13.1 Licht als golf

Opgave 1
Voor de drie verschijnselen geldt: Golven vertonen buigingsverschijnselen als de golflengte groter is dan de grootte van een obstakel. Golflengten kleiner of gelijk aan het obstakel worden tegen-gehouden en vertonen geen of nauwelijks buigingsverschijnselen.

a Een bergtop is een groot obstakel.
Voor radiogolven geldt $c = f \cdot \lambda$. Omdat de lichtsnelheid c een constante is, betekent dit: hoe hoger de frequentie, des te kleiner is de golflengte. Hoe kleiner de golflengte, des te kleiner is de mate van buiging. Bij obstakels zoals bergtoppen treedt minder buiging op naarmate de golflengte kleiner is. Als de bron van de golven buiten het dal is, en de golflengte is te klein, dan zijn de golven niet of nauwelijks waarneembaar in het dal.

b De geluidsgolven met lage tonen hebben kleine frequenties en dus grote golflengten. Hoge tonen, met kleine golflengten, worden tegengehouden door kleine obstakels, waar de golven van lage tonen omheen buigen. Daarom hoor je op grote afstand vooral de lage tonen.

c Atomen en de ruimte ertussen hebben een veel kleinere afmeting dan de golflengte van licht. Licht buigt dus om de atomen heen. Röntgenstraling heeft een veel kleinere golflengte dan licht en buigt dus veel minder. Röntgenstraling wordt gedeeltelijk weerkaatst en geeft daarmee informatie over de structuur van kristallen.

Opgave 2

a Er treedt buiging op als de golflengte groter is dan de spleetopening. De breedte van de spleet is dus smaller dan 589 nm.

b De gele strepen verschijnen op de plekken waar constructieve interferentie van het gele licht plaatsvindt. Wit is de kleur van de achtergrond, zichtbaar op de plekken waar destructieve interferentie plaatsvindt.

c Als de afstand tussen de spleten kleiner is dan één golflengte, is er maar één maximum. Als de spleetafstand groter is dan de golflengte, kunnen er meer maxima ontstaan.
Als er meer maxima verschijnen, is de afstand tussen de spleten dus groter geworden.

d Als de spleetafstand groter is dan de golflengte, kunnen er meer maxima ontstaan.
Bij dezelfde spleetafstand is het aantal maxima dus groter, als de golflengte kleiner is.

Opgave 3

a Intensiteit heeft te maken met energie. Dus de wet van behoud van energie is de natuurkundige wet die samenhangt met het principe van Babinet.

b 1 Is een spleet veel groter dan de golflengte van het licht, dan gaat nagenoeg alle licht rechtdoor en treedt er nauwelijks buiging op.
Volgens het principe van Babinet geeft buiging rondom een groot voorwerp het omgekeerde intensiteitspatroon. Dit laat een verlicht scherm zien met een duidelijke schaduw in het midden.

2 Is een spleet veel kleiner dan de golflengte van het licht, dan treedt rondom de spleet nagenoeg volledige buiging op. Omdat de spleet maar klein is, wordt er maar weinig licht doorgelaten.
Volgens het principe van Babinet geeft de buiging rondom een klein voorwerp over een grote breedte een kleine vermindering van de lichtintensiteit. Er treedt dus nauwelijks schaduwvorming op.

Opgave 4

a Voor het verband tussen buigingshoek en golflengte geldt $\sin\alpha = n \cdot \dfrac{\lambda}{d}$.

Omdat $|\sin\alpha| \le 1$,moet $\left|n \cdot \dfrac{\lambda}{d}\right| \le 1$ zijn en dus $|n| \le \dfrac{d}{\lambda}$.

Uit 500 spleten per mm volgt $d = \dfrac{1 \cdot 10^{-3}}{500} = 2{,}00 \cdot 10^{-6}$ m.

Met λ = 633 nm = $633 \cdot 10^{-9}$ m betekent dat $\dfrac{d}{\lambda} = \dfrac{2{,}00 \cdot 10^{-6}}{633 \cdot 10^{-9}} = 3{,}16.$

Dus $|n| \le 3{,}16$.

Omdat *n* een geheel getal is, zijn de mogelijkheden −3,−2,−1,0,1,2,3.
Dus er zijn 7 mogelijkheden.

b Voor het verband tussen afbuigingshoek en golflengte geldt $\sin\alpha = n \cdot \frac{\lambda}{d}$.

Bij de middelste streep hoort *n* = 0. Als *n* = 0, dan is bij elke *λ* de waarde van sin *α* = 0.
Alle kleuren komen op dezelfde plek uit. Dit geeft wit licht.
Als *n* niet gelijk is aan 0 dan hangt de waarde van sin *α* af van de golflengte en dus van de kleur van het licht. Dan komen de verschillende kleuren naast elkaar terecht en zie je een spectrum.

c Voor het verband tussen afbuigingshoek en golflengte geldt $\sin\alpha = n \cdot \frac{\lambda}{d}$.

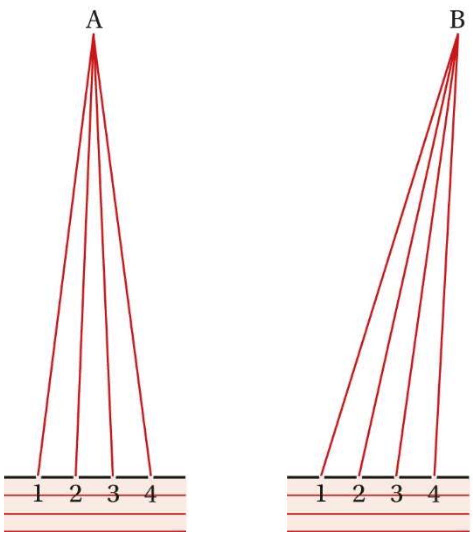
Bij één spectrum zijn de waarden van *n* en *d* constant. De kleinste *λ* levert de kleinste hoek *α*.
Violet heeft de kleinste golflengte, en geeft dus de kleinste afbuigingshoek. Violet ligt dus het dichtst bij de witte streep.

d Voor het verband tussen afbuigingshoek en golflengte geldt $\sin\alpha = n \cdot \frac{\lambda}{d}$. Is de spleetbreedte constant, dan hangt de afbuigingshoek dus af van het product *n*·*λ*. Volgens BINAS tabel 19A heeft zichtbaar licht een golflengte tussen 380 nm (randje violet) en 750 nm. Voor *n* = 2 ligt de waarde van *n*·*λ* dus tussen 760 nm en 1500 nm. Voor *n* = 3 ligt de waarde van *n*·*λ* tussen 1140 nm en 2250 nm. Het spectrum met *n* = 3 begint dus al voordat het spectrum met *n* = 2 is afgelopen.

e De breedte van de overlap tussen twee spectra is kleiner als de spectra smal zijn. Dat is bijvoorbeeld het geval als er in acht richtingen maxima optreden in plaats van in zeven. Omdat $|n| \le \frac{d}{\lambda}$, betekent dit dat *d* groter is. Dus de overlap is kleiner als *d* groter is. Bij een grotere *d* is de afstand is tussen twee spleten groter en is het aantal spleten per mm kleiner.

Opgave 5

a Zie figuur 13.1 hierna. In de richting van A is er geen weglengteverschil tussen de golven uit de openingen 1 en 4 en tussen de openingen 2 en 3. Omdat er dan geen weglengteverschil is, is het faseverschil 0. Dus interfereren de golven maximaal constructief.



Figuur 13.1 **Figuur 13.2**

b Zie figuur 13.2 hiervoor. Het faseverschil tussen golven uit twee naast elkaar gelegen spleten is $\frac{1}{4}$. Dus het faseverschil tussen de golf uit spleet 1 en de golf uit spleet 3 is gelijk aan $\frac{1}{2}$.

Tussen die twee golven treedt dus maximaal destructieve interferentie op. Dit geldt ook voor de golven uit spleet 2 en spleet 4. In punt B treedt volledige uitdoving op.

c Als de golven uit naburige openingen een faseverschil van $\frac{1}{2}$ hebben, dan doven de golven uit opening 1 en 2 elkaar uit, net als de golven uit 3 en 4.
Als de golven uit naburige openingen een faseverschil van $\frac{3}{4}$ hebben, dan hebben de golven uit 1 en 3 een faseverschil van $1\frac{1}{2}$. Ook dan treedt er destructieve interferentie op. Evenzo voor de golven uit 2 en 4. Ook nu is er volledige uitdoving.

d Versterking kan alleen optreden als het faseverschil tussen alle openingen geheel is. Dan moet het faseverschil voor golven uit naast elkaar gelegen openingen dus een geheel getal zijn.

e Er is maximale destructieve interferentie als voor een golf een andere golf te vinden is waarmee het faseverschil gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Hoe meer spleten er zijn, hoe meer combinaties er mogelijk zijn die maximale destructieve interferentie geven.

f Bij een tralie met veel spleten zie je voor elke kleur uit het witte licht alleen de maxima, die samen een spectrum vormen. De maxima liggen namelijk voor elke kleur op een iets andere plaats omdat het faseverschil afhankelijk is van de golflengte. Er geldt $\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\lambda}$
Gebruik je een plaat met vier spleten dan liggen de maxima voor elke kleur wel op dezelfde plaats, maar op andere plaatsen treedt geen volledige destructieve interferentie op. Je ziet dan allerlei kleuren over elkaar heen, die een witte indruk geven.

13.2 Licht als deeltje

Opgave 6

a Bij bestralen van het plaatje zink met ultraviolet licht treedt het foto-elektrisch effect op. Hierbij verlaten elektronen het metaal.
Bij het bestralen wordt de uitslag van de elektroscoop kleiner, en dus neemt de lading op het plaatje zink af. Omdat tijdens het bestralen negatief geladen deeltjes het plaatje verlaten, was het plaatje negatief geladen.

b In BINAS tabel 24 staat dat de grensfrequentie van zink (Zn) gelijk is aan $1{,}03 \cdot 10^{15}$ Hz. Deze frequentie hoort bij ultraviolet licht. Kunstlicht geeft geen ultraviolet licht omdat je bij kunstlicht niet bruin kunt worden.

c De maximale snelheid van een elektron bereken je met de formule voor de kinetische energie.
De kinetische energie volgt uit de fotonenergie en de uittree-energie.
De fotonenergie van het invallende foton bereken je met de formule voor fotonenergie.

$$E_\mathrm{f} = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$

$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (Zie BINAS tabel 7)
$c = 2{,}9979 \cdot 10^{8}$ m s^{-1} (Zie BINAS tabel 7)
$\lambda = 250$ nm $= 250 \cdot 10^{-9}$ m

$$E_\mathrm{f} = \frac{6{,}62606957 \cdot 10^{-34} \times 2{,}99792458 \cdot 10^{8}}{250 \cdot 10^{-9}}$$

$E_\mathrm{f} = 7{,}9456 \cdot 10^{-19}$ J

$E_\mathrm{k} = E_\mathrm{f} - E_\mathrm{u}$
$E_\mathrm{u} = 4{,}27$ eV $= 4{,}27 \times 1{,}6021 \cdot 10^{-19} = 6{,}8409 \cdot 10^{-19}$ J (Zie BINAS tabel 24)
$E_\mathrm{k} = 7{,}9456 \cdot 10^{-19}$ J $- 6{,}8409 \cdot 10^{-19}$ J $= 1{,}1046 \cdot 10^{-19}$ J

$$E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2} m \cdot v^2$$

$m = 9{,}1093 \cdot 10^{-31}$ kg (Zie BINAS tabel 7)

$$1{,}1046 \cdot 10^{-19} = \tfrac{1}{2} \times 9{,}1093 \cdot 10^{-31} \cdot v^2$$

$v = 4{,}9247 \cdot 10^{5}$ m s^{-1}
Afgerond: $v = 4{,}92 \cdot 10^{5}$ m s^{-1}.

