2)\cdot(\Delta t)^2 = 4\cdot d^2/c^2$$

$$\Leftrightarrow (\Delta t)^2\cdot(1-v^2/c^2) = 4\cdot d^2/c^2$$

$$\Leftrightarrow (\Delta t)^2 = \frac{4\cdot d^2/c^2}{(1-v^2/c^2)}$$

$$\Leftrightarrow \Delta t = \frac{2\cdot d/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

[k1]R.3 **Ruimte en beweging**[k1x]

27
a Als de lichtstraal er 4,3 jaar over zou doen voor de astronaut terwijl hij zelf slechts 2,1 jaar over dezelfde afstand doet, zou dat betekenen dat hij sneller zou gaan dan het licht. Dat is uitgesloten volgens de relativiteitstheorie.
b Licht zal minder dan 2,1 jaar moeten doen over de afstand aarde - Alpha Centauri. Dat betekent dat die afstand kleiner is dan 2,1 lichtjaar. Voor aardbewoners is de 4,3 lichtjaar, voor de astronaut is de afstand kleiner dan 2,1 lichtjaar: de ruimte is dus voor de astronaut ‘gekrompen’.

B28
a
Gegeven:
$v_{\text{X-jou}}$ = +2,0 · 10^8 m/s;
$v_{\text{Y-jou}}$ = -2,4 · 10^8 m/s.
→ $v_{\text{jouj-Y}}$ = +2,4 · 10^8 m/s.
Gevraagd: v_{XY} .

$$v_{\text{XY}} = \frac{v_{\text{X-jou}}+v_{\text{jou-Y}}}{1+\frac{v_{\text{X-jou}}v_{\text{jou-Y}}}{c^2}} \rightarrow v_{\text{XY}} = \frac{2{,}0\cdot10^8+2{,}4\cdot10^8}{1+\frac{2{,}0\cdot10^8\times2{,}4\cdot10^8}{(3{,}00\cdot10^8)^2}} = \frac{4{,}4\cdot10^8}{1{,}533..} = 2{,}9\cdot10^8 \text{ m/s.}$$

b $v_{\text{XY}} = -v_{\text{yx}} \rightarrow v_{\text{YX}} = -2{,}9\cdot10^9$ m/s.

c $$v_{\text{1Y}} = \frac{v_{\text{1-jou}}+v_{\text{jou-Y}}}{1+\frac{v_{\text{1-jou}}v_{\text{jou-Y}}}{c^2}} \rightarrow v_{\text{1Y}} = \frac{3{,}00\cdot10^8+2{,}4\cdot10^8}{1+\frac{3{,}0\cdot10^8\times2{,}4\cdot10^8}{(3{,}00\cdot10^8)^2}} = \frac{5{,}4\cdot10^8}{1{,}8} = 3{,}0\cdot10^8 \text{ m/s.}$$

d $$v_{\text{2Y}} = \frac{v_{\text{2-jou}}+v_{\text{jou-Y}}}{1+\frac{v_{\text{2-jou}}v_{\text{jou-Y}}}{c^2}} \rightarrow v_{\text{1Y}} = \frac{-3{,}00\cdot10^8+2{,}4\cdot10^8}{1+\frac{-3{,}0\cdot10^8\times2{,}4\cdot10^8}{(3{,}00\cdot10^8)^2}} = \frac{-0{,}6\cdot10^8}{0{,}2} = -3{,}0\cdot10^8 \text{ m/s.}$$

Opmerking: je ziet dat raket Y dus steeds netjes de lichtsnelheid meet voor een lichtstraal, in overeenstemming met de speciale relativiteitstheorie.

B29
Nee, de impuls van een proton heeft geen maximale waarde. Als je in de relativistische formule snelheden invult die steeds dichter in de buurt van de lichtsnelheid komen, zie je dat de impuls groter en groter kan worden. Hij zou oneindig worden als het proton de lichtsnelheid zou bereiken.

