



**Nooit meer
een totale
zonsverduistering?**

Inleiding

Op 11 augustus 1999 was in Europa een volledige zonsverduistering te zien. Deze vrij uitzonderlijke gebeurtenis werd door miljoenen mensen bekeken. Langzaam schoof de maan voor de zonnescijf totdat ze de zon precies bedekte. Van de zon was alleen nog maar de 'corona' te zien, de vlamme gaswolk die de zon omringt. Deze is veel lichtzwakker dan de zonnescijf zelf. Tijdens de volledige verduistering werd het plotseling even helemaal donker, waardoor de corona juist goed te zien was. "Het was alsof iemand een knop omdraaide waardoor het licht uitging en een paar minuten daarna het licht weer aanded". Zo beschreef menigeen deze indrukwekkende ervaring. Ook maakte de razendsnel voorbij jagende schaduw van de maan een diepe indruk.

In 1610 beschreef Galilei in het boek 'Sidereus Nuncius' (De Sterrenboodschapper) het verschijnsel dat een planeet voor de zon langs schoof. Hij zag een stipje langzaam en regelmatig over de zonnescijf bewegen. Een dergelijke 'zonsverduistering' heeft geen waarneembare invloed op de intensiteit van de zon op de aarde. Bij de maan is dat natuurlijk een heel ander verhaal. Dankzij het feit dat wij de zon en de maan aan de hemel als even grote cirkelschijven zien, kennen we volledige zonsverduisteringen. De zon wordt dan precies door de maan bedekt. Alleen de corona rond de zon – dat is de brandende schil van gas – blijft zichtbaar. Maar eigenlijk is het een mooi toeval, dat het zo precies klopt. Tenminste: in de tijd waarin wij leven.

Het systeem van aarde en maan zorgt voor het verschijnsel van eb en vloed. Dit systeem verandert heel langzaam. Doordat bij eb en vloed wrijving optreedt, verliest het systeem energie in de vorm van warmte. In de loop van de tijd zal daarom de maan zich steeds verder van de aarde verwijderen. Dit gaat weliswaar heel langzaam, maar op de lange termijn zal dit effect zijn invloed hebben op het verschijnsel zonsverduistering. Eveneens onder invloed van de maan gaat de aarde steeds langzamer draaien. Onze dagen worden dus geleidelijk langer. Ook dat gaat heel langzaam en we zullen er persoonlijk niet zo veel merken. Maar op de hele lange termijn krijgen 'we' er toch mee te maken, als er dan tenminste nog mensen op de aarde rondlopen.

De eindopdracht van deze wiskunde B-dag

De verwijdering van de maan van de aarde is een proces dat al in zeer vroege tijden moet zijn begonnen. Vroeger heeft de maan dus dicht bij de aarde gestaan. De effecten van dit proces zijn voor een mens nauwelijks waarneembaar. Maar op een andere tijdschaal kun je die effecten zeker zichtbaar maken.

De eindopdracht van deze wiskunde B-dag is het schrijven van een artikel voor de Nieuwe Wiskrant (een blad voor wiskundedocenten), gebaseerd op de resultaten van de deelopdrachten.

In ieder geval moet je in dit artikel in de juiste tijdsschaal het veranderen van de maansverwijdering vroeger en straks zichtbaar maken en laten zien hoe zonsverduisteringen er vroeger uitzagen en hoe ze er straks uit zullen zien, en je legt op heldere wijze uit hoe dat kan. Tevens zet je in die tijdschaal opvallende gebeurtenissen van het leven op aarde, bijvoorbeeld: grote geologische veranderingen, het ontstaan van het leven op aarde en van de mens.

Daarnaast verwerk je in het artikel een aantal onderwerpen uit de deelopdrachten. Je mag hierbij zelf een keuze maken.

Het artikel moet onderbouwd worden met berekeningen, grafieken, tabellen en figuren.

Bedenk een pakkende titel voor het artikel.

Het beste artikel zal worden geplaatst in de Nieuwe Wiskrant!

Werkwijzer voor de wiskunde B-dag

Deze opdracht bestaat uit zes deelopdrachten en een eindopdracht.

De deelopdrachten zijn bedoeld als startpunt. Je moet bij de eindopdracht gebruiken wat je in de deelopdrachten hebt onderzocht en daar op voortgaan.

In de opdrachten 1, 2 en 3 ga je uitzoeken wat er eigenlijk allemaal gebeurt tijdens een volledige zonsverduistering. Besteed hieraan maximaal anderhalf uur.

In de deelopdrachten 4 en 5 onderzoek je twee formules, die je nodig hebt voor de laatste deelopdracht en de eindopdracht. Besteed hieraan maximaal een half uur!