Opgave 7

a De atoomsoorten in groep 1 zijn de zeer onedele metalen. Deze atoomsoorten reageren het snelst met andere atoomsoorten waarbij eenwaardige ionen ontstaan. Er is dus weinig energie nodig om een elektron uit deze atomen los te maken. Je mag dan ook verwachten dat de uittree-energie het laagst is.

b In BINAS tabel 24 hebben goud (Au) en zilver (Ag) een uittree-energie van afgerond 4,7 eV. Bij deze energie hoort volgens BINAS tabel 19A een uv-straling.

c Nee. Het foto-elektrisch effect kan alleen optreden als de fotonenergie van de straling groter is dan de uittree-energie. Fotonen van zichtbaar licht hebben een kleinere energie dan 4,7 eV.

Opgave 8

a Als de spanning wordt vergroot, wordt de anode meer positief. Deze trekt dan elektronen aan die niet precies in de richting van de anode bewegen. Deze vallen dan ook op de anode en dus neemt de stroomsterkte toe.

b De golflengte van het licht bereken je met de formule voor de fotonenergie.
De fotonenergie volgt uit de kinetische energie en een uittree-energie.
De kinetische energie bereken je met de remspanning. Bij de remspanning is de maximale kinetische energie van de snelste elektronen omgezet in elektrische energie.

$E_\mathrm{k} = q \cdot U$
$q = e$
$U = U_\mathrm{rem} = 0{,}75$ V

$E_k = e \cdot 0{,}75$
$E_k = 0{,}75$ eV.

$E_k = E_f - E_u$
$E_u = 2{,}257$ eV (Zie BINAS tabel 24)
$0{,}75 = E_f - 2{,}25$
$E_f = 3{,}00$ eV

$$E_f = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$

$E_f = 3{,}00$ eV $= 3{,}00 \times 1{,}6021 \cdot 10^{-19} = 4{,}8063 \cdot 10^{-19}$ J
$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (Zie BINAS tabel 7)
$c = 2{,}9979 \cdot 10^{8}$ m s^{-1} (Zie BINAS tabel 7)

$$4{,}8063 \cdot 10^{-19} = \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34} \times 2{,}9979 \cdot 10^{8}}{\lambda}$$

$\lambda = 4{,}1329 \cdot 10^{-7}$ m
Afgerond: $\lambda = 4{,}1 \cdot 10^{-7}$ m.

c In figuur 13.20 van het basisboek zie je dat de maximale stroomsterkte gelijk is aan 90 μA. Dan komen blijkbaar alle elektronen op de anode terecht. Een stroomsterkte van 90 μA betekent 90 μC per seconde. De lading van een elektron is $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

Er komen dus maximaal $\frac{90 \cdot 10^{-6}}{1{,}6021 \cdot 10^{-19}} = 5{,}6176 \cdot 10^{14}$ elektronen per seconde op de anode terecht. Dan worden $5{,}6176 \cdot 10^{14}$ elektronen per seconde uit de kathode vrijgemaakt.
Afgerond: $5{,}6 \cdot 10^{14}$.

d Het percentage bereken je met de verhouding tussen het aantal elektronen dat per seconde wordt vrijgemaakt en het aantal elektronen dat maximaal vrijgemaakt kan worden uit de kathode.
Het aantal elektronen dat maximaal vrijgemaakt kan worden, volgt uit het aantal fotonen dat per seconde op de kathode valt.
Het aantal fotonen dat per seconde op de kathode valt, bereken je met de fotonenergie en de totale energie die per seconde op de kathode valt.
De totale energie per seconde volgt uit het totale vermogen dat op de kathode valt.
Het totale vermogen bereken je met de intensiteit en de oppervlakte van de kathode.

$P_{tot} = I \cdot A$
$I = 6{,}0$ W s^{-2}
$A = 3{,}5$ cm^2 $= 3{,}5 \cdot 10^{-4}$ m^2
$P_{tot} = 6{,}0 \times 3{,}5 \cdot 10^{-4} = 2{,}1 \cdot 10^{-3}$ W

Dus de totale energie die per seconde op de kathode valt, is gelijk aan $2{,}1 \cdot 10^{-3}$ J.
$E_f = 4{,}8063 \cdot 10^{-19}$ J (Zie vraag 9a)

Er vallen dus per seconde $\frac{2{,}1 \cdot 10^{-3}}{4{,}8063 \cdot 10^{-19}} = 4{,}369 \cdot 10^{15}$ fotonen op de kathode.

Er kunnen dus maximaal $4{,}369 \cdot 10^{15}$ elektronen per seconde worden vrijgemaakt.
Volgens vraag 9b worden er per seconde $5{,}6 \cdot 10^{14}$ elektronen vrijgemaakt.

Dus het percentage is $\frac{5{,}6 \cdot 10^{14}}{4{,}369 \cdot 10^{15}} \cdot 100\% = 12{,}8\%$.

Afgerond: 13 %.

e De fotonenergie wordt omgezet in warmte.

Opgave 9

a Voor de buigingshoek geldt $\sin\alpha = n\cdot\frac{\lambda}{d}$ met $c = f\cdot\lambda$. Omdat c een constante is hoort bij een grotere frequentie een kleinere golflengte. Omdat d een constante is, betekent een kleinere golflengte een kleinere buigingshoek. Voor een kleinere buigingshoek draai je de schijf tegen de wijzers van de klok in.

b Voor de kinetische energie van een vrijkomend elektron geldt $E_k = E_f - E_u$.
Voor de foton energie geldt $E_f = h\cdot f$.
Het verband tussen uittree-energie en grensfrequentie wordt gegeven door $E_u = h\cdot f_{grens}$.
Bij de remspanning bereikt geen van de elektronen de anode. Alle kinetische energie wordt dan omgezet in elektrische energie. Er geldt dan dat $E_k = E_{el} = q\cdot U = e\cdot U_{rem}$.
Het invullen van de uitdrukkingen voor de verschillende energieën geeft dan
$e\cdot U_{rem} = h\cdot f - h\cdot f_{grens}$

c Figuur 13.21 geeft een verband tussen U_{rem} en f. Door in de formule voor de remspanning alle termen te delen door e ontstaat $U_{rem} = \frac{h\cdot f}{e} - \frac{h\cdot f_{grens}}{e} = \frac{h}{e}\cdot f - \frac{h}{e}\cdot f_{grens}$

Dus de grafiek in een (U_{rem},f)-diagram is een rechte lijn met steilheid $\frac{h}{e}$.

De steilheid van de grafiek is $\frac{\Delta U_{rem}}{\Delta f} = \frac{0{,}94-0}{7\cdot10^{14}-4{,}7\cdot10^{14}} = \frac{0{,}94}{2{,}3\cdot10^{14}} = 4{,}086\cdot10^{-15}$ V s.

$\frac{h}{e} = 4{,}086\cdot10^{-15}$
$e = 1{,}6021\cdot10^{-19}$ C
$h = 6{,}5477\cdot10^{-34}$
Afgerond: $6{,}5\cdot10^{-34}$ J s.

d De formule $e\cdot U_{rem} = h\cdot f - h\cdot f_{grens}$ volgt dat bij remspanning $U_{rem} = 0$ de frequentie $f = f_{grens}$.
Bij $U_{rem} = 0$ lees je af $f = f_{grens} = 4{,}7\cdot10^{15}$ Hz. Volgens BINAS tabel 24 is dit de grensfrequentie van cesium.

Opgave 10

a De maximale snelheid bereken je met de formule voor de kinetische energie.
De kinetische energie bereken je met de lading van een elektron en de remspanning.

$E_k = q\cdot U_{rem}$
$q = -1{,}6021\cdot10^{-19}$ C
$U_{rem} = -0{,}40$ V
$E_k = -1{,}6021\cdot10^{-19}\times(-0{,}40)$
$E_k = 6{,}40\cdot0\ 10^{-20}$ J

$E_k = \frac{1}{2}m\cdot v^2$
$m = 9{,}1093\cdot10^{-31}$ kg (Zie BINAS tabel 7)
$6{,}40\cdot10^{-20} = \frac{1}{2}\times 9{,}1093\cdot10^{-31}\cdot v^2$
$v = 3{,}75\cdot10^5$ m s^{-1}
Afgerond: $v = 3{,}8\cdot10^5$ m s^{-1}.

b 1 Door verhoging van de intensiteit van het licht vallen er meer fotonen op het materiaal. De kans dat een elektron een foton vangt en uit het materiaal ontsnapt is nu groter. De maximale stroomsterkte neemt dus toe.
2 De golflengte blijft hetzelfde. Dat betekent dat de kinetische energie die het elektron meekrijgt niet verandert. De remspanning blijft dus hetzelfde.

c 1 De fotonen van blauw licht hebben een grotere energie dan fotonen van groen licht. Het vermogen van het blauwe licht is hetzelfde als dat van het groene licht. Dat betekent dat er minder fotonen van het blauwe licht zijn dan van het groene licht. Dus kunnen er minder elektronen worden vrijgemaakt. Dat betekent dat de maximale stroomsterkte afneemt.

Systematische Natuurkunde

2 Omdat de fotonen van het blauwe licht een grotere energie hebben, krijgen de vrijgemaakte elektronen meer kinetische energie mee. Er is dus een grotere remspanning nodig om te voorkomen dat een elektron de anode bereikt.

d 1 Er worden door het groene licht elektronen vrijgemaakt. De intensiteit is niet veranderd. Dat betekent dat er dan evenveel elektronen worden vrijgemaakt als bij vraag b. De maximale stroomsterkte blijft hetzelfde.

2 Doordat de uitree-energie groter is, blijft er minder kinetisch energie over voor het vrijgemaakte elektron. Dat betekent dat de remspanning kleiner is.

13.3 Golf-deeltjes dualiteit

Opgave 11
De golflengte bereken je steeds met de formule van De Broglie.
De impuls bereken je met de formule voor impuls.

a $p = m \cdot v$
m = 75 kg
$v = 5{,}0 \text{ km h}^{-1} = \frac{5{,}0}{3{,}6} = 1{,}389 \text{ m s}^{-1}$
$p = 75 \times 1{,}389 = 104{,}17 \text{ kg m s}^{-1}$

$\lambda = \dfrac{h}{p}$
$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (Zie BINAS tabel 7)
$\lambda = \dfrac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{104{,}17} = 6{,}3607 \cdot 10^{-36}$ m
Afgerond: $\lambda = 6{,}4 \cdot 10^{-36}$ m.

b $p = m \cdot v$
$m = 32 \text{ u} = 32 \times 1{,}660538921 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 5{,}3137 \cdot 10^{-26}$ kg
$v = 480 \text{ m s}^{-1}$
$p = 5{,}3137 \cdot 10^{-26} \times 480 = 2{,}5505 \cdot 10^{-23}$

$\lambda = \dfrac{h}{p}$
$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (Zie BINAS tabel 7)
$\lambda = \dfrac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{2{,}5505 \cdot 10^{-23}} = 2{,}5978 \cdot 10^{-11}$ m
Afgerond: $\lambda = 2{,}6 \cdot 10^{-11}$ m.

c $p = m \cdot v$
$m = m_e = 9{,}1093 \cdot 10^{-31}$ kg (Zie BINAS tabel 7)
$v = 1{,}2 \cdot 10^{6} \text{ m s}^{-1}$
$p = 9{,}1093 \cdot 10^{-31} \times 1{,}2 \cdot 10^{6} = 1{,}0931 \cdot 10^{-24}$

$\lambda = \dfrac{h}{p}$
$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (Zie BINAS tabel 7)
$\lambda = \dfrac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{1{,}0931 \cdot 10^{-24}} = 6{,}0615 \cdot 10^{-10}$ m
Afgerond: $\lambda = 6{,}1 \cdot 10^{-10}$ m.

Opgave 12

a Voor de formule voor de debrogliegolflengte geldt $\lambda = \dfrac{h}{p}$.

Voor de golflengte van een foton geldt $c = f \cdot \lambda$. Hieruit volgt $\lambda = \dfrac{c}{f}$.

Invullen levert $\dfrac{c}{f} = \dfrac{h}{p}$

Dus geldt $p = \dfrac{h \cdot f}{c}$.

Combineer je deze formule met de formule van Planck $E = h \cdot f$ dan ontstaat $p = \dfrac{E}{c}$.

b De impuls bereken je met de gegeven formule.