B30
B C A

B31
a Alleen in de lengterichting vindt lorentzcontractie plaats.

$$L = L_0\sqrt{1-v^2/c^2} = 5{,}0\times\sqrt{1-0{,}80^2} = 5{,}0\times0{,}60 = 3{,}0 \text{ m.}$$

De afmetingen van het schilderij die de raketbestuurder waarneemt, zijn dus: 3,0 bij 3,0 m.

De oppervlakte = 3,0 × 3,0 = 9,0 m^2.
b De lengterichting van het schilderij zal met een factor 0,60 afnemen, de hoogte verandert niet. De oppervlakte wordt dus 0,60 keer zo klein, ofwel: de oppervlakte is 0,60 · *x* m^2.

Opmerking: de werkelijkheid is volgens de relativiteitstheorie gecompliceerder dan hierboven geschetst. Als je meer wil weten over hoe je echt zo'n schilderij zou zien, moet je op zoek gaan naar 'Terrell rotation'.

B32
a $p = m \cdot v = 3{,}0 \cdot 10^7 \times 3{,}0 \cdot 10^8 = 9{,}0 \cdot 10^{15}$ $kgms^{-1}$
b $p = \dfrac{m \cdot v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \dfrac{9{,}0 \cdot 10^{15}}{\sqrt{1 - 0{,}80^2}} = 1{,}5 \cdot 10^{16}$ $kgms^{-1}$

C33
$$p = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m \cdot 0{,}30 \cdot c}{\sqrt{1 - 0{,}30^2}} = 0{,}314 \cdot m \cdot c \text{ kgms}^{-1}$$

neem $v = A \cdot c$

$$\rightarrow 2 \text{ x } 0{,}314 \cdot m \cdot c = \frac{m \cdot A \cdot c}{\sqrt{1 - (A \cdot c)^2/c^2}} \rightarrow 2 \text{ x } 0{,}314 = \frac{A}{\sqrt{1 - A^2}} \rightarrow \frac{A}{2 \text{ x } 0{,}314} = \sqrt{1 - A^2} \rightarrow \left(\frac{A}{2 \text{ x } 0{,}314}\right)^2 = 1 - A^2$$

$$\rightarrow \left(1 + \left(\frac{1}{2 \text{ x } 0{,}314}\right)^2\right) \cdot A^2 = 1 \rightarrow A = 0{,}53. \text{ Dus : } v = 0{,}53c = 1{,}6 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

C34
a De boer meet de eigenlengte van de ladder en de gecontracteerde lengte van de schuur.
De knecht meer de eigenlengte van de schuur en de gecontracteerde lengte van de ladder.
b De knecht meet de gecontracteerde lengte van de ladder, die gecontracteerde lengte is dus 8,0 m. De eigenlengte van de ladder is:
$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \rightarrow 8{,}0 = L_0\sqrt{1 - 0{,}80^2} \rightarrow L_0 = 13$ m.
c De lengte van de schuur is voor de boer:
$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2} = 8{,}0 \cdot \sqrt{1 - 0{,}80^2} = 4{,}8$ m.
d De boer ziet de gecontracteerde lengte van de schuur (4,8 m). De boer ziet de eigenlengte van de ladder (13 m). Een ladder van 13 m past niet in een schuur van 4,8 m.
e Voor de knecht gaan de deuren *gelijktijdig* dicht. Voor de boer is dat niet zo. Voor de boer gaat eerst de achterdeur dicht (zodra de voorkant van de ladder die bereikt). Meteen gaat de achterdeur weer open. De boer rent door. En precies als de achterkant van de ladder de voordeur gepasseerd is, gaat ook heel snel de voordeur dicht en weer open. De oplossing van de ladderparadox zit hem dus in dat gelijktijdigheid in de relativiteitstheorie geen absolute grootheid is.
f De lengte van de schuur is voor de boer 4,8 m, de lengte van de ladder is 13 m. Als de achterdeur sluit (omdat de voorkant van de ladder daar is), steekt uit de voordeur nog 13,3 - 4,8 = 8,5 m ladder. De tijd die de boer over die 8,5 m doet, is:
t = *x* // *v* = 8,5 // (0,80 x 3,00 · 10^8) = 3,5 · 10^{-8} s.
g De totale afstand die de ladder aflegt tussen dat de voorkant van de ladder de schuur ingaat, en de achterkant van de ladder de schuur weer verlaat, is voor de boer: 13,3 + 4,8 = 18,1 m.
t = *x* // *v* = 18,1 // (0,80 x 3,00 · 10^8) = 7,5 · 10^{-8} s.