In deelopdracht 6 onderzoek je wat er in de toekomst met het systeem Aarde-Maan gebeurt en wat dat voor invloed heeft op de kalender en de zonsverduistering.

In de eindopdracht schrijf je een artikel. Dit is veel werk! Begin hier uiterlijk om 13.00 uur aan.

Bijlagen

In Bijlage 1 vind je alle getallen en formules die in de tekst verspreid voorkomen nog eens bij elkaar.

Bijlage 2 is een kaart die nodig is bij een van de deelopdrachten.

Inleveren

- Een artikel voor de Nieuwe Wiskrant.
 - Alle antwoorden van de deelopdrachten 1 tot en met 6.
- Alles **geprint** of met **zwarte pen** geschreven, in verband met het kopiëren.

Tips:

- Lees eerst alle opdrachten door om een voorlopig overzicht van werkzaamheden te krijgen.
- Verdeel waar mogelijk taken.
- Werk de deelopdrachten meteen in het net uit, dit in verband met de tijd.
- Reserveer voldoende tijd voor de eindopdracht!

Beoordeling

Het artikel is het belangrijkste voor de beoordeling. Dit wordt beoordeeld op zowel wiskundige inhoud als op presentatie (opbouw, leesbaarheid, verzorging).

Daarnaast worden de resultaten van de deelopdrachten beoordeeld. In de eindbeoordeling weegt dit minder zwaar dan het artikel.

Veel plezier en succes!

De deelopdrachten

Deelopdracht 1: Een schets van de situatie

Opvallend is dat de maanschijf bij een zonsverduistering de zon precies bedekt. Beide hebben eenzelfde schijnbare grootte van zo'n halve graad aan de hemel. In de tabel in bijlage 1 vind je allerlei afstanden en groottes, zoals ze nu zijn.

Maak een schets van de situatie zon-maan-aarde bij zonsverduistering. Geef hierbij aan welke speciale verhoudingen tussen grootten en afstanden ervoor verantwoordelijk zijn dat de beide schijnbare hoeken, en dus de schijnbare grootte van de zon en de maan, inderdaad praktisch gelijk zijn.

Deelopdracht 2: De bedekkingsgraad

Bij een volledige zonsverduistering schuift de maan in een vast tempo voor de zon langs. Daarbij schuift het middelpunt van de maanschijf precies over het middelpunt van de schijf van de zon. Aan het begin van de verduistering is de zon voor 0% bedekt. Tijdens de totale verduistering is de bedekking 100% en aan het eind weer 0%. Hoe zou de grafiek van het bedekte percentage eruit zien?

Onderzoek het verloop van de bedekkingsgraad met behulp van een model (bv. schijven en ruitjespapier) en teken op basis daarvan een zo goed mogelijke grafiek. Licht deze grafiek kort toe. Denk daarbij aan de in de inleiding beschreven waarnemingen van de kijkers.

Deelopdracht 3: Schaduw van de maan schuift over de aarde



Bij een totale zonsverduistering bevindt de maan zich precies tussen de zon en de aarde. Vanuit de aarde gezien schuift de maanschijf precies voor de zon. Van buiten de aarde gezien, schuift de schaduw van de maan over het aardoppervlak. Hier zie je een foto hoe dat er vanuit de ruimte (vanaf de Mir-satelliet) uitzag.

In de bijlage 2 zie je een tekening van de baan van de schaduw over Europa.

- a. Met welke snelheid verplaatste de schaduw zich over Europa?

De snelheid van de maan rond de aarde is gemiddeld 3680 km/u. (Dit kun je zelf afleiden met behulp van de gegevens op bijlage 1).

- b. Probeer een verklaring te bedenken voor het verschil tussen de gevonden snelheid bij a. en de snelheid van de maan rond de aarde.

Deelopdracht 4: Oefenen met de derde wet van Kepler

Voor satellieten of manen die in cirkelvormige banen om een planeet (zoals de aarde) draaien, bestaat een eenvoudig verband tussen de omlooptijd T (in dagen) en de straal R (in 100 000 kilometer) van de baan:

$$T^2 = \text{constante} \cdot R^3$$

De waarde van de *constante* hangt alleen af van de massa van de planeet in het midden, waar de satellieten en manen om heen draaien.

Ter oefening ga je rekenen aan de maan en enkele belangrijke satellieten die om onze aarde draaien.

Onze maan heeft een omlooptijd van 27,32 dagen om onze aarde en de afstand van de maan tot het middelpunt van de aarde is 384400 kilometer.