$p = \frac{E}{c}$ met c = 2,9979·10⁸ m s⁻¹

E = 3,26 eV = 3,26 × 1,602·10⁻¹⁹
E = 5,222·10⁻¹⁹ J
$p = \frac{5{,}222 \cdot 10^{-19}}{2{,}9979 \cdot 10^{8}}$
p = 1,742·10⁻²⁷ kg m s⁻¹
Afgerond: 1,74·10⁻²⁷ kg m s⁻¹.

c De snelheid bereken je met de formule voor impuls.

$p = m \cdot v$.
$p = 1{,}74 \cdot 10^{-27}$ kg m s⁻¹ (Zie vraag 12b)
$m = m_e = 9{,}1091 \cdot 10^{-31}$ kg (Zie BINAS tabel 7)
$1{,}74 \cdot 10^{-27} = 9{,}1091 \cdot 10^{-31} \cdot v$
$v = 1{,}910 \cdot 10^{3}$ m s⁻¹
Afgerond $1{,}91 \cdot 10^{3}$ m s⁻¹.

Opgave 13

a Bij de botsing krijgt het elektron snelheid en dus kinetische energie. Vanwege de wet van behoud van energie is de energie van het teruggekaatste foton kleiner dan de energie van het foton dat op het elektron botst.
Voor de energie van een foton geldt $E_{\mathrm{f}} = \frac{h \cdot c}{\lambda}$. Omdat h en c constanten zijn, is de golflengte groter als de fotonenergie kleiner is.

b De golflengte van het bewegende elektron bereken je met de formule van DeBroglie.
De impuls van het elektron bereken je met de formule voor impuls.
De snelheid van het elektron bereken je met de formule voor de kinetische energie.
De kinetische energie bereken je met de wet van behoud van energie.
De fotonenergie bereken je met de formule voor de fotonenergie.

$$E_{\mathrm{f}} = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$
$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (Zie BINAS tabel 7)
$c = 2{,}9979 \cdot 10^{8}$ m s⁻¹ (Zie BINAS tabel 7)
λ_{voor} = 1,195 nm = $1{,}195 \cdot 10^{-9}$ m
$$E_{\mathrm{f,voor}} = \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34} \times 2{,}9979 \cdot 10^{8}}{1{,}195 \cdot 10^{-9}} = 1{,}66226 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{J}$$
λ_{na} = 1,200 nm = $1{,}200 \cdot 10^{-9}$ m
$$E_{\mathrm{f,na}} = \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34} \times 2{,}9979 \cdot 10^{8}}{1{,}200 \cdot 10^{-9}} = 1{,}65534 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{J}$$

$E_{\mathrm{f,voor}} = E_{\mathrm{f,na}} + E_{\mathrm{k}}$
$1{,}6622 \cdot 10^{-16}$ J = $1{,}6553 \cdot 10^{-16}$ J + E_{k}
$E_{\mathrm{k}} = 6{,}92 \cdot 10^{-19}$ J

$$E_{\mathrm{k}} = \tfrac{1}{2} m \cdot v^2$$
$m = m_e = 9{,}1093 \cdot 10^{-31}$ (Zie BINAS tabel 7)
$$6{,}92 \cdot 10^{-19} = \tfrac{1}{2} \times 9{,}1093 \cdot 10^{-31} \cdot v^2$$
$v = 1{,}232 \cdot 10^{6}$ m s⁻¹

$p = m \cdot v$
$p = 9{,}1093 \cdot 10^{-31} \times 1{,}232 \cdot 10^{6}$
$p = 1{,}122 \cdot 10^{-24}$ kg m s⁻¹

$$\lambda = \frac{6,6260 \cdot 10^{-34}}{1,122 \cdot 10^{-24}} = 5,901 \cdot 10^{-10}$$

Afgerond: $\lambda = 6 \cdot 10^{-10}$ m.

c De impuls van een foton bereken je met de formule van De Broglie.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$\lambda_{voor} = 1,195$ nm $= 1,195 \cdot 10^{-9}$ m
$h = 6,6260 \cdot 10^{-34}$ (Zie BINAS tabel 7)

$$1,195 \cdot 10^{-9} = \frac{6,6260 \cdot 10^{-34}}{p}$$

$p_{foton,\ voor} = 5,54476 \cdot 10^{-25}$ kg m s^{-1}

$\lambda_{na} = 1,200$ nm $= 1,200 \cdot 10^{-9}$ m
$h = 6,6260 \cdot 10^{-34}$ (Zie BINAS tabel 7)

$$1,200 \cdot 10^{-9} = \frac{6,6260 \cdot 10^{-34}}{p}$$

$p_{foton,\ na} = 5,52166 \cdot 10^{-25}$ kg m s^{-1}

$$\vec{p}_{\text{foton,voor}} = \vec{p}_{\text{foton,na}} + \vec{p}_{\text{elektron}}$$

Impuls is een vector. De richting van de snelheid van het teruggekaatste foton na de botsing is tegenovergesteld is aan die van het foton voor de botsing. Bij een frontale botsing is de richting van de snelheid van het elektron is gelijk aan die van het foton dat botst.
$p_{foton,\ voor} = 5,54476 \cdot 10^{-25}$ kg m s^{-1}
$p_{foton,\ na} = -5,52166 \cdot 10^{-25}$ kg m s^{-1}
$5,5447 \cdot 10^{-25} = -5,52166 \cdot 10^{-25} + p_{elektron}$
$p_{elektron} = 1,104 \cdot 10^{-24}$ kg m s^{-1}
Volgens de berekening in vraag 13b geldt $p_{elektron} = 1,12 \cdot 10^{-24}$ kg m s^{-1}.
Dus de wet van behoud van impuls geldt ook voor deze situatie.

Opgave 14

a De spanning tussen de kathode en de anode bereken je met de formule voor de elektrische energie.
Bij het versnellen van het elektron wordt elektrische energie omgezet in kinetische energie.
De elektrische energie volgt dus uit de kinetische energie.
De kinetische energie bereken je met de formule voor kinetische energie.

$$E_k = \tfrac{1}{2} m \cdot v^2$$

$m = m_e = 9,1093 \cdot 10^{-31}$ (Zie BINAS tabel 7)

$$E_k = \tfrac{1}{2} \times 9,1093 \cdot 10^{-31} \times \left(3,75 \cdot 10^6\right)^2$$

$E_k = 6,4049 \cdot 10^{-18}$ J

$E_{el} = q \cdot U$
$E_{el} = E_k = 6,4049 \cdot 10^{-18}$ J
$q = 1,6021 \cdot 10^{-19}$ C (Zie BINAS tabel 7)
$6,4049 \cdot 10^{-18}$ J $= 1,6021 \cdot 10^{-19} \times U$
$U = 39,978$ V
Afgerond: $U = 40,0$ V.

b De golflengte bereken je met de formule van De Broglie.
De impuls bereken je met de formule voor impuls.

$p = m \cdot v$
$m = m_e = 9,1093 \cdot 10^{-31}$ kg
$p = 9,1093 \cdot 10^{-31} \times 3,75 \cdot 10^6$

p = 3,4159·10^{-24} kg m s^{-1}

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

h = 6,6260·10^{-34} (Zie BINAS tabel 7)

$$\lambda = \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{3{,}4159 \cdot 10^{-24}}$$

λ = 1,9397·10^{-10} m
Afgerond: λ = 1,94·10^{-10} m.

c Is de spleet kleiner dan de golflengte van het licht, dan treedt voorbij de spleet buiging op. Het licht gaat voorbij de spleet alle richtingen uit. Dan is de plaats van de voorwerpen die de spleet begrenzen niet duidelijk.

d Aan het antwoord bij vraag 14b zie je dat de golflengte van de elektronen veel kleiner is dan die van licht. Nu treedt pas buiging op bij veel kleinere spleten en voorwerpen.

Opgave 15

a De formule leid je af met de formules voor de debrogliegolflengte; de formule voor de impuls en de formule voor de toename van de kinetische energie in een elektrische veld.

Voor de debrogliegolflengte geldt $\lambda = \frac{h}{p}$ met $p = m \cdot v$.
Invullen levert $\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$

$\Delta E_k = -q \cdot U$
Omdat de beginsnelheid 0 is en $q = -e$ ontstaat

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = e \cdot U$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m}}$$

Combineren met de formule voor de debrogliegolflengte levert:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U \cdot m^2}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot e \cdot U \cdot m}}$$

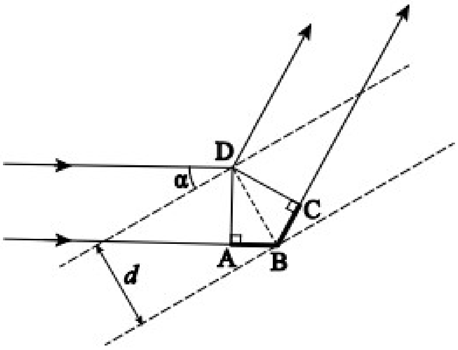
b $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot e \cdot U \cdot m}}$

h = 6,6260·10^{-34} (Zie BINAS tabel 7)
e = 1,6021·10^{-19} C (Zie BINAS tabel 7)
U = 5,0 kV = 5,0·10^3 V
$m = m_e$ = 9,1093 ·10^{-31} kg (Zie BINAS tabel 7)

$$\lambda = \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1{,}602110^{-19} \times \cdot 5{,}010^{5} \times \cdot 9{,}109310^{-31}}}$$

λ = 1,73·10^{-11} m
Afgerond: 1,7·10^{-11} m.

c De dikke zwarte lijnen in figuur 13.3 hierna geven het verschil in weglengte aan.



Figuur 13.3

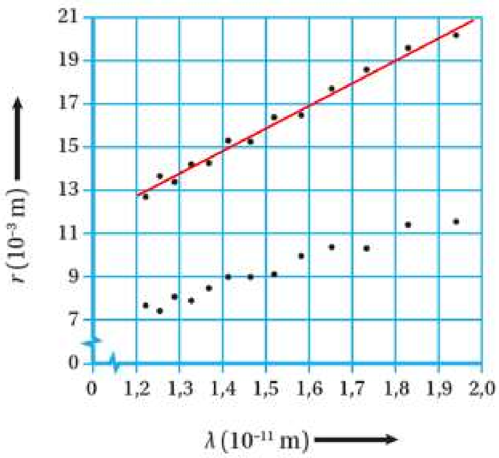
Het weglengteverschil Δx tussen de twee stralen is in figuur 13.3 aangegeven met dikke zwarte lijnen. Dus Δx =AB + BC waarbij AB = BC.
In rechthoekige driehoek ABD is de tophoek gelijk aan hoek α.
Er geldt dus $\sin\alpha = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{d}$. Hieruit volgt $d \cdot \sin\alpha = AB$.
Dus het weglengteverschil Δx = AB + BC = $2d \cdot \sin\alpha$.
Versterking treedt op als het faseverschil een geheel getal is oftewel $\Delta\varphi = n$.
Voor het faseverschil geldt $\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\lambda}$. Dus $n = \frac{\Delta x}{\lambda}$ met $\Delta x = 2d \cdot \sin\alpha$.
Hieruit volgt $2d \cdot \sin\alpha = n \cdot \lambda$.

d Ook voor elke ring geldt $2d \cdot \sin\alpha = n \cdot \lambda$.
Voor de buitenste ring geldt dat hoek α het grootst is.
Bij gelijkblijvende n en λ is de afstand tussen de lijnen dan het kleinst.
Dus hoort d_1 bij de buitenste ring.

e Bij lage versnelspanningen hoort volgens de gegeven formule een kleinere debroglie-golflengte. Bij een bepaalde versnelspanning (en n = 1) kan het gebeuren dat $\lambda > 2d$.
Uit $2d \cdot \sin\alpha = n \cdot \lambda$ volgt dan dat $\sin\alpha > 1$. Dat betekent dat er geen interferentie mogelijk is.

f In figuur 13.34 in het basisboek is de straal van de cirkel als functie van de golflengte uitgezet.
Er geldt: $r = \frac{2R}{d} \cdot n \cdot \lambda$ met n = 1
Dan is $\frac{2R}{d}$ de steilheid van de lijn.

Een zo nauwkeurig mogelijke bepaling gaat met behulp van de steilheid van de lijn door de meetpunten. Voor de buitenste ring is dat de bovenste set meetpunten. Zie figuur 13.4 hierna.