C35
a $\Delta x = v \cdot \Delta t \rightarrow 70$ lichtjaar $= Ac \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = 70 / A$ jaar.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \rightarrow 70 / A = \frac{1}{\sqrt{1 - (Ac)^2/c^2}} \rightarrow \frac{1 \cdot A}{70} = \sqrt{1 - (Ac)^2/c^2} \rightarrow \frac{A}{70} = \sqrt{1 - A^2} \rightarrow \left(\frac{A}{70}\right)^2 = 1 - A^2$$

$$\rightarrow 1\frac{1}{70^2} \cdot A^2 = 1 \rightarrow A = 0{,}9999 \text{ . Dus je reist met 99,99\% van de lichtsnelh eid.}$$

b De astronaut meet dat licht er 99,99% van een jaar over doet. De afstand is voor de astronaut dus (afgerond) 1 lichtjaar.

C36
a De protonen hebben dezelfde massa. Massa verandert niet als je snelheid toeneemt.
b Ten opzichte van jou gaan beide protonen met vrijwel de lichtsnelheid. Over een afstand van $3 \cdot 10^8$ m zullen ze beide ongeveer 1 seconde doen, dat verschilt nauwelijks.
c De baan verschilt wel merkbaar. De impuls van proton 2 is veel groter (je kunt uitrekenen dat de impuls van proton 2 zo'n 3 keer groter is dan de impuls van proton 1). De 'hoeveelheid beweging' van proton 2 is dus groter, de baan is daardoor rechter.
Opmerking: Je spreekt daarom ook wel van een 'stiffness' (stijfheid): hoe meer impuls een deeltje heeft, hoe meer 'stiffness' de baan heeft, ofwel, hoe moeilijker is om het deeltje af te buigen.

C37
a $v = \Delta x \,//\, \Delta t = 100 \,//\, \{5{,}00 \cdot 10^{-7}\} = 2{,}00 \cdot 10^8$ m/s $= 0{,}667c$.
b Raket 2 ziet de twee gebeurtenissen bij zijn neus gebeuren, op dezelfde locatie. Raket 2 meet dus de eigentijd Δt_0. De tijd van $5{,}00 \cdot 10^{-7}$ s (die gegeven is in deze opdracht) is dus de gedilateerde tijd.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \rightarrow 5{,}00 \cdot 10^{-7} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - 0{,}6666...^2}} \rightarrow = \Delta t_0 = 3{,}73 \cdot 10^{-7} \text{ s.}$$

C38
a $\Delta x = c \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = 300 \,//\, (2{,}998 \cdot 10^8) = 1{,}00 \cdot 10^{-6}$ s.
b Bereken eerst de gecontracteerde lengte van de staaf.

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = 600 \sqrt{1 - 0{,}800^2} \rightarrow L = 360 \text{ m.}$$

