KERNASPECTEN VAN WISKUNDIG DENKEN

Paul Drijvers

Over wiskundig denken wordt de laatste tijd veel gesproken. Maar waarom is dit het geval? En wat wordt ermee bedoeld, wat is de kern van wiskundig denken zoals dat in het wiskundeonderwijs aan de orde zou kunnen komen? Paul Drijvers ziet wiskundig denken als probleemoplossen, modelleren en abstraheren, en licht deze kernaspecten met voorbeelden toe.

Inleiding

Wiskundige denkactiviteiten (WDA) staan momenteel sterk in de belangstelling. Al in 2007 heeft de vernieuwingscommissie cTWO in haar visiedocument een aantal centrale denkactiviteiten in het wiskundeonderwijs benoemd: modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen.[1] Ook in de concept-examenprogramma's 2015 havo/vwo van cTWO[2] spelen deze wiskundige denkactiviteiten een belangrijke rol. Deze zijn inmiddels uitgewerkt in syllabi voor de eindexamens 2017 (havo) en 2018 (vwo) en in pilot-examens.

In de wiskundelessen in het voortgezet onderwijs wordt veel aandacht besteed aan procedurele vaardigheid. Onder invloed van factoren als het studiehuis en het zelfstandig werken lijkt het alsof er voornamelijk gewerkt wordt aan opgaven uit het boek, waarin de uitdaging en de obstakels zijn verdwenen. Dat terwijl niet het routinematig uitvoeren van procedures en algoritmen - hoe belangrijk ook - de kern vormt van wat je leerlingen in de wiskundeles wilt leren, maar het inzicht in waarom deze procedures werken en in de onderliggende betekenis. Dit was de aanleiding voor cTWO om een lans te breken voor denkactiever wiskundeonderwijs.

Inmiddels heeft dit tot tal van activiteiten geleid. Denk aan de werkgroepen over WDA op de studiedag van de NVvW, aan de nascholing rond dit onderwerp, aan de nieuwe edities van de methoden waarin WDA een plaats hebben, aan het praktijkonderzoek van het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek (NRO), en aan de breed verspreide publicaties van Van Streun.[3] Gelet op de belangstelling lijkt het idee docenten aan te spreken.

Tegelijkertijd is veel nog onduidelijk. Het lijstje denkactiviteiten van cTWO is indrukwekkend, maar niet zo toegankelijk of concreet. Het geeft niet duidelijk aan wat wiskundig denken wel of niet is en biedt evenmin handvatten om het in de klas vorm te geven. Kennelijk zijn we nog op zoek naar een geschikte invulling. Als vervolg op een eerder artikel over WDA[4] doe ik hieronder een poging om het begrip wiskundig denken, zoals beoogd in WDA, te vatten in een drietal kernaspecten. Het vertalen van dit kader naar handvatten voor de praktijk is een volgende stap, die hier nog niet aan de orde komt.

Wiskundig denken

Op verschillende plaatsen wordt betoogd dat wiskundig denken het belangrijkste doel is van het wiskundeonderwijs. Zo schreef Pólya: '*First and foremost, it* [wiskundeonderwijs, PD] *should teach those young people to THINK*'.[5] In het voorwoord van zijn boek *How to solve it* stelt hij dat docenten een uitgelezen kans hebben om de nieuwsgierigheid van hun leerlingen te prikkelen en hen daarmee een gevoel voor onafhankelijk denken te geven.[6] Van Streun ziet als doelen van wiskundeonderwijs *weten dat*, *weten hoe*, *weten waarom* en *weten over weten*.[7] In het *weten hoe* en het *weten waarom* staat het wiskundig denken centraal, dat uitstijgt boven het uitvoeren van routinetaken en de ontwikkeling betreft van betekenisvol inzicht. Ook buiten de wereld van het wiskundeonderwijs staan kritisch en analytisch denken centraal, bijvoorbeeld in publicaties over hogere orde denkvaardigheden, onderzoekend leren[8] en vaardigheden voor de 21e eeuw[9]; zaken die juist in wiskundeonderwijs aan de orde zouden kunnen en moeten komen. Natuurlijk is de kracht van de wiskunde dat bepaalde problemen met een vast algoritme kunnen worden opgelost. De herhaalde uitvoering van zo'n algoritme is echter niet zo interessant; veel wezenlijker is het denken over zulke methodes en daarop zou dan ook de nadruk moeten liggen. Los van vervolgopleiding of toekomstig beroep kan de waarde van het wiskundeonderwijs voor elke leerling liggen in het leren denken, analyseren, probleemoplossen en redeneren. Dergelijke vaardigheden komen in het hele leven van pas!