Figuur 13.4

Voor de steilheid geldt:
$\frac{\Delta r}{\Delta\lambda} = \frac{(21-13)\cdot 10^{-3}\cdot}{(1{,}98\cdot - 1{,}22)\cdot 10^{-1}} = 1{,}05 \cdot 10^{9}$
$\frac{2R}{d} = 1{,}05 \cdot 10^{9}$
Met R = 65 mm = $65 \cdot 10^{-3}$ m levert dit $d = 1{,}235 \cdot 10^{-10}$ m
Afgerond: $1{,}2 \cdot 10^{-10}$ m.

13.4 Opgesloten quantumdeeltjes

Opgave 16

a Voor de impuls geldt $\lambda = \frac{h}{p}$ waarbij λ voldoet aan $L = n \cdot \frac{1}{2}\lambda$.

Uit de tweede vergelijking volgt $\lambda = \frac{2L}{n}$.

Na invullen in de eerste vergelijking ontstaat $\frac{h}{p} = \frac{2L}{n}$.

Hieruit volgt $p = n \cdot \frac{h}{2L}$.

b Voor de kinetische energie geldt $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ en voor de impuls $p = m \cdot v$.

Uit de tweede vergelijking volgt $v = \frac{p}{m}$.

Na invullen in de eerste vergelijking ontstaat $E_k = \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}$.

Combineer je dit met $p = n \cdot \frac{h}{2L}$ dan ontstaat $E_k = \frac{1}{2m}\left(n \cdot \frac{h}{2L}\right)^2 = n^2 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2}$.

c Voor de grondtoestand geldt $n = 1$ en voor de tweede aangeslagen toestand $n = 3$.
Voor het energieverschil geldt dan $\Delta E = 3^2 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2} - 1^2 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2} = 8 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2} = \frac{h^2}{m \cdot L^2}$
Voor de energie van een foton geldt $E = h \cdot f$.
Dus $f = \frac{h}{m \cdot L^2}$.

Opgave 17

a De energieën bereken je met de formule voor de energie van een deeltje in een doos.

$$E_n = n^2 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2}$$

Je moet dus laten zien dat $\frac{h^2}{8mL^2} = 3{,}39 \text{ eV}$

$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (Zie BINAS tabel 7)
$L = 3{,}33 \cdot 10^{-10}$ m
$m = m_e = 9{,}1093 \cdot 10^{-31}$ kg (Zie BINAS tabel 7)

$$\frac{h^2}{8mL^2} = \frac{\left(6{,}6260 \cdot 10^{-34}\right)^2}{8 \times 9{,}1093 \cdot 10^{-31} \times \left(3{,}33 \cdot 10^{-10}\right)^2} = 5{,}4329 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \frac{5{,}4329 \cdot 10^{-19}}{1{,}6021 \cdot 10^{-19}} = 3{,}39 \text{ eV}$$

Dus $E_n = n^2 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2} = n^2 \cdot 3{,}39 \text{ eV}$

b Voor de energie van het foton bij overgang van $n = 2$ naar $n = 1$ geldt $E_2 - E_1$.

Voor het model van het deeltje in een doos geldt $E_n = n^2 \cdot 3{,}39$ eV.
$E_2 - E_1 = 2^2 \times 3{,}39 - 1^2 \times 3{,}39 = 10{,}2$ eV

Voor de energieën van het waterstofatoom geldt $E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}$.

$E_2 - E_1 = E_2 - E_1 = -\frac{13{,}6}{2^2} - \left(-\frac{13{,}6}{1^2}\right) = 10{,}2 \text{ eV}$

c De energieën van een deeltje in een doos bereken je met $E_n = n^2 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2}$.

De massa van een proton is 1,007 u en die van een elektron 5,485·10⁻⁴ u. De massa van een proton is dus ongeveer 1,8·10³ keer zo groot als de massa van een elektron. De afmeting L van de doos is echter 10⁴ keer zo klein.
De waarde van $8m \cdot L^2$ verandert voor het proton in de atoomkern met
$1{,}8\cdot 10^3 \times \left(10^{-4}\right)^2 = 1{,}8\cdot 10^{-5}$.

Omdat h een constante is verandert de waarde van $\frac{h^2}{8m\cdot L^2}$ met een factor $\frac{1}{1{,}8\cdot 10^{-5}} = 5{,}5\cdot 10^4$.
De energieovergang van het elektron bedraagt 10,2 eV.
Dus voor het proton is het energieverschil: 10,2 × 5,6·10⁵ = 5,6·10⁵ eV.
De orde van grootte is dus 10⁶ eV.

Opgave 18

a Volgens BINAS tabel 21A is bij de overgang van n = 2 naar n = 1 de fotonenergie 10,2 eV en van de hoogste n-waarde naar n = 1 maximaal 13,6 eV.
Volgens BINAS tabel 19A behoren deze fotonen tot uv-straling.

b De energieën van het waterstofatoom bereken je met $E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}$.
Voor overgangen van niveau n = 10 naar n = 2 geldt dus $\Delta E = -\frac{13{,}6}{10^2} - \left(-\frac{13{,}6}{2^2}\right)$
ΔE = 3,264 eV
Volgens BINAS tabel 19A valt deze lijn (net) buiten het zichtbare spectrum.
BINAS tabel 20 laat lijnen zien in het zichtbare gebied. Dus de lijn die hoort bij de overgang van n = 10 naar n = 2 kun je niet zien in een spectrum van tabel 20.

c Het maximale energieverschil dat realiseerbaar is bij overgangen binnen het waterstofatoom is 13,6 eV. Deze energie hoort bij fotonen van ultraviolette straling.
Voor röntgenstraling is een grotere fotonenergie nodig.

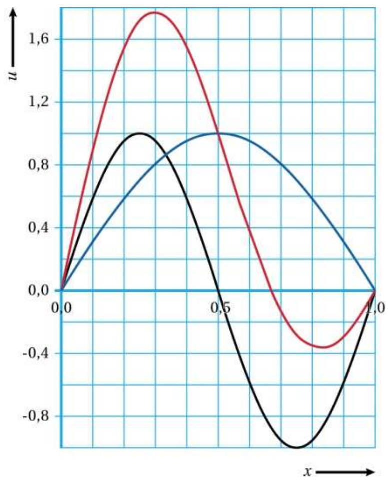
d Als het waterstofatoom een röntgenfoton absorbeert, ontvangt het elektron meer dan 13,6 eV aan energie. Het waterstofatoom raakt daardoor geïoniseerd. Het elektron is dan niet meer gebonden aan het waterstofatoom. De overblijvende energie wordt omgezet in kinetische energie van het vrije elektron.

e De ruimte waarin een kerndeeltje van deuterium kan bewegen is veel kleiner dan de ruimte waarin het elektron beweegt. Dat betekent dat uit $L = n\cdot\frac{1}{2}\lambda$ volgt dat de debrogliegolflengte voor een kerndeeltje kleiner is dan dat van het elektron. Daardoor is de impuls en daarmee de kinetische energie van het kerndeeltje groter dan van het elektron. De energie in de grondtoestand van het kerndeeltje is dus groter dan die van het elektron.

Opgave 19

a De kans om een deeltje ergens aan te treffen hangt af van de amplitude van de golf.
In figuur 13.42 in het basisboek is de uitwijking maximaal en dus voor elke plaats gelijk aan de amplitude.
De grafiek in figuur 13.42a is symmetrisch rond x = 0,5. Voor elke plaats links van x = 0,5 is rechts ervan een plaats met dezelfde amplitude aan te wijzen. Dus is de kans om het deeltje links aan te treffen van het midden even groot als rechts van het midden.
Ook in figuur 13.42b is de amplitude symmetrisch. De uitwijking rechts van het midden is weliswaar negatief, maar hierbij hoort links van het midden een positieve amplitude met dezelfde waarschijnlijkheidsverdeling. Ook nu is de kans om het deeltje links aan te treffen van het midden even groot als rechts van het midden.

b Zie de rode lijn in figuur 13.5 hierna. De blauwe en zwarte lijn zijn de oorspronkelijke grafieklijnen in figuur 13.42 van het basisboek.



Figuur 13.5

c Links van het midden zijn de uitwijkingen van de grondtoestand en de eerste aangeslagen toestand beide positief. Hier treedt constructieve interferentie op, en wordt de amplitude groter. Rechts van het midden zijn de uitwijkingen van de grondtoestand en de eerste aangeslagen toestand tegengesteld. Hierdoor wordt de amplitude rechts van het midden kleiner. Omdat de amplitude een maat is voor de waarschijnlijkheidsverdeling, is de kans om het deeltje links aan te treffen groter dan rechts.

d Voor de trillingstijd geldt $f = \frac{1}{T}$ waarbij de frequentie volgt uit de energie *E* = *h* · *f*.

Voor de energie van het deeltje in een doos geldt $E_\text{n} = n^2 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2}$.

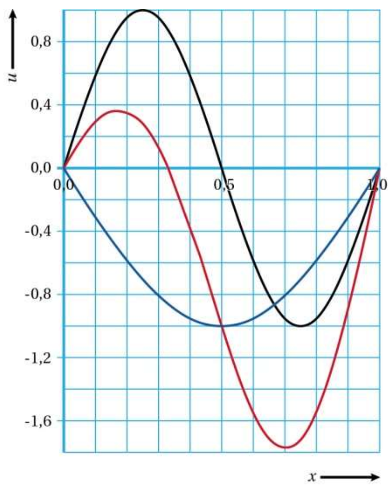
Als *n* twee keer zo groot wordt, wordt *E* dus 4 keer zo groot omdat *h* een constante is en de afmeting van het doosje en de massa van het deeltje niet veranderen. *E* is recht evenredig met *f*. Dus wordt *f* ook 4 keer zo groot. Volgens $f = \frac{1}{T}$ wordt *T* wordt 4 keer zo klein.

De trillingstijd voor de staande golf met *n* = 1 is dus 4 keer zo groot als die voor *n* = 2.

e Als de stand voor de golf met *n* = 1 een dal is in plaats van een berg is er een halve periode verstreken. De trillingstijd voor *n* = 2 is 4 keer zo klein, dus voor deze golf zijn er 2 perioden verstreken. Als er een geheel aantal perioden verstreken is, is de stand van de golf met *n* = 2 op tijdstip *t* identiek als die op *t* = 0.

f Zie figuur 13.6 hiernaast.

g Bij vraag 19c was de kans om het deeltje links van het midden aan te treffen groter dan rechts. Uit de grafiek van vraag 19f blijkt dat even later de kans groter is om het deeltje rechts van het midden aan te treffen. Hieruit blijkt dat deeltje van links naar rechts (en weer terug) beweegt. Dit komt overeen met een lopende golf.



Figuur 13.6

Opgave 20

a Uit figuur 13.43 van het basisboek blijkt dat de potentiële energie van het quantumdeeltje groter of gelijk aan nul is. Ook de kinetische energie is groter of gelijk aan nul. De enige manier waarop de totale energie nul kan zijn, is als zowel kinetische energie als potentiële energie tegelijk nul zijn.
Uit figuur 13.43 volgt dat $E_{pot} = 0$ als $u = 0$. Dus moet de golflengte dan ook nul zijn. Maar volgens $\lambda = \frac{h}{p}$ hoort bij $\lambda = 0$ een oneindig grote waarde voor de impuls p, dus een oneindig grote snelheid en dus een oneindig grote kinetische energie. De totale energie is dus nooit gelijk aan nul, maar altijd groter.

b Bij de aangeslagen toestanden is de golflengte kleiner. Omdat $\lambda = \frac{h}{p}$ zijn de impuls, de snelheid en de kinetische energie groter. Dus is de totale energie groter. Als de totale energie groter wordt, kan de bewegingsruimte van het deeltje toenemen. Hoe groot die toename is, hangt van het systeem af.
Bij het deeltje in een doos is de bewegingsruimte steeds hetzelfde. De potentiële energie is dus steeds hetzelfde.
Bij de harmonische trilling loopt de grafiek voor de potentiële energie steeds steiler. Dit is vergelijkbaar met figuur 13.43 van het basisboek. De toename van de bewegingsruimte is kleiner dan de toename van de potentiële energie.
Bij het waterstofatoom loopt de grafiek voor de potentiële energie steeds minder steil. Zie figuur 13.39 van het basisboek. De toename van de bewegingsruimte is groter dan de toename van de potentiële energie. Uiteindelijk kan het deeltje zelfs een willekeurig grote ruimte bestrijken.
Hoeveel golflengten er in de bewegingsruimte passen, hangt dus af van de mate waarin de potentiële energie toeneemt.