De halve lengte van de staaf is dus 180 m.
Voor Jeroen vliegt de staaf naar links met 0,800*c*, het licht vliegt achter het linkeruiteinde van de staaf aan met een relatieve snelheid van 0,200*c*.
$\Delta x = v \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = 180 \,//\, (0{,}200 \times 2{,}998 \cdot 10^8) = 3{,}00 \cdot 10^{-6}$ s.
c Voor Jeroen vliegt de staaf naar links met 0,800*c*, het licht komt het rechteruiteinde van de staaf tegemoet met een relatieve snelheid van 1,800*c*.
$\Delta x = v \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = 180 \,//\, (1{,}800 \times 2{,}998 \cdot 10^8) = 3{,}34 \cdot 10^{-7}$ s.
d $\Delta t = 3{,}00 \cdot 10^{-6} - 3{,}34 \cdot 10^{-7} = 2{,}67 \cdot 10^{-6}$ s.
e Noem de locatie van het midden van de staaf op $t = 0$: $x = 0$, het linker rechteruiteinde is dan $x = -180$ m; het rechteruiteinde is +180 m, voor Jeroen.
Na $3{,}33 \cdot 10^{-7}$ s is voor hem het linkeruiteinde de volgende afstand naar links gevlogen:
$\Delta x = v \cdot \Delta t = 0{,}800 \times 2{,}998 \cdot 10^8 \times 3{,}00 \cdot 10^{-6} = 720 \text{ m} \rightarrow x_{links} = -720 - 180 = -900$ m.
Na $3{,}0 \cdot 10^{-6}$ s is het rechteruiteinde de volgende afstand naar links gevlogen:
$\Delta x = v \cdot \Delta t = 0{,}800 \times 2{,}998 \cdot 10^8 \times 3{,}34 \cdot 10^{-7} = 80 \text{ m} \rightarrow x_{rechts} = 180 - 80 = 100$ m.
De afstand tussen de twee gebeurtenissen is:
$\Delta x = 100 - -900 = 1000$ m.
Opmerking: in paragraaf 5 komt deze opdracht nog een keer terug.

C39
a De relatieve snelheid tussen het signaal en de neus van de raket is dus 0,400*c*.
De lichtstraal bereikt de neus van de raket (volgens de raket) op:
$\Delta t = \Delta x \,//\, v = 200 \,//\, \{0{,}400 \times 2{,}998 \cdot 10^8) = 6{,}67 \cdot 10^{-7}$ s.
b De radiozender heeft, gezien vanuit de raket, een achterwaartse snelheid van 0,600*c*.
De radiozender legt af:
$\Delta x = v \cdot \Delta t = 0{,}600 \times 2{,}998 \cdot 10^8 \times 6{,}666\ldots \cdot 10^{-7} = 120$ m.
c De zender meet de gecontracteerde lengte van de raket:

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = 200\sqrt{1 - 0{,}600^2} \rightarrow L = 160 \text{ m.}$$

De zender ziet het signaal achter de raket aanreizen. Het signaal gaat met de lichtsnelheid, de raket met 0,600*c*. De relatieve snelheid tussen het signaal en de neus van de raket is dus 0,400*c*. Met die snelheid moet 160 m worden overbrugd. Dat duurt:
$\Delta t = 160 \,//\, \{0{,}400 \times 2{,}998 \cdot 10^8\} = 1{,}33 \cdot 10^{-6}$ s.
d De zender ziet het signaal de volgende afstand afleggen:
$\Delta x = c \cdot \Delta t = 2{,}998 \cdot 10^8 \times 1{,}334 \cdot 10^{-6} = 400$ m.
e Je zou misschien verwachten dat de één de eigentijd (/eigenlengte) meet en de ander de gedilateerde (/gecontracteerde) lengte. Dat is hier niet zo. Dit heeft te maken met dat gelijktijdigheid

relatief is. De raket ziet het signaal vertrekken waarbij zijn staart het midden van de cirkel is waarover het signaal zich verspreid. De zender ziet zichzelf als het middelpunt van die cirkel.