Wat is nu wiskundig denken? Onder wiskundig denken versta ik: *Bedenken hoe je wiskundig gereedschap kunt gebruiken om een probleem aan te pakken.*

Laat ik een paar woorden hiervan nader toelichten:

— *hoe*

  Met 'hoe' wordt bedoeld de keuze van de gereedschappen die je gaat gebruiken, in welke volgorde je dat doet en onder welke voorwaarden ze zinvol gebruikt kunnen worden;

— *wiskundig gereedschap*
  De term 'wiskundig gereedschap' moet breed worden opgevat: het kan heel specifiek en concreet zijn, zoals de *abc*-formule voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen, maar ook theoretisch (logisch redeneren, bewijzen), of algemeen van karakter (het ontwikkelen van strategieën);
— *gebruiken*
  Met 'gebruiken' wordt niet zozeer bedoeld het toepassen van een bestaande, kant-en-klare methode, maar ook het ontwikkelen ervan, of het op maat maken van een bestaande methode voor een specifiek doel;
— *probleem*
  Een probleem is niet zomaar een opgave, maar een vraag waarvoor de leerling nog geen kant-en-klare oplosmethode ter beschikking heeft. Het gaat dus om een niet-standaardopgave van binnen of buiten de school, binnen of buiten de wiskunde, die de leerling (nog) niet routinematig kan oplossen.

Uitgaande van deze werkdefinitie wil ik me beperken tot drie kernaspecten van wiskundig denken: probleemoplossen, modelleren en abstraheren, zie figuur 1. Niet dat de andere door cTWO genoemde activiteiten niet van belang zijn, maar die zie ik toch meer als ondersteunend. Voor ik de drie hoekpunten van de driehoek nader uitwerk nog twee opmerkingen. Ten eerste: wat voor een leerling een probleem is, dus wat niet standaard is voor hem of haar, hangt af van voorkennis en ervaring. Wiskundig denken is dus relatief: wat voor de ene leerling uitdagend en nieuw is, is voor de andere routinematige reproductie. De kunst zal zijn om in een les problemen voor te leggen die op het juiste moment het juiste niveau van uitdaging bieden. Ten tweede hoor ik wel eens opvattingen over WDA die ik zou willen bestrijden. In kader 1 staat op een rij wat wiskundig denken naar mijn idee *niet* is.

Probleemoplossen
Bij wiskunde gaat het uiteindelijk om het oplossen van problemen, die voor de leerling niet standaard zijn.

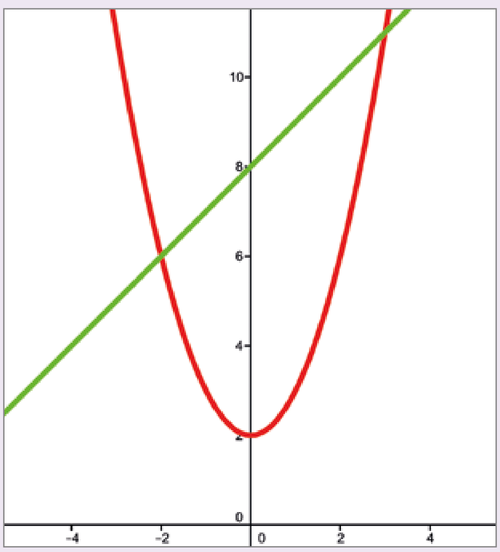
figuur 1 Drie centrale 'hoekpunten' van wiskundig denken