Opgave 21

a In de structuurformule zie je 11 dubbele bindingen en 10 enkelvoudige bindingen. Samen vormen ze 21 bindingen zoals de C⩵C in benzeen met een bindingslengte van $140 \cdot 10^{-12}$ m.
De totale lengte is dan $21 \times 140 \cdot 10^{-12} = 2{,}94 \cdot 10^{-9}$ m = 2,94 nm.
De koolstofketen heeft een zigzagstructuur. Dus de lengte in rechte lijn is kleiner (en blijkbaar 2,5 nm).

b Het energieverschil volgt uit $E_n = n^2 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2}$ met de waarden n = 12 en n -11.

$\Delta E = 12^2 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2} - 11^2 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2} = 23 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2}{}^2$

c Volgens BINAS tabel 19A heeft licht met een frequentie kleiner dan $6 \cdot 10^{14}$ blauwe en violette kleuren. Die kleuren worden geabsorbeerd en de andere kleuren worden weerkaatst.

d De lengte L bereken je met de gegeven formule.
Het energieverschil bereken je met de formule voor de energie van een foton.

$\Delta E = h \cdot f$
$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (Zie BINAS tabel 7)
$f = 6 \cdot 10^{14}$ Hz
$\Delta E = 6{,}6260 \cdot 10^{-34} \times 6 \cdot 10^{14}$
$\Delta E = 3{,}975 \cdot 10^{-19}$ J

$\Delta E = 23 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2}{}^2$
$m = 9{,}1093 \cdot 10^{-31}$ kg (Zie BINAS tabel 7)
$3{,}975 \cdot 10^{-19} = 23 \cdot \frac{(6{,}6260 \cdot 10^{-34})^2}{8 \times 9{,}1093 \cdot 10^{-31} \cdot L^2}$
$L = 1{,}86 \cdot 10^{-9}$ m
Afgerond: $2 \cdot 10^{-9}$ m.

13.5 Onbepaaldheidsrelatie

Opgave 22
De maximale verplaatsing van je fiets bereken je met de formule voor de snelheid.
De snelheid bereken je met de formule voor de impuls.
De impuls bereken je de onzekerheidsrelatie met het = teken in plaats van het ≥ teken.

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{h}{4\pi}$$

Δx = 1 dm = 0,1 m
$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (Zie BINAS tabel 7)

$$0{,}1 \cdot \Delta p = \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{4\pi}$$

$\Delta p = 5{,}2728 \cdot 10^{-34}$ kg m s^{-1}

$\Delta p = m \cdot \Delta v$
m = 12 kg
$5{,}2728 \cdot 10^{-34} = 12 \cdot \Delta v$
$\Delta v = 4{,}3940 \cdot 10^{-35}$ m s^{-1}

De fiets staat stil met v = 0. Uit $\Delta v = 4{,}3940 \cdot 10^{-35}$ m s^{-1} volgt dan dat de snelheid ligt dus tussen $-4{,}3940 \cdot 10^{-35}$ m s^{-1} en $+4{,}3940 \cdot 10^{-35}$ m s^{-1}.

$s = v \cdot t$
t = 6,5 h = 6,5 × 3600 = 23400 s
$s = 4{,}3940 \cdot 10^{-35} \times 23400 = 1{,}028 \cdot 10^{-30}$ m
De maximale verplaatsing is afgerond $1 \cdot 10^{-30}$ m.

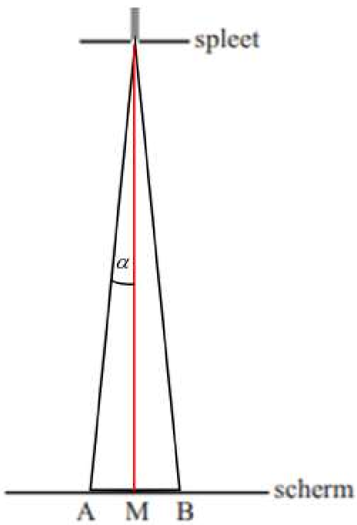
Opgave 23

a In punt A komt licht van de ene kant van de spleet en van de andere kant van de spleet. Er treedt een verschil in weglengte op, waardoor een faseverschil $\Delta\phi = 0{,}5$ optreedt. Dit geeft destructieve interferentie.

b De grootte van de tophoek bereken je met de halve tophoek. De halve tophoek α bereken je met een goniometrische formule met p_x en impuls p. De impuls p bereken je met de formule voor de debrogliegolflengte.

Zie figuur 13.7 hiernaast.
$p = \frac{h}{\lambda}$
$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ J s (Zie BINAS tabel 7)
$\lambda = 632{,}8$ nm $= 632{,}8 \cdot 10^{-9}$ m
$p = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{632{,}8 \cdot 10^{-9}}$
$p = 1{,}047 \cdot 10^{-27}$ kg m s^{-1}

$\tan\alpha = \frac{p_x}{p}$
$p_x = 1{,}33 \cdot 10^{-29}$ kg m s^{-1}
$\tan\alpha = \frac{1{,}33 \cdot 10^{-29}}{1{,}047 \cdot 10^{-27}}$
$\tan\alpha = 1{,}27 \cdot 10^{-2}$
$\alpha = 0{,}7277$ °
De tophoek is dus 2 × 0,7277° = 1,455°
Afgerond: 1,46 °.



Figuur 13,7

c De minimale waarde van Δx bereken je met de onbepaaldheidrelatie van Heisenberg.

$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{h}{4\pi}$
h = 6,6260·10^{-34} J s (Zie BINAS tabel 7)
Δp = 1,33·10^{-29} kg m s^{-1}
$$\Delta x \cdot 1{,}33 \cdot 10^{-29} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{4\pi}$$
Δx = 3,964·10^{-6} m
Afgerond: 3,96·10^{-6} m.

- De onbepaaldheid Δp voor de x-richting van de impuls ontstaat in de spleet. De waarde van Δx heeft dus betrekking op de breedte van die spleet en niet op de afstand AB.
- Een kleinere spleetbreedte komt overeen met een kleinere waarde Δx. Dit levert een grotere Δp, dus een grotere hoek α, dus een grotere afstand AB.

Opgave 24

a $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$
Voor fotonen geldt voor de debrogliegolflengte $\lambda = \frac{h}{p}$.
Hieruit volgt $p = \frac{h}{\lambda}$. Vermenigvuldig je teller en noemer met f dan ontstaat $p = \frac{h \cdot f}{\lambda \cdot f} = \frac{E}{\lambda \cdot f}$
Invullen in de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg levert $\Delta x \cdot \Delta \frac{E}{\lambda \cdot f} \geq \frac{h}{4\pi}$.
$$\Delta x \cdot \frac{\Delta E}{\Delta(\lambda \cdot f)} \geq \frac{h}{4\pi}$$
$$\Delta E \cdot \frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta\lambda \cdot \Delta f)} \geq \frac{h}{4\pi}$$
Δx komt overeen met $\Delta\lambda$ en $f = \frac{1}{t}$
Dus $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$

b Voor het elektron geldt: $E = m \cdot c^2$
$m = m_e$ = 9,1093·10^{-31} kg (Zie BINAS tabel 7)
c = 2,9978·10^{8} m s^{-1} (Zie BINAS tabel 7)
E = 9,1093·10^{-31} × (2,9978·10^{8})^2
E = 8,18635·10^{-14} J
Een zelfde hoeveelheid energie is nodig voor het positron.
Dus in totaal is nodig 2 x 8,18635·10^{-14} = 1,6·10^{-13} J.

c $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$
ΔE = 1,6·10^{-13} J
h = 6,6260·10^{-34} Js (Zie BINAS tabel 7)
$$1{,}6 \cdot 10^{-13} \cdot \Delta t \geq \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{4\pi}$$
De maximale waarde van Δt is dan 3,29·10^{-22} s
Afgerond: 3,3·10^{-22} s.

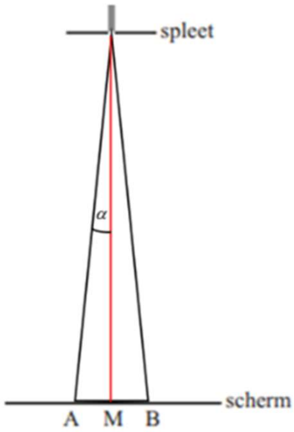
d $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$
Δt = 10^{-8} s
h = 6,6260·10^{-34} Js (Zie BINAS tabel 7)
$$\Delta E \cdot 10^{-8}\Delta t \geq \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{4\pi}$$
ΔE = 5,2728·10^{-27} J

$$E_f = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$
h = 6,6260·10^{-34} Js (Zie BINAS tabel 7)
c = 2,9978·10^{8} m/s (Zie BINAS tabel 7)
λ = 656 nm = 656·10^{-9} m

$$E_f = \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34} \times 2{,}9978 \cdot 10^{8}}{656 \cdot 10^{-9}}$$
$E_f = 3{,}027 \cdot 10^{-19}$ J

De onbepaaldheid in energie ($\Delta E = 5{,}2728 \cdot 10^{-27}$ J) is verwaarloosbaar ten opzichte van de fotonenergie ($E_f = 3{,}027 \cdot 10^{-19}$ J).
Dus er is geen meetbare verandering in de golflengte.

Opgave 25
Zie figuur 13.8 hiernaast.
De breedte van de middelste lichtvlek op het scherm bereken je met de helft van die breedte.
De helft van de breedte bereken je met een goniometrische formule met hoek α en de afstand tussen spleet en scherm.
Hoek α bereken je met een goniometrische formule met horizontale component p_x en impuls p.
De horizontale component p_x is gelijk aan de onbepaaldheid Δp.
De onbepaaldheid Δp bereken je met de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg.
De impuls p bereken he met de formule voor de impuls.
De snelheid bereken je met formule voor de kinetische energie.
De kinetische energie bereken je met de formule voor de toenamen van de kinetische energie in een elektrisch veld.



Figuur 13.8

$\Delta E_k = -q \cdot U$
Omdat de beginsnelheid 0 is en $q = -e$ ontstaat
$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = e \cdot U$
$m = m_e = 9{,}1093 \cdot 10^{-31}$ kg (Zie BINAS tabel 7)
$e = 1{,}6021 \cdot 10^{-19}$ C (Zie BINAS tabel 7)
$U = 10$ V
$$\frac{1}{2} \times 9{,}1093 \cdot 10^{-3} \cdot v^2 = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \times 10$$
$v = 1{,}875 \cdot 10^{6}$ m s^{-1}

$p = m \cdot v$
$p = 9{,}1093 \cdot 10^{-31} \times 1{,}875 \cdot 10^{6}$
$p = 1{,}708 \cdot 10^{-24}$ kg m s^{-1}

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{h}{4\pi}$$
$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ J s (Zie BINAS tabel 7)
$\Delta x = 1{,}2 \cdot 10^{-8}$ m
$$1{,}2 \cdot 10^{-8} \cdot \Delta p = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-3}}{4\pi}$$
$\Delta p = 4{,}394 \cdot 10^{-27}$ kg m s^{-1} = p_x

$$\sin \alpha = \frac{p_x}{p}$$
$$\sin \alpha = \frac{4{,}394 \cdot 10^{-27}}{1{,}708 \cdot 10^{-24}}$$
$\sin \alpha = 2{,}572 \cdot 10^{-3}$
$\alpha = 1{,}473 \cdot 10^{-1}$

$$\tan \alpha = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{OM}}$$

OM = 3,0 m

$\tan 1{,}473 \cdot 10^{-1} = \dfrac{\text{BM}}{3{,}0}$

BM = $7{,}717 \cdot 10^{-3}$ m
AB = 2 x $7{,}717 \cdot 10^{-3}$
AB = $1{,}54 \cdot 10^{-2}$ m
Afgerond: $1{,}54 \cdot 10^{-2}$ m = 1,5 cm

Opgave 26

a De minimale impuls bereken je met de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg.