- a. Ga na dat de waarde van de constante in het verband hier 13,14 moet zijn.
- b. Een navigatiesatelliet voor het GPS-systeem heeft een hoogte van 600 km boven de aarde. Wat is de omlooptijd van een dergelijke satelliet? (De straal van de aarde is ongeveer 6400 km.)
- c. Een betaalbare satellietontvanger is naar een vaste plaats aan de hemel gericht. Deze ontvangt signalen van zogenaamde 'geostationaire' satellieten. Een geostationaire satelliet 'hangt' op een vaste plaats boven de aarde. Dat kun je voor elkaar krijgen door zo'n satelliet een baan te geven precies boven de evenaar met omlooptijd van 24 uur in dezelfde richting als de draaiing van de aarde. De satelliet draait dan gelijk met de aarde mee en blijft dus altijd boven dezelfde plaats van de evenaar 'hangen'. Hoe hoog staat zo'n satelliet boven de evenaar?

Historische informatie over de ontdekking van dit verband

Dit verband tussen omlooptijden en afstanden is ontdekt door Kepler op grond van vele waarnemingen van Tycho Brahe (1546 - 1601) aan de planeten die rond de zon draaien. Daar geldt ook zo'n verband, want wat satellieten voor de aarde zijn, dat zijn planeten voor de zon. Het verband staat bekend als 'de derde wet van Kepler'. Kepler vertelt er zelf over in zijn boek *'Harmonice Mundi'*. In vrije vertaling:

... als je het precieze moment van ontdekken [d.w.z. van het vermoeden van de derde wet] wilt weten, dat was 8 maart in het jaar een duizend zeshonderd achttien, maar aanvankelijk werd het op een verkeerde manier met berekeningen getoetst, en daarom als vals verworpen, maar uiteindelijk nogmaals onderzocht op de 15e mei en door de nieuwe manier het probleem aan te pakken, werd de duisternis uit mijn geest geblazen. Zo sterk was de overeenkomst van mijn zeventien jaar durende inspanning aan de observaties van Brahe en deze studie, die als het ware samenzweerden, dat ik aanvankelijk meende dat ik droomde en meende dat mijn conclusies in de berekening waren vóórondersteld. Maar het is absoluut zeker en exact dat 'de verhouding tussen de omlooptijden van twee planeten precies gelijk is aan de sesquialter proportie van de gemiddelde afstanden*

[Harmonice Mundi, boek 5, hoofdstuk 3]

Later is het Newton gelukt dit verband ook theoretisch te verklaren met de wetten van de zwaartekracht.

* sesquialter proportie: dwz. 'de verhouding van anderhalfde machten'

Deelopdracht 5: Twee verschillende soorten omlooptijden en het verband er tussen

Als je in je agenda of in de krant kijkt, zul je zien dat het ongeveer om de 29 dagen Volle Maan is. Bij Volle Maan staat de maan van ons uit gezien precies tegenover de zon.

Maar tussen twee Volle Manen zit toch juist één omloop? Hoe zit dat nu, is het nu 29 dagen of de 27,32 dagen uit de voorgaande deelopdracht?

Van belang is dat de maan niet alleen om de aarde draait, maar dat het duo aarde-maan zelf ook weer in een grote baan om de zon draait. Daarom zijn er inderdaad TWEE omlooptijden voor de maan; het ligt er aan hoe je kijkt: Zo zijn de twee omlooptijden gedefinieerd:

T_{sid} : De **siderische** omlooptijd: De tijd die de maan nodig heeft om precies een volle cirkel om de aarde te draaien.

De maan staat na één siderische omlooptijd weer precies in de richting van de zelfde ster als daarvoor (sterren zijn zo ver weg dat de richting erheen vast is).

T_{syn} : De **synodische** omlooptijd: De tijd die de maan nodig heeft van Volle naar Volle maan. Dat is dus tijd die nodig is om dezelfde positie ten opzichte van de zon te bereiken, namelijk vanaf de aarde gezien precies tegenover de zon.

Er is een verband tussen T_{sid} , T_{syn} en de lengte J van een jaar. Dat verband zul je nog nodig hebben bij de laatste deelopdracht.

Bij deze opgave onderzoeken we dit verband.

In de figuren zie je drie keer het stelsel Zon-Aarde-Maan. De figuren zijn niet op schaal; de juiste afstanden vind je in de bijlage.

Momentopname 1:

Volle maan; zon aarde en maan staan op één lijn.

Momentopname 2:

Een siderische omlooptijd verder. Het is nog geen Volle Maan. De lijn aarde-maan heeft dezelfde richting als bij momentopname 1.