Daarvoor moet hij probleemoplossende vaardigheden ontwikkelen. Bijvoorbeeld een probleemaanpak bedenken, een meerstapsstrategie uitvoeren zonder de draad kwijt te raken, of weten hoe je zaken die je al kunt of weet in een nieuwe situatie creatief kunt inzetten.[6, 7, 10] Het gaat ook om het ontwikkelen van manieren om aan een nieuw probleem te beginnen: een schets maken, iets afleiden uit de gegevens, of juist terugredeneren vanuit de gewenste uitkomst. Het interessante is dat wiskunde een vakgebied is waarin je aan probleemoplossen uitstekend aandacht kunt besteden, terwijl het ook buiten de wiskunde van grote waarde is. In kader 2 staat een voorbeeldopgave over een lijn die een parabool snijdt en een daaraan evenwijdige raaklijn. De reden om dit als een probleem te beschouwen, is dat weliswaar bekende kennis aan de orde is, maar dat de (vervolg)vragen niet standaard zijn en een beroep doen op het ontwerpen van een strategie, op overzicht en op creativiteit. Om het algemene geval aan te pakken, moet je ook de durf hebben om stevig met parameters te gaan rekenen.

Kader 1
Wat wiskundig denken *niet* is:
— wiskundig denken is niet iets nieuws in het wiskundeonderwijs. Sinds jaar en dag staat wiskundig denken centraal in de praktijk van veel wiskundedocenten. Toch is het goed om het belang hiervan expliciet voor het voetlicht te brengen;
— een WDA is geen opgave op papier. Wiskundig denken speelt zich af in het hoofd van de leerling; wel nodigen sommige opgaven er meer toe uit dan andere;
— wiskundig denken is niet per se moeilijk en ingewikkeld. Als het maar prikkelend, fris en scherp is, aangepast aan de doelgroep;
— wiskundig denken is niet alleen voor goede leerlingen. Natuurlijk is het niveau van wiskundig denken afhankelijk van de doelgroep en de onderwijssetting, maar in principe kun je met elke leerling naar wiskundige denken streven en daar gericht aan werken;
— wiskundig denken is niet alleen voor de Tweede Fase. Het verdient aandacht in leerlijnen vanaf de onderbouw; door het ontbreken van examendruk is de onderbouw bij uitstek geschikt om hier een begin mee te maken;
— WDA is niet altijd groot en hoeft niet veel lestijd of veel voorbereidingstijd te kosten. Natuurlijk kun je aandacht aan wiskundig denken besteden in grote opdrachten die veel tijd vragen, maar misschien nog belangrijker is om kleine kansen in de reguliere lespraktijk te benutten door hiervoor een attent oog te ontwikkelen en bijvoorbeeld goede vragen te stellen.

Kader 2: Parabolen raken

Gegeven zijn een parabool met vergelijking $y = x^2 + 2$ (rood in figuur 2) en een lijn met vergelijking $y = x + 8$ (groen). De lijn en de parabool snijden elkaar in twee punten. De eerste vraag is in welk punt van de parabool de raaklijn evenwijdig is aan de snijlijn. Na enig rekenwerk blijkt dit het geval te zijn in het punt met x-coördinaat gelijk aan ½. Dit is juist het gemiddelde van de x-coördinaten van de twee snijpunten van de oorspronkelijke lijn met de parabool, namelijk $x = -2$ en $x = 3$. Is dit nu toeval? Wat gebeurt er als we de parabool met een andere lijn snijden en dan de daaraan evenwijdige raaklijn zoeken? Of als we zelfs een andere parabool als uitgangspunt nemen? Wat betekent het voor een grafiek als deze 'middenraak-eigenschap' voor elke snijlijn geldt, kan het dan ook iets anders zijn dan een parabool?



figuur 2 Doordenken over snijlijnen en evenwijdige raaklijnen

Een dergelijke opgave kwam jaren geleden aan de orde in een les wiskunde B in 5 vwo op het Liemers College in Zevenaar. Enerzijds gaat het om elementaire functies en methoden: het differentiëren van een kwadratische functie is werkelijk routine voor deze leerlingen. Anderzijds heeft de vraagstelling toch iets origineels: met name de vervolgvragen geven aanleiding tot wiskundig denken, waarbij parameters nodig zijn. Deze opgave doet dus een beroep op probleemoplossen, omdat het een voor de leerlingen nieuwe situatie is waarin bestaande kennis inventief moet worden ingezet. Daarnaast is abstraheren aan de orde, omdat je je beweegt in de betekenisvolle 'wiskundige wereld' van parabolen en lijnen zonder een referentie naar een concrete situatie; in feite moet deze wiskundige wereld voor de leerling concreet worden, wil over dit probleem goed kunnen worden nagedacht.