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{h}{4\pi}$$

$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ J s (Zie BINAS tabel 7)
Δx = 10 fm = $10 \cdot 10^{-15}$ m

$$10 \cdot 10^{-15} \cdot \Delta p = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{4\pi}$$

$\Delta p = 5{,}272 \cdot 10^{-21}$ kg m s^{-1}
Afgerond: $5{,}3 \cdot 10^{-21}$ kg m s^{-1}

b De minimale kinetische energie bereken je met de formule voor de kinetische energie.
De minimale snelheid bereken je met de formule voor de impuls.

$p = m \cdot v$
$p = 5{,}3 \cdot 10^{-21}$ kg m s^{-1}
$m = m_n = 1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ kg (Zie BINAS tabel 7)
$5{,}3 \cdot 10^{-21} = 1{,}6749 \cdot 10^{-27} \cdot v$
$v = 3{,}164 \cdot 10^{6}$ m s^{-1}

$$E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2} m \cdot v^2$$
$$E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2} \times 1{,}6794 \cdot 10^{-27} \times (3{,}164 \cdot 10^{6})^2$$

$E_\mathrm{k} = 8{,}385.10^{-15}$ J

$$E_\mathrm{k} = \frac{8{,}385 \cdot 10^{-15}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}}\ \text{eV}$$

$E_\mathrm{k} = 5{,}234 \cdot 10^{4}$ eV
Afgerond: 52 keV.

c De totale energie moet negatief zijn. Dus de potentiele energie is kleiner dan −52 keV.

Opgave 27

a Bij x = 0 zijn de golven in tegenfase. Voor het faseverschil tussen x = 0 en x = 11 cm geldt

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\lambda}.$$

Met λ_1 = 1,0 cm = $1{,}0 \cdot 10^{-2}$ m volgt $\Delta\varphi$ = 11.
Met λ_2 = 1,1 cm = $1{,}1 \cdot 10^{-2}$ m volgt $\Delta\varphi$ = 10.
Het faseverschil tussen de twee golven is 1. Dat is dus de eerste keer dat de golven weer in dezelfde fase zijn als op x = 0. De golven zijn bij x = 11 cm dus weer in tegenfase en dan is de amplitude van de resulterende golf weer 0.

b Bij x = 0 zijn de golven in tegenfase. Voor het faseverschil tussen x = 0 en x = 5,5 cm geldt

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\lambda}$$

Met λ_1 = 1,0 cm = $1{,}0 \cdot 10^{-2}$ m volgt $\Delta\varphi$ = 5,5.
Met λ_2 = 1,1 cm = $1{,}1 \cdot 10^{-2}$ m volgt $\Delta\varphi$ = 5,0.
Het faseverschil tussen de twee golven is 0,5. Dat is dus de eerste keer dat de golven in fase zijn. De golven zijn bij x = 5,5 cm dus in fase. Ze versterken elkaar en de amplitude is maximaal.

c De golflengte van de eerste golf is 1,0 cm, die van de tweede golf 1,5 cm. De resulterende golf vertoont een herhalend patroon om de 3,0 cm. Dit komt omdat 3,0 cm het kleinste gehele veelvoud is van zowel 1,0 cm als 1,5 cm want 3,0 cm = 3 × 1,0 cm = 2 × 1,5 cm.

d De golflengte van de eerste golf is 1,0 cm, die van de tweede golf 1,05 cm. De resulterende golf vertoont een herhalend patroon om de 21,0 cm. Dit komt omdat 21,0 cm het kleinste gehele veelvoud is van zowel 1,0 cm als 1,05 cm want 21,0 cm = 21 × 1,0 cm = 20 × 1,05 cm.

e Voor de impuls geldt $\lambda = \frac{h}{p}$. Als twee waarden van λ dichtbij elkaar liggen, liggen de bijbehorende waarden van p ook dicht bij elkaar.

f Als het verschil in impuls klein is, is de onbepaaldheid in impuls dus klein. Volgens de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg is de onbepaaldheid in plaats groot.

13.6 Tunneleffect

Opgave 28

a De energie van het deeltje in een doos bereken je met de formule voor de energie van een deeltje in een doos.

$$E_\mathrm{n} = n^2 \cdot \frac{h^2}{8m \cdot L^2}$$

$n = 1$
$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (Zie BINAS tabel 7)
$m = m_e = 9{,}1093 \cdot 10^{-31}$ kg (Zie BINAS tabel 7)
. $L = 5{,}0 \cdot 10^{-9}$ m

$$E_1 = 1^2 \cdot \frac{\left(6{,}6260 \cdot 10^{-34}\right)^2}{8 \times 9{,}1093 \cdot 10^{-31} \times \left(5{,}0 \cdot 10^{-9}\right)^2}$$

$E_1 = 2{,}4098 \cdot 10^{-21}$ J

Dit komt overeen met $\frac{2{,}4098 \cdot 10^{-21}}{1{,}6021 \cdot 10^{-19}} = 0{,}01504$ eV

Afgerond: 15 meV.

b De snelheid bereken je met de formule voor de impuls.
De impuls bereken je met de formule van De Broglie.
De golflengte bereken je met de voorwaarde voor een staande golf met twee vaste uiteinden.

$$L = n \cdot \tfrac{1}{2}\lambda$$

$L = 5{,}0 \cdot 10^{-9}$ m
$n = 1$

$$5{,}0 \cdot 10^{-9} = 1 \times \tfrac{1}{2}\lambda$$

$\lambda = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$ m

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (Zie BINAS tabel 7)

$$1{,}0 \cdot 10^{-10} = \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{p}$$

$p = 6{,}6260 \cdot 10^{-26}$ kg m s^{-1}

$p = m \cdot v$
$m = m_e = 9{,}1093 \cdot 10^{-31}$ kg (Zie BINAS tabel 7)
$6{,}6260 \cdot 10^{-26} = 9{,}1093 \cdot 10^{-31} \cdot v$
$v = 7{,}2738 \cdot 10^{4}$ m s^{-1}
Afgerond: $7{,}3 \cdot 10^{4}$ m s^{-1}.

c Hoe vaak het elektron in een milliseconde tegen de wanden botst, bereken je met de tijd die het kost om het doosje over te steken.
De oversteektijd bereken je met de formule voor de snelheid.

$s = v \cdot t$
$s = 5{,}0 \cdot 10^{-9}$ m
$v = 7{,}3 \cdot 10^{4}$ m s^{-1}
$5{,}0 \cdot 10^{-9} = 7{,}3 \cdot 10^{4} \cdot t$
$t = 6{,}849 \cdot 10^{-14}$ s
Het elektron steekt dus elke $6{,}849 \cdot 10^{-14}$ s over.

Dan zijn er $\frac{1}{6{,}849 \cdot 10^{-14}} = 1{,}46 \cdot 10^{13}$ oversteken per seconde, oftewel 15 miljard oversteken per milliseconde. Bij elke oversteek is er een botsing met een uiteinde.

Met een kans van 1 op 1 miljard is de kans zeer klein dat het deeltje na 15 miljard oversteken nog in het doosje zit.

d Bij een aangeslagen toestand hoort een grotere energie. Een deeltje dat tussen de wanden van een doos beweegt, heeft alleen kinetische energie. Dus is de kinetische energie in een aangeslagen toestand groter. Dit betekent dat de snelheid in een aangeslagen toestand groter is.

e In een aangeslagen toestand is de energie groter dan 15 meV. De energie van de barrière blijft 15 eV. Het verschil tussen de energie in de aangeslagen toestand en de hoogte van de barrière is dus kleiner. De kans om te tunnelen is dan groter.

f Als de barrières verder uit elkaar staan, is de tijd die een elektron nodig heeft om over te steken ook groter. Er zijn dus minder botsingen met de wand.

Bovendien geldt $E_n = n^2 \cdot \dfrac{h^2}{8m \cdot L^2}$. Omdat *h* en *m* dezelfde waarden houden, is de energie in de grondtoestand omgekeerd evenredig met L^2. Hoe groter het doosje, des te kleiner is de energie van het deeltje. Het verschil tussen de energie van het systeem en de hoogte van de barrière is dan groter. De kans om uit het doosje te tunnelen is dan kleiner.

Opgave 29

a $\left[\dfrac{h}{\sqrt{2m \cdot \Delta E}}\right] = \dfrac{[h]}{\sqrt{[m] \cdot [E]}}$

$[h]$ = J s

$[m]$ = kg

$[E]$ = J

$$\left[\dfrac{h}{\sqrt{2m \cdot \Delta E}}\right] = \dfrac{\mathrm{J \cdot s}}{\sqrt{\mathrm{kg \cdot J}}} = \mathrm{s} \cdot \sqrt{\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}}$$

Verder geldt J = N m = (kg m s^{-2}) · m = kg m^2 s^{-2}.

Dus $\left[\dfrac{h}{\sqrt{2m\Delta E}}\right] = \mathrm{s} \cdot \sqrt{\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}} = \mathrm{s} \cdot \sqrt{\dfrac{\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}}{\mathrm{kg}}} = \mathrm{s \cdot m\,s^{-1}} = \mathrm{m}$.

Dit is inderdaad de eenheid van lengte.

b De kans om te tunnelen wordt gegeven door de intensiteit voorbij de barrière.

Als de barrière hoger is, is Δ*E* groter. Dan is $d_{\frac{1}{2}}$ kleiner, en $\dfrac{x}{d_{\frac{1}{2}}}$ groter. De intensiteit *I* is dan kleiner.

Als de barrière breder is, is *x* groter, en $\dfrac{x}{d_{\frac{1}{2}}}$ groter. De intensiteit *I* is dan kleiner.

Als de massa van het deeltje *m* groter is, is volgens de gegeven formule $d_{\frac{1}{2}}$ kleiner, en $\dfrac{x}{d_{\frac{1}{2}}}$ groter. De intensiteit *I* is dan kleiner.

c De halveringsdikte bereken je met de gegeven formule.

$$d_{\frac{1}{2}} = 0{,}0552 \cdot \dfrac{h}{\sqrt{2m \cdot \Delta E}}$$

h = 6,6260·10^{-34} (Zie BINAS tabel 7)

$m = m_e$ = 9,1093·10^{-31} kg (Zie BINAS tabel 7)

Δ*E* = 10 eV = 10 × 1,6021·10^{-19} = 1,6021·10^{-18} J

$$d_{\frac{1}{2}} = 0{,}0552 \cdot \dfrac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9{,}1093 \cdot 10^{-31} \times 1{,}6021 \cdot 10^{-18}}}$$

$d_{\frac{1}{2}} = 2{,}141 \cdot 10^{-11}$ m 2,1408·10^{-11} m

Afgerond: 2,1·10^{-11} m.

Opgave 30

a Een deeltje met een energie van 10 MeV bevindt zich volgens figuur 13.59 in het basisboek buiten de barrière bij $x < 1 \cdot 10^{-10}$ m en bij $x > 4 \cdot 10^{-10}$ m. Zo'n deeltje moet dus over een afstand van $3 \cdot 10^{-10}$ m tunnelen.
Een deeltje met een energie van 5 MeV bevindt zich volgens figuur 13.59 buiten de barrière bij $x < 1 \cdot 10^{-10}$ m en bij $x > 8{,}5 \cdot 10^{-10}$ m. Het deeltje moet dus over een afstand van $7{,}5 \cdot 10^{-10}$ m tunnelen.
Dus een deeltje van 5 MeV moet over een veel grotere afstand tunnelen.

b De kans om het deeltje achter een barrière met dikte d aan te treffen is een miljard keer zo klein als vóór de barrière. Er geldt dus $I = I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{d_{\frac{1}{2}}}} = I_0 \cdot 10^{-9}$.

Voor een barrière met dikte 2d geldt dan $I = I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2d}{d_{\frac{1}{2}}}} = I_0 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{d_{\frac{1}{2}}}}\right)^2 = I_0 \cdot \left(10^{-9}\right)^2 = I_0 \cdot 10^{-18}$.

Dit geeft een kans van 1 op 10^{18}. Dus een miljard keer zo klein als bij dikte d.