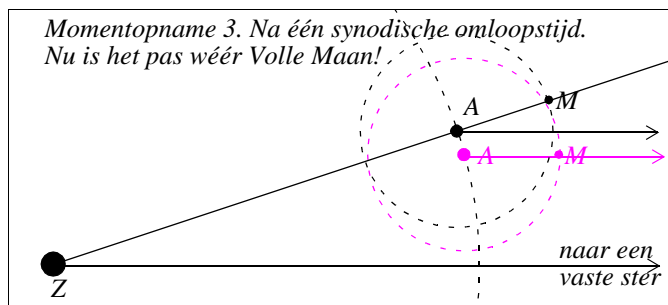
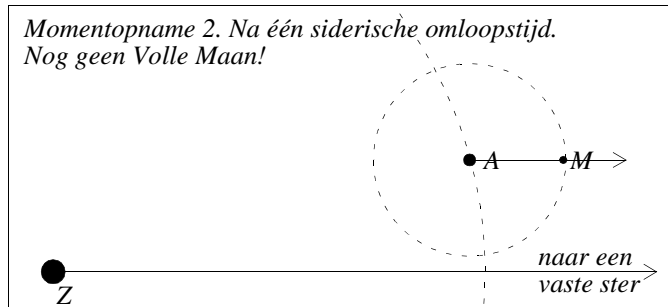
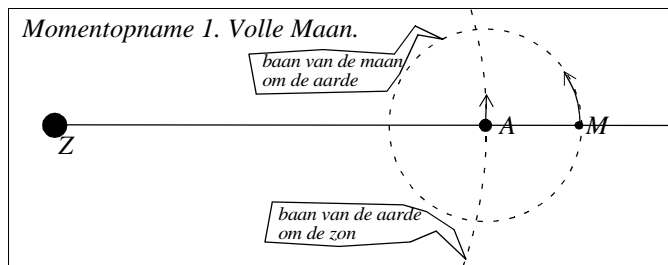
Momentopname 3:

Vrij kort na momentopname 2 en precies een synodische omlooptijd na momentopname 1. Het is weer Volle Maan. (De stand van momentopname 2 is er lichtgrijs ingetekend)

Het verband tussen T_{sid} , T_{syn} en J kunnen we vinden door de overduidelijk gelijke hoeken in momentopname 3 te gebruiken. Als volgt.

- De maan heeft na T_{sid} dagen een volledige cirkel afgelegd en moet daarna nog een kleine fractie van de cirkel doordraaien naar volle maan. De volle cirkel plus die fractie van een cirkel worden dus in T_{syn} dagen afgelegd. Die fractie kun je ten opzichte van de hele cirkel in T_{sid} en T_{syn} uitdrukken.

Zoek die uitdrukking en beredeneer dat die uitdrukking inderdaad een getal tussen 0 en 1 is dat dichter bij 0 dan bij 1 ligt.



- b. De aarde heeft in de tijd tussen momentopname 1 en 3 ook dezelfde fractie van haar baan om de zon afgelegd. Je kunt die fractie daarom ook in T_{syn} en J , de jaarlengte, uitdrukken. Noteer die uitdrukking ook. $J = 365,243$ dagen, maar laat J gewoon in de formule staan.
- c. Omdat beide fracties gelijk zijn, vind je een verband tussen T_{sid} , T_{syn} en J . Leid met behulp van de formules uit a. en b. af dat:

$$\frac{1}{T_{sid}} - \frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{J}$$

- d. Laat zien hoe nu T_{syn} op twee decimalen nauwkeurig vanuit de waarden $T_{sid} = 27,32$ en $J = 365,243$ bepaald kan worden.
(Ter controle: bijlage 1 geeft een waarde voor T_{syn}).

Belangrijk:

*De omloopstijden waar je bij de wet van Kepler ($T^2 = \text{constante} \cdot R^3$) mee moet rekenen zijn de **siderische** omloopstijden, dus de wet van Kepler wordt nu:*

$$T_{sid}^2 = 13,14 \cdot R^3$$

*De omloopstijden waar je bij kalenders en schijn gestalten van de maan mee moet rekenen, zijn de **synodische** omloopstijden.*

Deelopdracht 6: Een mooiere maanmaand. Maar de zonsverduistering

De **synodische** omloopstijd van de maan is nu dus ruim 29 dagen. Op dit moment hebben we een ingewikkelde kalender met 12 maanden waarvan sommige 30, andere 31 en een enkele 28 of 29 dagen tellen en waarbij de kalendermaanden en de maan-maanden slecht met elkaar kloppen. Toch is de oorspronkelijke kalender-maand aan de maan-maand gekoppeld geweest.