Modelleren

Het tweede hoekpunt van de driehoek rond wiskundig denken is het modelleren. Dat gaat over de relatie tussen wiskunde en problemen uit de wereld om ons heen, over de manier waarop dergelijke problemen kunnen worden aangepakt met wiskundige middelen met als doel bijvoorbeeld het voorspellen van een verschijnsel of het optimaliseren van een proces. cTWO omschrijft modelleren als het vertalen van realistische problemen in wiskundige vorm. Een probleem wordt dus geformuleerd in wiskundige termen, bijvoorbeeld door het opstellen van formules en vergelijkingen, of het maken van een meetkundige figuur. In de praktijk gaat het vaak om (stelsels) differentiaalvergelijkingen, maar dat is voor het VO in het algemeen een brug te ver. Vaak wordt bij modelleren ook gedacht aan het doorlopen van een cyclus van vertalen naar wiskunde – wiskundig probleem oplossen – terugvertalen naar oorspronkelijk probleem.[11, 12]

Het lastige met modelleren is dat het moeilijk is en ook tijdrovend kan zijn. Grote modelleerproblemen, zoals bijvoorbeeld die van de OnderbouwWiskundedag, wiskunde A-lympiade en de wiskunde-B dag, zijn in de reguliere onderwijs- en toetspraktijk lastig frequent te organiseren. Maar ook door middel van kleine en eenvoudige problemen kan in de les aandacht aan modelleren worden besteed. Kader 3 bevat een voorbeeldopgave, waarin eerst een formule moet worden opgesteld voor de oppervlakte van het vooraanzicht van een 'huisje'. Dit staat tussen aanhalingstekens om aan te geven dat het natuurlijk duidelijk geen realistisch huis is. Vervolgens gaan we de ruimte in en wordt de opgave iets realistischer. Verder is ervoor gekozen om niet met vervolgvragen op deze formules door te gaan. Zo wordt vermeden dat het model moet worden gegeven, zoals bijvoorbeeld bij examenopgaven vaak het geval is.

'WISKUNDIG DENKEN IS DE KERN EN DE KRACHT VAN WISKUNDE'

Abstraheren

Het derde kernaspect van wiskundig denken is abstraheren. Bij abstraheren gaat het erom dat de leerling uit concrete probleemsituaties overeenkomsten en verschillen destilleert, die vervolgens leiden tot de vorming van betekenisvolle wiskundige objecten met eigenschappen en relaties. Geleidelijk aan verschuift het accent zo van het oplossen van de concrete problemen naar het inzicht in en redeneren met de wiskundige begrippen die daarin een rol spelen en waarbij de leerling zich wat kan voorstellen. Zo wordt een hoger niveau van wiskundige objecten concreet en betekenisvol. Al in 1995 stelde de Vakontwikkelgroep Wiskunde dat het bij abstraheren gaat om de wiskundige

theorie of methode, los van de werkelijkheid, die geanalyseerd kan worden met wiskundige wetmatigheden.[13] Niets nieuws onder de zon dus, en abstraheren is natuurlijk ook weer een van de krachtige aspecten van de wiskunde: je gaat op een hoger niveau redeneren over zaken en verbanden op een manier die nog steeds iets voor je betekent.
In het voorbeeld in kader 2 over de lijnen die een parabool snijden dan wel raken, zijn de lijnen en de parabool wiskundige objecten waarmee de leerlingen vertrouwd zijn en die voor hen betekenis hebben, die werkelijkheid geworden zijn zonder dat ze op dit moment refereren aan een direct waarneembare, realistische situatie. Binnen deze wereld van wiskundige objecten kan de leerling redeneren, proberen, en rekenen. Het abstracte is concreet geworden: de leerlingen zien in wat het rekenen met de algebraïsche expressies betekent.