Opgave 31

a De hoogte van de barrière in deze situatie wordt bepaald door de Coulombkracht:
$F_{el} = f\,\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$, dus door het product $Q_1 \cdot Q_2$.
Bij alfaverval van U-238 geldt $Q_1 = 92e$ en $Q_2 = 2e$, en dus $Q_1 \cdot Q_2 = 92 \times 2 = 184e^2$.
Bij kernfusie van protonen geldt $Q_1 = e$, $Q_2 = e$, en dus $Q_1 \cdot Q_2 = e^2$.
Bij kernfusie is de barrière dus meer dan een factor 100 lager dan bij alfaverval.
Enkele tientallen MeV bij alfaverval wordt dus enkele tienden van MeV voor kernfusie.

b Voor de gemiddelde energie van een deeltje in de zon geldt $E_{gem} = \frac{3}{2} k_B \cdot T$ met $T = 1{,}55 \cdot 10^7$ K en $k_B = 1{,}38066 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1}.

$E_{gem} = \frac{3}{2} \times 1{,}3806488 \cdot 10^{-23} \times 1{,}55 \cdot 10^7 = 3{,}2100 \cdot 10^{-16}$ J

$3{,}2100 \cdot 10^{-16}$ J komt overeen met $\frac{3{,}2100 \cdot 10^{-16}}{1{,}6021 \cdot 10^{-19}} = 2{,}00 \cdot 10^3$ eV $= 2{,}00 \cdot 10^{-3}$ MeV.
De energiebarrière is enkele tienden MeV. De gemiddelde energie van een deeltje in de zon is dus een factor 100 te klein voor kernfusie.

c Als de temperatuur in een ster hoger is, is ook de energie van de deeltjes groter. Daardoor is het energieverschil met de hoogte van de barrière kleiner, en neemt de kans op tunnelen toe. Hierdoor gaat het kernfusieproces veel sneller dan in een minder hete ster.

Opgave 32

a Als de naald naar een plaats boven een atoom gaat, komt de naald dichter bij het oppervlak. Hierdoor neemt de tunnelstroom toe. De tunnelstroom moet echter constant blijven, dat betekent dat de naald omhoog moet gaan om ervoor te zorgen dat de afstand d tussen naald en oppervlak toch niet verandert.

b Bij 1,5 nm is de afstand toegenomen met 5 × 0,1 nm. Dan wordt I_t dus met 10^5 kleiner.
Dus $I_t = 10^{-5} \times 2{,}0$ nA $= 10^{-5} \times 2{,}0 \cdot 10^{-9} = 2 \cdot 10^{-14}$ A.

c De STM meet zeer kleine veranderingen in hoogte van een oppervlak. Die veranderingen mogen niet het gevolg zijn willekeurige trillingen.

d De debrogliegolflengte bereken je met de gegeven formule.
$\lambda = \frac{7{,}45 \cdot 10^{-8}}{T}$
$T = 20^\circ = 20 + 273 = 293$ K
$\lambda = \frac{7{,}45 \cdot 10^{-8}}{293}$

$\lambda = 4{,}35 \cdot 10^{-9}$ m
Afgerond: $4{,}4 \cdot 10^{-9}$ m.

e Als *d* veel groter is dan *λ* is de waarschijnlijkheid om elektronen in de naald aan te treffen nul: het is dan onmogelijk voor de elektronen om de oversteek te maken. Er is dan geen tunneleffect.

13.7 Klassieke theorie of quantumtheorie

Opgave 33

a De golflengte van De Broglie bereken je met de formule van De Broglie.
De impuls bereken je met de formule voor de impuls.
De snelheid bereken je met de formule voor kinetische energie.
De kinetische energie volgt uit de gemiddelde energie.
De gemiddelde energie bereken je met de gegeven formule.

$E_{gem} = \frac{3}{2} k_B \cdot T$
k_B = 1,38066·10^{-23} J K^{-1}
T = 293 K
$E_{gem} = \frac{3}{2} \times 1{,}38066 \cdot 10^{-23} \times 293$
E_{gem} = 6,0680·10^{-21} J

$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$
$E_k = E_{gem}$ = 6,0680·10^{-21}
$m = m_e$ = 9,1093·10^{-31} kg (Zie BINAS tabel 7)
$6{,}0680 \cdot 10^{-21} = \frac{1}{2} \times 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot v^2$
v = 1,15423·10^5 m s^{-1}

$p = m \cdot v$
p = 9,1093·10^{-31} × 1,15423·10^5 = 1,0512·10^{-25} kg m s^{-1}

$\lambda = \frac{h}{p}$
h = 6,6260·10^{-34} (Zie BINAS tabel 7)

$\lambda = \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{1{,}0512 \cdot 10^{-25}}$
λ = 6,3018·10^{-9} m
Afgerond: 6,3 nm.

b Voor protonen is de gemiddelde energie bij kamertemperatuur dezelfde.
$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$
$E_k = E_{gem}$ = 6,0680·10^{-21} (Zie vraag 27a)
m = 1,6726·10^{-27} kg (Zie BINAS tabel 7)
$6{,}0680 \cdot 10^{-21} = \frac{1}{2} \times 1{,}6726 \cdot 10^{-27} \cdot v^2$
v = 2,6935·10^3 m s^{-1}

$p = m \cdot v$
p = 1,6726·10^{-27} × 2,6935·10^3 = 4,5054·10^{-24} kg m s^{-1}

$\lambda = \frac{h}{p}$
h = 6,6260·10^{-34} (Zie BINAS tabel 7)

$\lambda = \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{4{,}5054 \cdot 10^{-24}}$
λ = 1,470·10^{-10} m
Afgerond: 0,15 nm.

c De golflengte van een elektron is groter dan de afstand tussen de atomen. Eén elektron overlapt dus met meerdere atomen. Er zijn dus quantumeffecten te verwachten.

De golflengte van één proton is kleiner dan de afstand tussen de atomen. De interactie van het proton blijft dus binnen de afstand van één atoom.

Opgave 34

a Voor de impuls geldt $p = m \cdot v$ waarbij je de snelheid afleidt uit de formule van de middelpuntzoekende kracht $F_{\text{mpz}} = \frac{m \cdot v^2}{r}$ met F_{mpz} = $F = \frac{k}{r^2}$.

Dus $\frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{k}{r^2}$. Hieruit volgt $v^2 = \frac{k}{mr}$ en $v = \sqrt{\frac{k}{mr}}$.

$$p = m \cdot v = m \cdot \sqrt{\frac{k}{m \cdot r}} = \sqrt{\frac{k \cdot m^2}{m \cdot r}} = \sqrt{\frac{k \cdot m}{r}}$$

b De golflengte bereken je met de formule van De Broglie.
De impuls bereken je met de gegeven formule voor impuls.
De constante k bereken je met de gegeven formule voor k.

$k = f \cdot e^2$
$f = 8{,}987551 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\,\text{C}^{-2}$ (Zie BINAS tabel 7)
$e = 1{,}6021 \cdot 10^{-19}$ C (Zie BINAS tabel 7)
$k = 8{,}987551 \cdot 10^9 \times (1{,}6021 \cdot 10^{-19})^2 = 2{,}3068 \cdot 10^{-28}\ \text{N m}^2$

$$p = \sqrt{\frac{k \cdot m}{r}}$$

$m = m_e = 9{,}1093 \cdot 10^{-31}$ kg (Zie BINAS tabel 7)
$r = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m

$$p = \sqrt{\frac{2{,}3068 \cdot 10^{-28} \times 9{,}1091 \cdot 10^{-31}}{5{,}29 \cdot 10^{-11}}}$$

$p = 1{,}993 \cdot 10^{-24}\ \text{kg m s}^{-1}$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (Zie BINAS tabel 7)

$$\lambda = \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-34}}{1{,}993 \cdot 10^{-24}}$$

$\lambda = 3{,}325 \cdot 10^{-10}$ m
Afgerond: $3{,}33 \cdot 10^{-10}$ m.

c De golflengte bereken je met de formule van De Broglie
De impuls bereken je met de gegeven formule voor impuls.
De constante k bereken je met de gegeven formule voor k.

$k = G \cdot M_{\text{aarde}} \cdot M_{\text{maan}}$
$G = 6{,}67384 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\,\text{kg}^2$ (Zie BINAS tabel 7)
$M_{\text{aarde}} = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg (Zie BINAS tabel 31)
$M_{\text{maan}} = 0{,}0735 \cdot 10^{24}$ kg (Zie BINAS tabel 31)
$k = 6{,}67384 \cdot 10^{-11} \times 5{,}972 \cdot 10^{24} \times 0{,}0735 \cdot 10^{24}$
$k = 2{,}92942 \cdot 10^{37}\ \text{N m}^2$

$$p = \sqrt{\frac{k \cdot m}{r}}$$

$m = M_{\text{maan}} = 0{,}0735 \cdot 10^{24}$ kg (Zie BINAS tabel 31)
$r = 3{,}84 \cdot 10^8$ m

$$p = \sqrt{\frac{k \cdot m}{r}} = \sqrt{\frac{2{,}92940 \cdot 10^{37} \times 0{,}0735 \cdot 10^{24}}{3{,}84 \cdot 10^8}} =$$

$p = 7{,}4880 \cdot 10^{25}\ \text{kg m s}^{-1}$

$\lambda = \frac{h}{p}$

h = 6,6260·10^{-34} (Zie BINAS tabel 7)

$\lambda = \frac{6,6260 \cdot 10^{-34}}{7,4880 \cdot 10^{25}}$

λ = 8,8487·10^{-60} m

Afgerond 8,85·10^{-60} m.

d De omtrek van een cirkel bereken je met de formule voor de omtrek.

$O = 2\pi r$

Voor het elektron geldt:

$O = 2\pi \times 5{,}29\cdot10^{-11} = 3{,}32\cdot10^{-10}$ m

$n = \frac{O}{\lambda}$

λ = 3,33·10^{-10} m

$n = \frac{3,32 \cdot 10^{-10}}{3,33 \cdot 10^{-10}} = 0,997$

Afgerond: n = 1 (want n is altijd een geheel getal).

n = 1 geeft de grondtoestand aan.

Voor de maan geldt:

$O = 2\pi \times 3{,}84\cdot10^{8} = 2{,}413\cdot10^{9}$ m

$n = \frac{O}{\lambda}$

λ = 8,55·10^{-60} m

$n = \frac{2,413 \cdot 10^{9}}{8,55 \cdot 10^{-60}} = 2,726 \cdot 10^{68}$

Afgerond: n = 2,73·10^{68}.

n is heel groot. Dus dit is een zeer hoge aangeslagen toestand.

e Als n heel groot wordt, wordt het energieverschil tussen opeenvolgende energieniveaus steeds kleiner. Voor de maan is n zeer groot. Dus de maan gaat over naar een ander energieniveau door een zeer kleine hoeveelheid energie op te nemen of af te staan.

Opgave 35

a De veerconstante bereken je met de formule voor de trillingstijd van een massa-veersysteem. De trillingstijd bereken je met de formule voor de frequentie.

$f = \frac{1}{T}$ met f = 6,92·10^{13} Hz

$f = \frac{1}{6{,}92\cdot10^{13}}$

T = 1,445·10^{-14} s

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$ met m = 1,6726·10^{-27} kg

$1{,}445 \cdot 10^{-14} = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}6726\cdot10^{-27}}{C}}$

C = 3,162·10^{2} N m^{-1}

Afgerond: 3,16·10^{2} N m^{-1}.

b De snelheid is maximaal voor u = 0 en minimaal voor u = +A en u = −A, want daar bevindt het deeltje zich de kortste respectievelijk de langste tijd. Dus daar is de kans om het deeltje aan te treffen het kleinst respectievelijk het grootst.

Als de energie $E_t = \frac{1}{2}C \cdot A^2$ toeneemt, wordt *A* en dus de breedte van de grafiek groter. Omdat de oppervlakte onder de grafiek gelijk moet blijven (totale oppervlakte is 1), zal de kromme *P*(*u*) dalen.

c Bij het quantummodel van een eendimensionale energieput liggen de energieniveaus voor grotere *n* steeds verder uit elkaar.
Bij het quantummodel van een vrij waterstofatoom liggen de energieniveaus voor grotere *n* steeds dichter bij elkaar.
Dit komt niet overeen met de energieniveaus voor HI, die op gelijke afstanden van elkaar liggen.

d Als het H-atoom stil zou staan, zou dat betekenen: $\Delta p = 0$ en $\Delta x = 0$.
In dat geval zou $\Delta x \cdot \Delta p = 0$, wat in strijd is met de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg.