Mogelijk keert die koppeling weer terug want de maan beweegt van de aarde af!

Het is precies bekend met welke snelheid de maan van de aarde af beweegt: met een snelheid van ongeveer 3,8 centimeter per jaar. De omloopstijd(en) van de maan veranderen dan ook. Ga er wel vanuit dat de lengte van het jaar constant is.

- a. Bepaal hoe lang het nog duurt voor we precies twaalf volle manen in een jaar hebben. Ofwel: wanneer precies geldt $J = 12 \cdot T_{syn}$.

Het zou ook mooi zijn om een jaar van precies 360 dagen te hebben. Het is niet onmogelijk dat ook dit er vanzelf van komt, want ook de aarde blijkt heel geleidelijk langzamer te gaan draaien, waardoor je minder dagen (maar iets langere) krijgt in de constante omloop van de aarde rond de zon. Goed bekend is hoeveel de draaiing van de aarde vertraagt: per eeuw wordt de dag 1,5 milliseconde langer.

- b. Bepaal hoe lang het nog duurt voordat er 360 (langere) dagen in een jaar zitten.

Helaas vallen deze twee 'mooie' situaties niet samen en zit een jaar van 360 dagen met 12 maan-maanden van 30 dagen er niet in.

-
- c. Kies één van de situaties uit **a.** of **b.** en ontwerp daarvoor een geschikte jaarkalender.

In de verre toekomst zal een zonsverduistering er anders uitzien. In de situatie van onderdeel **a.** zal de zon niet meer volledig bedekt worden als het middelpunt van de maan precies over dat van de zon schuift.

- d. Hoeveel procent zonlicht blijft er dan nog over bij zo'n verduistering? Schets de bijhorende bedekkingsgrafiek.

Nogmaals: de eindopdracht

De verwijdering van de maan van de aarde is een proces dat al in zeer vroege tijden moet zijn begonnen. Vroeger heeft de maan dus dicht bij de aarde gestaan. De effecten van dit proces zijn voor een mens nauwelijks waarneembaar. Maar op een andere tijdschaal kun je die effecten zeker zichtbaar maken.

De eindopdracht van deze wiskunde B-dag is het schrijven van een artikel voor de Nieuwe Wiskrant (een blad voor wiskundecollega's), gebaseerd op de resultaten van de deelopdrachten.

In ieder geval moet je in dit artikel in de juiste tijdschaal het veranderen van de maansverwijdering vroeger en straks zichtbaar maken en laten zien hoe zonsverduisteringen er vroeger uitzagen en hoe ze er straks uit zullen zien, en je legt op heldere wijze uit hoe dat kan. Tevens zet je in die tijdschaal opvallende gebeurtenissen van het leven op aarde, bijvoorbeeld: grote geologische veranderingen, het ontstaan van het leven op aarde en van de mens.

Daarnaast verwerk je in het artikel een aantal onderwerpen uit de deelopdrachten. Je mag hierbij zelf een keuze maken.

Het artikel moet onderbouwd worden met berekeningen, grafieken, tabellen en figuren.

Bedenk een pakkende titel voor het artikel.

Het beste artikel zal worden geplaatst in de Nieuwe Wiskrant!

Bijlage 1: benodigde getallen en formules

| | |
|---|---|
| afstand aarde maan | 384 400 km |
| afstand aarde zon | 1.5×10^8 km |
| diameter van de maan | 3476 km |
| diameter van de zon | 1 390 000 km |
| diameter van de aarde | 12 756 km |
| T_{sid} = siderische omlooptijd van de maan rond de aarde; tijd die de maan nodig heeft voor precies een cirkelbaan | 27,32 dagen |
| T_{syn} = synodische omlooptijd van de maan; tijd die de maan nodig heeft van Volle Maan naar Volle Maan. | 29,53 dagen |
| vergroting van de afstand aarde maan | 3,8 centimeter per jaar |
| verlenging van de dag door vertraging van de draaiing van de aarde | 1,5 milliseconde per eeuw (een milliseconde is 1/1000 seconde) |
| constante lengte J van het jaar | 365,243 dagen; de jaarlengte is constant; voor 'dagen' moet de daglengte van het jaar 2000 worden genomen |
| Derde Wet van Kepler | $T_{sid}^2 = 13,14 \cdot R^3$ T_{sid} in dagen, R (afstand tot aarde) in 100 000 km |
| verband tussen de omlooptijden | $\frac{1}{T_{sid}} - \frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{J}$ J is de jaarlengte in dagen (zie boven) |

Bijlage 2: kaart van zonsverduistering 11 augustus 1999