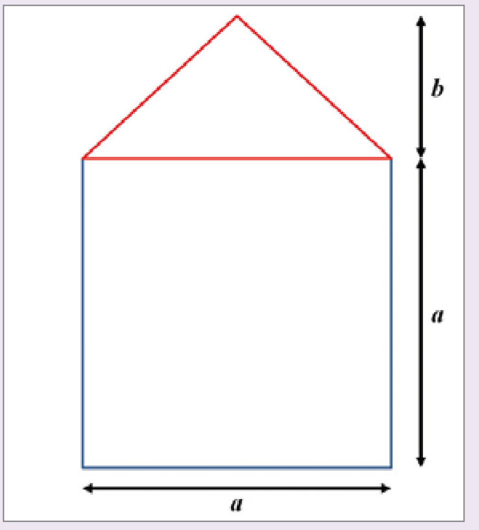
Tot slot

Wiskundig denken is de kern en de kracht van wiskunde en vormt tevens een belangrijke beoogde opbrengst van wiskundeonderwijs. Als drie kernaspecten van wiskundig denken heb ik hierboven probleemoplossen, modelleren en abstraheren onderscheiden. Vanzelfsprekend is daarmee het laatste woord niet gezegd. Niet alleen valt elk van de drie nog nader uit te werken, ook zijn ze soms met elkaar verweven en moeilijk van elkaar te onderscheiden.
Bovendien is nog niet meteen duidelijk hoe deze driedeling helpt om wiskundig denken in de les en in de toetsing vorm te geven. Ook dat vraagt nog om een nadere uitwerking, waaraan op verschillende plaatsen wel wordt gewerkt en die wellicht onderwerp is van een vervolgartikel. Maar één suggestie wil ik vast doen. Als u een opgave bekijkt of een les of werkvorm voor uw leerlingen voorbereidt, dan kunt u zich afvragen: is er sprake van probleemoplossen, is er sprake van modelleren, en is er sprake van abstraheren? Als het antwoord op deze vragen voor de betreffende groep leerlingen ‘nee’ is, dan is de kans groot dat er nauwelijks beroep op wiskundig denken wordt gedaan. Als het antwoord op een of meer van deze vragen ‘ja’ is, dan is de vraag waar dat probleemoplossen, modelleren en/of abstraheren nu precies in zit en op welke manier u als docent dit aspect het best voor het voetlicht kunt brengen. Als u zich deze kern bewust bent, zal dat helpen om tijdens de les de kansen te benutten die zich voordoen om wiskundig denken met succes aan de orde te stellen.

Dankwoord

Dit artikel is een eerste resultaat van het onderzoek ‘Wiskundige denkactiviteiten in praktijk’, dat mogelijk is gemaakt door NRO.[14] De auteur dankt verschillende collega’s, onder wie Anne van Streun en Bert Zwaneveld, voor hun constructieve commentaren op een eerdere versie van dit artikel.

Kader 3: Oppervlakte van een ‘huis’



figuur 3 Vooraanzicht van een ‘huisje’

a. Het vooraanzicht van het ‘huisje in figuur 3 bestaat uit een vierkant met zijde a en een driehoek met hoogte b. Hoe kun je de oppervlakte van dit vooraanzicht uitrekenen als je weet hoe groot a en b zijn?
b. Nu in de driedimensionale ruimte. Stel je hebt een ‘huis’ in de vorm van een kubus met ribbe a met daarop een piramidevormig dak met hoogte b. Druk de totale buitenoppervlakte ervan uit in a en b.

Vraag a is redelijk standaard in 3 havo/vwo. Wel is misschien verrassend dat meteen met variabelen wordt gewerkt. Het voordeel hiervan is dat de leerling zich realiseert dat het om de methode gaat, om het type verband en niet om de numerieke uitkomst op zichzelf. Vanuit het oogpunt van modelleren is een beperking dat de keuze van de variabelen, een belangrijke stap in het modelleerproces, hier al voor de leerling is gemaakt.
In onderdeel b gaat het modelleren iets verder.
Je zult moeten nadenken over de oppervlakte van de driehoekige vlakdelen van het dak. Als we het probleem iets realistischer maken en denken aan bijvoorbeeld isolatiedoeleinden, kan een schatting van de buitenoppervlakte van belang zijn. Maar daarbij speelt natuurlijk ook een rol hoe groot ramen en deuren zijn. En is het wel realistisch om aan te nemen dat de hoogte van het huis tot het dak gelijk is aan de breedte? Kortom, er liggen openingen naar denkactiverende vervolgvragen.