D40
a Als de kamer twee keer zo groot wordt, verdubbelt de afstand van de laser tot de muur, ofwel: de straal verdubbelt. Als de straal verdubbelt, verdubbelt ook omtrek van de cirkelvormige baan die het stipje beschrijft. De omlooptijd verandert niet, in dezelfde tijd legt het stipje dus een twee keer zo grote afstand af. Met andere woorden: de snelheid van het stipje verdubbelt.
b Het stipje legt dan in dezelfde tijd een tien keer zo grote afstand af. Als je die afstand deelt door de tijd, kom je op een snelheid uit die groter is dan de lichtsnelheid.
c Volgens de theorie van Einstein kan niets sneller dan het licht. Dit stipje gaat wel sneller dan het licht. Dat lijkt dus in tegenspraak met elkaar te zijn. Dat is niet zo. De snelheid van het stipje betekent namelijk niets. Twee stipjes die vlak na elkaar naast elkaar verschijnen op de maan, worden veroorzaakt door verschillende fotonen, die netjes na elkaar vertrokken. Die fotonen reizen gewoon met de snelheid van het licht, niet sneller. Er is geen relatie tussen het ene foton en het andere foton. Die fotonen zouden trouwens ook uit volkomen verschillende lichtbronnen kunnen komen. Netter geformuleerd geeft de theorie van Einstein overigens aan dat *informatie* niet sneller kan dan het licht. En die wet wordt niet gebroken.

D41
De massa van een voorwerp verandert niet als snelheid toeneemt. Wel kan de massa van een *systeem* veranderen, als een voorwerp daar onderdeel van uitmaakt.
Opmerking: als je er vanuit gaat dat massa wel zou veranderen en je past bijvoorbeeld $F = m \cdot a$ toe op ‘relativistische massa’, dan kom je tot voorspellingen die *niet* overeenkomen met experimentele resultaten. Bijvoorbeeld (subatomaire) deeltjes met heel hoge snelheden gaan elkaar niet sterker aantrekken.
Gebruik je echter $F = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$, waarbij p de *niet*-relativistische impuls is, dan kloppen voorspellingen wel met de resultaten. Je gebruikt dan via een omweg eigenlijk gewoon de relativistische impuls formule. Alleen, er ontstaat dan wel een nieuw probleem. Als je met relativistische massa gaat rekenen aan krachten, vind je dat een kracht in de richting van de snelheid een ander effect heeft dan een kracht in de richting loodrecht op de snelheid. Men heeft, om de theorie rondom ‘relativistische massa’ te ‘redden’, daarom in het verleden geprobeerd de begrippen ‘longitudinale massa’ en ‘transversale massa’ in te voeren. Al deze problemen verdwijnen als je de begrippen ‘rustmassa’ en relativistische massa’ achterwege laat en het alleen hebt over ‘massa’. Het verouderde idee van ‘relativistische massa’ is uiteindelijk geen vruchtbaar idee gebleken.

Volgens de moderne interpretatie van de relativiteitstheorie heeft een voorwerp daarom gewoon één onveranderlijke massa, en gebruik je niet de begrippen ‘relativistische massa’ en ‘rustmassa’.
Zo heel ‘modern’ is deze interpretatie overigens niet: Einstein zelf moest niets van ‘relativistische massa’ en ‘rustmassa’ hebben. In 1948 schreef hij:

“It is not good to introduce the concept of the mass $M = \dfrac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ of a moving body for which no clear definition can be given. It is better to introduce no other mass concept than the ’rest mass’ m. Instead of introducing M it is better to mention the expression for the momentum and energy of a body in motion.”
— Albert Einstein in een brief aan Lincoln Barnett, 19 juni 1948.

[k1]R.4 **Energie en massa**[k1x]

42
a $E = m \cdot c^2$; E is de energie in joule, m is de massa in kilogram, c is de lichtsnelheid = $2{,}998 \cdot 10^8$ m/s.
b Het is niet op voorhand logisch dat deze drie grootheden met elkaar te maken hebben. Wel bestaat (en bestond ook in 1905 al) ook de formule $E_k = ½ \cdot m \cdot v^2$: ook in die formule zie je dat energie, massa en snelheid in het kwadraat aan elkaar gekoppeld zijn.
De koppeling in $E_k = ½ \cdot m \cdot v^2$ is echter niet vergelijkbaar met de koppeling in $E = m \cdot c^2$.
Bij de kinetische energie-formule gaat het erom dat het energie kost om een massa een bepaalde snelheid te geven.
Bij $E = m \cdot c^2$ gaat het erom dat een hoeveelheid massa energie bezit, ook als die massa stilstaat.

A43