Opgave 36

a Het percentage bereken je met de lichtsnelheid en de snelheid van het alfadeeltje.
De snelheid van het alfadeeltje bereken je met de formule van de kinetische energie.
De kinetische energie vind je in BINAS bij het isotoop met de grootste halveringstijd.

Volgens BINAS tabel 25A is de kinetische energie van het α-deeltje dat vrijkomt bij verval van Th-232 gelijk aan 3,98 MeV = $3{,}98 \cdot 10^6$ eV
$E_k = 3{,}98 \cdot 10^6 \times 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 6{,}375 \cdot 10^{-13}$ J

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

m = massa van α-deeltje = ${}^4_2\mathrm{He}$ = 4,002 *u* = $4{,}002 \times 1{,}660 \cdot 10^{-27} = 6{,}643 \cdot 10^{-27}$ kg

$$6{,}375 \cdot 10^{-13} = \frac{1}{2} \times 6{,}643 \cdot 10^{-27} \cdot v^2$$

$v = 1{,}385 \cdot 10^7$ m s^{-1}
$c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ m s^{-1}
Dus het percentage van de lichtsnelheid is $\frac{1{,}385 \cdot 10^7}{2{,}9979 \cdot 10^8} \cdot 100\%$.
Percentage is 4,619%
Afgerond: 4,62%.

b Er geldt $\rho = \frac{m}{V}$
m = *A* u. Hierin is *A* het massagetal en *u* de atomaire massaeenheid.
$V = V_{\text{bol}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ met $R = R_o \cdot A^{\frac{1}{3}}$

$$\rho = \frac{A \cdot u}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{A \cdot u}{\frac{4}{3}\pi {R_o}^3 \cdot A} = \frac{u}{\frac{4}{3}\pi {R_o}^3}$$

c 1 Een α-deeltje met snelheid v_α legt tussen de kernwanden een afstand van 2*R* af. De tijdsduur is dan gelijk aan $\frac{2R}{v_\alpha}$. Het aantal α-deeltjes dat de wand per seconde treft is dan $\frac{1}{t} = \frac{1}{\frac{2R}{v_\alpha}} = \frac{v_\alpha}{2R}$.

2 Het aantal α-deeltjes dat per seconde aan een kern ontsnapt is de activiteit *A*.
Hiervoor geldt $A = \frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}} \cdot N$. Met *N* = 1 volgt dat $\frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}}$ het aantal α-deeltjes is dat per seconde aan een kern ontsnapt.

3 Dit is gelijk aan de tunnelkans per α-deeltje maal het aantal α-deeltjes dat de wand per seconde treft: $K = \frac{\frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}}}{\frac{v_\alpha}{2R}} = \frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2R}{v_\alpha}$.

d Bij verval van Po-212 ontstaat als dochterkern Pb-208.
$K = \frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2R}{v_\alpha}$ met $R = R_o \cdot A^{\frac{1}{3}}$
$t_{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 10^{-7}$ (Zie BINAS tabel 25 bij Po-212)
$R_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-15}$ m
A = 207,97 u (Zie BINAS tabel 25 bij Pb-208)

$K = \frac{\ln 2}{3 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{2 \times 1{,}2 \cdot 10^{-15} \times 207{,}97^{\frac{1}{3}}}{0{,}069 \times 2{,}997 \cdot 10^{8}}$

$K = 1{,}588 \cdot 10^{-15}$

Afgerond: $2 \cdot 10^{-15}$.

e Uit figuur 13.65 van het basisboek blijkt dat $E_1 = E_2$. Uit figuur 13.64 daarvoor blijkt dat een iets grotere energie een veel kleinere halveringstijd, dus een veel grotere tunnelkans, tot gevolg heeft. Dus antwoord K_1 is veel groter dan $2K_2$.

f De debrogliegolflengte bereken je met de formule voor de debrogliegolflengte.
De impuls bereken je met de formule voor de impuls.
De snelheid bereken je met de formule voor de kinetische energie.
De kinetische energie en de massa van een α-deeltje zoek je op in BINAS.
De opgezochte waarden moet je nog omrekenen naar SI-eenheden.

$m_\alpha = m_{\text{He-4}} = 4{,}002$ u (Zie BINAS tabel 25 bij He-4)
$m_\alpha = 4{,}002 \times 1{,}660 \cdot 10^{-27}$ kg (Zie BINAS tabel 7)
$m_\alpha = 6{,}643 \cdot 10^{-27}$ kg

$E_{k,\alpha} = 8{,}776$ MeV (Zie BINAS tabel 25 bij Po-210)
$E_{k,\alpha} = 8{,}776 \cdot 10^{6} \times 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J
$E_{k,\alpha} = 1{,}4056 \cdot 10^{-12}$ J

$E_{k,\alpha} = \frac{1}{2} m_\alpha \cdot v^2$

$1{,}4056 \cdot 10^{-1} = \frac{1}{2} \times 6{,}643 \cdot 10^{-27} \cdot v^2$

$v = 2{,}057 \cdot 10^{7}$ m s^{-1}

$p = m \cdot v$

$p = 6{,}643 \cdot 10^{-27} \times 2{,}057 \cdot 10^{7} = 1{,}366 \cdot 10^{-19}$ kg m s^{-1}

$\lambda = \frac{h}{p}$

$h = 6{,}6260 \cdot 10^{-34}$ (Zie BINAS tabel 7)

$\lambda = \frac{6{,}6260 \cdot 10^{-3}}{1{,}366 \cdot 10^{-19}}$

$\lambda = 4{,}848 \cdot 10^{-15}$ m

Afgerond: $4{,}85 \cdot 10^{-15}$ m.

g Bij een hogere waarde van E_α heeft het α-deeltje een smallere energiebarrière te overbruggen. Hierdoor wordt de tunnelkans vele malen groter en dus de halveringstijd vele malen kleiner

13.8 Afsluiting

Opgave 37

a Het atoom beweegt naar het foton toe. Hierbij treedt blauwverschuiving op: dus naar hogere frequenties. Voor de fotonenergie geldt $E_f = h \cdot f$. Omdat h een constante is, betekent een hogere frequentie een hogere fotonenergie.

b Het frequentieverschil bereken je met het verschil in fotonenergie tussen de twee fotonen.
Het verschil in fotonenergie bereken je volgens de wet van behoud van energie met het verschil in kinetische energie van het atoom.
De kinetische energie van het atoom bereken je met de formule voor kinetische energie van het atoom ^{85}Rb.

$$\Delta E_k = E_{k,voor} - E_{k,na}$$
$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2} m \cdot v^2$$
m = 84,91180 u = 84,91180 × 1,6605·10^{-27} = 1,4099·10^{-25} kg
v_{voor} = 0,500 m s^{-1}
v_{na} = 0,495 m s^{-1}
$$E_{k,voor} = \tfrac{1}{2} \times 1,4099 \cdot 10^{-25} \times 0,500^2 = 1,76245 \cdot 10^{-26} \text{ J}$$
$$E_{k,na} = \tfrac{1}{2} \times 1,4099 \cdot 10^{-25} \times 0,495^2 = 1,72730 \cdot 10^{-26} \text{ J}$$
ΔE_k = 1,76245·10^{-26} – 1,72730·10^{-26}
ΔE_k = 0,03515·10^{-26} J

$\Delta E_f = h \cdot \Delta f$
h = 6,6260·10^{-34} J s
$\Delta E_f = \Delta E_k$
0,03515·10^{-26} = 6,6260·10^{-34} × Δf
Δf = 5,3048·10^5 Hz
Afgerond: Δf = 5·10^5 Hz.

c Als een atoom een foton uitzendt, is er sprake van een kracht van het atoom op het foton. Volgens de derde wet van Newton is er dan ook sprake van een kracht van het foton op het atoom. Hierdoor krijgt het atoom een versnelling en dus snelheid.

d De snelheid bereken je met de formule voor de impuls van het atoom.
De impuls van het atoom volgt uit de impuls van het uitgezonden foton.
De impuls van het foton bereken je uit de formule van De Broglie.
De frequentie bereken je met de formule voor de fotonenergie.
De fotonenergie bereken je de oorspronkelijke fotonenergie en het verschil in kinetische energie van het atoom bij een botsing.

$E_f = E_{f,voor} + \Delta E_k$
$E_{f,voor}$ = 1,59 eV = 1,59 × 1,6021·10^{-19} = 2,5473·10^{-19} J
ΔE_k = 0,03515·10^{-26} J
E_f = 2,5473·10^{-19} + 0,03515·10^{-26} = 2,5473·10^{-19} J

$$E_f = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$
h = 6,6260·10^{-34} J s
c = 2,9979·10^8 m s^{-1}
$$2,5473 \cdot 10^{-19} = \frac{6,6260 \cdot 10^{-34} \times 2,9979 \cdot 10^8}{\lambda}$$
λ = 7,8015·10^{-7} m

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$7{,}8015\cdot 10^{-7} = \frac{6{,}6260\cdot 10^{-34}}{p}$$

p = 8,496·10^{-28} kg m s^{-1}

$p = m \cdot v$

m = 1,4099·10^{-25} kg (Zie vraag 30b)

8,4932·10^{-28} = 1,4099·10^{-25} · v

v = 6,023·10^{-3} m s^{-1}

Afgerond: 6,02 mm s^{-1} s.

e De golflengte is maximaal als de impuls minimaal is. De impuls van het foton en de impuls van het atoom zijn dan gelijk. Dit wil zeggen dat de golflengten ook gelijk zijn.
Dus λ = 7,8015·10^{-7} m (Zie de berekening in vraag 30d)
Afgerond: 7,8·10^{-7} m.

Opgave 38

a In figuur 13.67 van het basisboek staat de led in de doorlaatrichting als de stroom van links naar rechts door de led loopt. De elektronen gaan in de tegenovergestelde richting. In de tekst staat dat het elektron eerst in het n-type materiaal komt. In figuur 13.67 bevindt het n-type geleidend materiaal zich dus aan de rechterkant van de led.

b Bij het terugvallen van een elektron komt een foton vrij met een energie van 2,26 eV. Volgens BINAS tabel 19A hoort bij dit type fotonen zichtbaar licht in de kleur groengeel.

c Bij interne conversie is het energieverschil veel kleiner. De bijbehorende fotonen hebben dan ook een veel kleinere energie. Als de fotonenergie veel kleiner is, is de erbij behorende straling niet zichtbaar licht maar infraroodstraling. Infrarood straling is warmtestraling.

d In de led wordt elektrische energie omgezet in stralingsenergie. Voordat deze omzetting kan plaatsvinden, moet een elektron voldoende energie hebben.
De drempelspanning bereken je met de formule voor de toename van de elektrische energie. Volgens de wet van behoud van energie is de toename van de elektrische energie gelijk aan de fotonenergie die vrijkomt bij terugvallen.

$E_{el} = q \cdot U$

$E_{el} = E_f$ = 2,26 eV

$q = e$ bij een elektron

U = 2,26 V

Als de spanning niet hoog genoeg is, kan een elektron niet op het hoge energieniveau binnenkomen. De berekende waarde voor de spanning is dus een ondergrens en dus de drempelspanning.

e In de doorlaatrichting komt het elektron op een hoog energieniveau binnen, en verlaat de led op een laag energieniveau. Het verschil in energie wordt omgezet in stralingsenergie van het licht. Voor de omgekeerde richting zou onderweg energie moeten worden toegevoerd. Dit kan dus niet spontaan.

f De elektronen hebben een beperkte ruimte. Dit wordt beschreven door het model van een deeltje in een doos. Voor de energieën van een deeltje in een doos geldt $E_n = n^2 \cdot \dfrac{h^2}{8m\cdot L^2}$.
Kleinere hoeveelheden energie en dus kleine energieverschillen horen dus bij een grote waarde van L. De afmetingen van de led zijn groter dan de afstanden tussen de atomen. Omdat ΔE_1 groter is dan ΔE_2 bepalen de afstanden tussen de afzonderlijke atomen in de led dus ΔE_1 (en de afmetingen van de led zelf bepaalt dus ΔE_2).