Noten en referenties

[1] *Rijk aan betekenis. Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO. *www.fi.uu.nl/ctwo*

[2] *Denken & doen, wiskunde op havo en vwo per 2015*. Utrecht: cTWO. *www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/CTWO-Eindrapport.pdf*

[3] Van Streun, A. (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten*. Enschede: SLO. *www.slo.nl/organisatie/recentepublicaties/00140/*

[4] Drijvers, P. (2011). Wat bedoelen ze toch met... denkactiviteiten? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 31*(2), 38-41. *www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/artikelen/312/312december_drijvers.pdf*

[5] Pólya, G. (1963). On learning, teaching, and learning teaching. *The American Mathematical Monthly, 70*(6), 605-619.

[6] Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

[7] Van Streun, A. (2001). *Het denken bevorderen*. Oratie. Groningen: RuG. *http://irs.ub.rug.nl/ppn/235192082*

[8] Doorman, M., van der Kooij, H., & Mooldijk, A. (2012). Denkactiviteiten, onderzoekend leren en de rol van de docent. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs 31*(4), 9-1. *www.fisme.uu.nl/wiskrant/artikelen/314/314juni_doorman-vanderkooij-mooldijk.pdf*

[9] Voogt, J., & Pareja Roblin, N. (2010). *21st century skills. Discussienota*. Enschede: Universiteit Twente. *www.kennisnet.nl/uploads/tx_kncontentelements/21st_century_skills_Discussienota-Universiteit_Twente.pdf*

[10] Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

[11] Drijvers, P. (2012). Wat bedoelen ze toch met... modelleren? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 31*(4), 34-37. *www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/artikelen/314/314juni_drijvers.pdf*

[12] Spandaw, J., & Zwaneveld, B. (2012). Modelleren, van werkelijkheid naar wiskunde en weer terug. In P. Drijvers, A. van Streun, & B. Zwaneveld (Red.), *Handboek Wiskundedidactiek* (pp. 235-264). Utrecht: Epsilon.

[13] Vakontwikkelgroep Wiskunde (1995). *Advies examenprogramma havo/vwo wiskunde*. Enschede: SLO

[14] Projectnummer 405-14-502
Van Streun, A., & Kop, P. (2012). Wiskundige denkactiviteiten. In P. Drijvers, A. van Streun, & B. Zwaneveld (Red.), *Handboek Wiskundedidactiek* (pp. 339-368). Amsterdam: Epsilon.

Over de auteur

Paul Drijvers is hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en toetsdeskundige bij Cito.
E-mailadres: *p.drijvers@uu.nl*

KLEINTJE DIDACTIEK

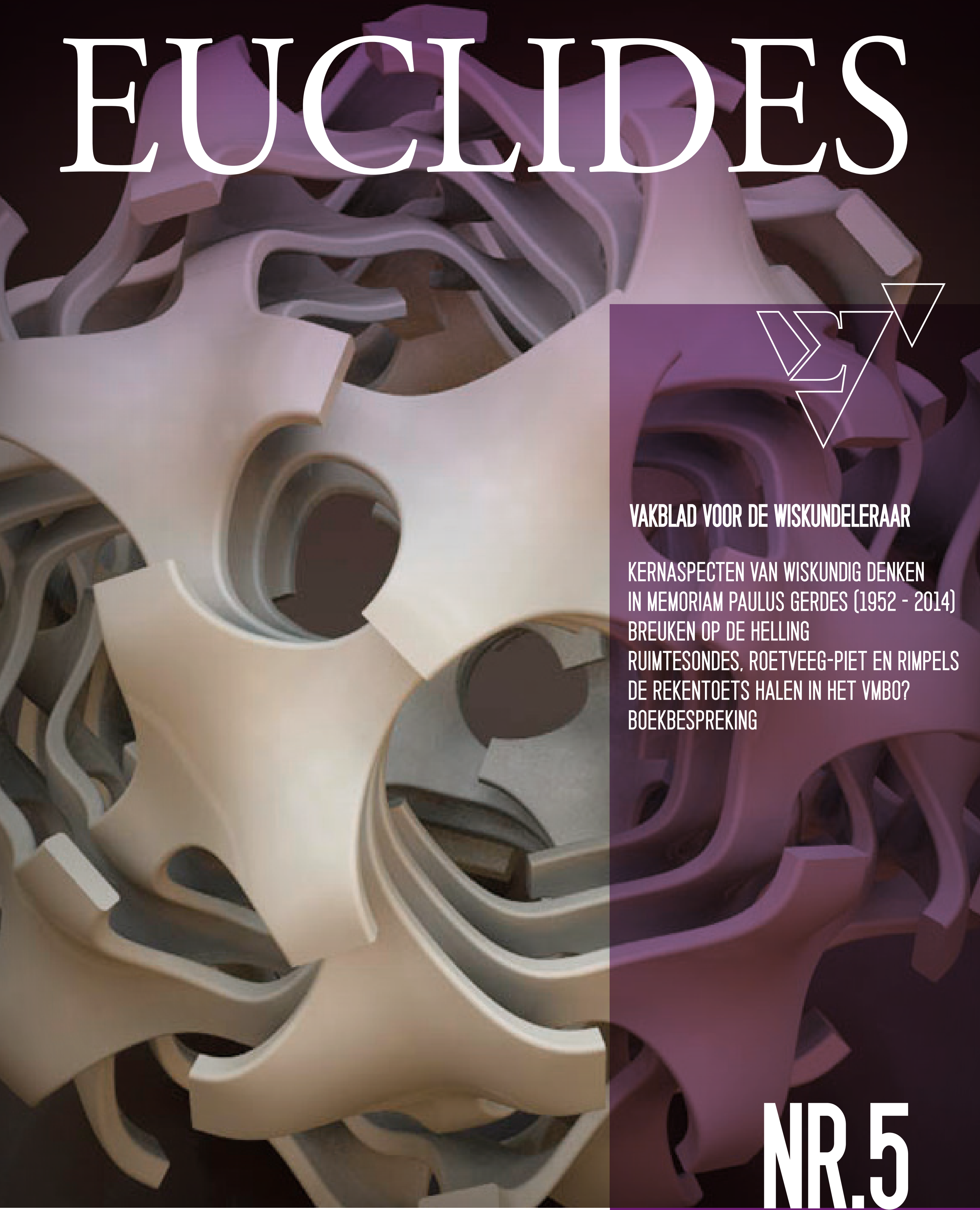
ONBEGREPEN STATISTIEK

Komend schooljaar start het nieuwe examenprogramma *Kansrekening en Statistiek* voor havo en vwo. Veel leerlingen (en volwassenen) hebben intuïtief een verkeerd beeld van statistiek. Een voorbeeld is de kans om de staatsloterij of postcodeloterij te winnen. Daarom dit voorbeeld: Neem het telefoonboek van Amsterdam. Kies hieruit een willekeurig telefoonnummer. Hoe groot acht je de kans dat je een bekende treft?

Een veelgehoorde reactie van leerlingen is: 'Maar ik ken helemaal niemand in Amsterdam, dus die kans is nul.' Toch is dat niet helemaal waar. Misschien is er wel toevallig iemand op bezoek bij iemand in Amsterdam en neemt die iemand de telefoon even op. Of een kennis blijkt in Amsterdam te werken of is er net naartoe verhuisd. De kans dat je de loterij wint, is in elk geval nog veel kleiner. Toch zijn er wel mensen die de loterij winnen. En dat maakt statistiek ook zo verraderlijk. Waar in de wiskunde één tegenvoorbeeld voldoende is om je veronderstelling onderuit te halen, zegt in de statistiek één tegenvoorbeeld helemaal niets. We hebben als mensen bovendien de neiging om dat ene voorbeeld van die buurman die een BMW en geld won veel beter te onthouden dan al die andere keren dat we zelf geld verloren.

Lonneke Boels

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

NR.5

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 90 | MAART 2015