Kwadratuur van een cirkel

Auteur	Robert Schuwer
Laatst gewijzigd	10 february 2017
Licentie	CC Naamsvermelding 4.0 Internationale licentie
Webadres	https://maken.wikiwijs.nl/77122

Inhoudsopgave

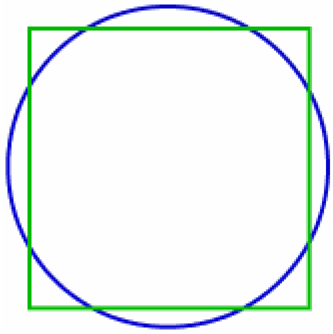
Inleiding

Wat is de kwadratuur van een cirkel?

Onder de kwadratuur van een cirkel wordt het volgende verstaan:

"Is het mogelijk om bij een gegeven cirkel een vierkant te construeren met alleen gebruik van passer en lineaal waarbij de oppervlakte van het vierkant gelijk is aan die van de cirkel?"

Bij een "constructie met passer en lineaal" mag de lineaal alleen worden gebruikt om rechte lijnen mee te tekenen.



Auteur: Rob Brown, CC BY-SA

Geschiedenis

De vraag over de kwadratuur van de cirkel werd al gesteld bij de oude Grieken. Maar wellicht dat het vraagstuk al veel ouder is. Meetkunde is al vroeg ontstaan vanuit praktische vragen in die tijd.

In de tijd van de farao's werden de Egyptenaren al geconfronteerd met jaarlijkse overstromingen van de Nijl. Als het water zich dan had teruggetrokken moesten landgoederen weer opnieuw worden ingemeten. Ze gingen daarom nadenken over oplossingen om dat jaarlijkse meetproces zo eerlijk en efficiënt mogelijk te kunnen uitvoeren. Ziehier de start van de meetkunde.

Het vraagstuk van de kwadratuur van een cirkel is één van vele vraagstukken waarbij alleen een passer en een lineaal mogen worden gebruikt. Zoals al eerder opgemerkt mag de lineaal alleen worden gebruikt als hulpmiddel voor het trekken van rechte lijnen. Een constructie mag dus geen gebruik maken van de schaalverdeling op een lineaal.

Voorbeelden van dergelijke constructievraagstukken zijn:

1. Bij een gegeven hoek construeren van de deellijn van die hoek
2. Bij een gegeven hoek α construeren van een hoek die 1/3 van de grootte van α
3. Bij een gegeven kubus construeren van een kubus met dubbele inhoud
4. Bij een gegeven lijnstuk AB construeren van de lijn middendoor AB, loodrecht op AB

Een aantal van deze vraagstukken werd al snel door de Grieken opgelost. Bijvoorbeeld vraagstukken 2 en 4 waren erg eenvoudig. Maar er bleef een aantal over waar wiskundigen zich millennia lang het hoofd over braken zonder tot oplossingen te komen. Vraagstukken 1, 3 en het vraagstuk over de kwadratuur van de cirkel waren voorbeelden daarvan.

In de 19e eeuw was het de briljante wiskundige Evaroiste Galois (1811-1832) die een methode construeerde waarmee het antwoord kon worden gegeven op al die constructievraagstukken. Hij deed dat door na te denken over oplosbaarheid van polynomiale vergelijkingen. Hij construeerde daartoe getalverzamelingen met bepaalde eigenschappen waarmee hij oplosbaarheid voor een gegeven polynomiale vergelijking kon aantonen. Het knappe was dat deze ogenschijnlijk niet-gerelateerde theorie de sleutel was om op eenvoudige wijze het al dan niet mogelijk zijn van constructievraagstukken te kunnen beantwoorden.

Galois toonde ook aan dat wiskundigen niet altijd wereldvreemde, saaie mensen zijn. Hij liet zich om politieke redenen uitdagen voor een duel. De avond voor het duel realiseerde Galois zich dat het wel eens verkeerd kon aflopen. Hij schreef toen de wiskundige ideeën waar hij mee bezig was op, zodat die niet verloren zouden gaan wanneer hij zou komen te sterven. Inderdaad verloor hij het duel en werd zodanig zwaar gewond dat hij een dag later overleed. Zijn ideeën werden in 1846 door de Franse wiskundige Liouville gepubliceerd.

(Bron over Galois:

[Évariste Galois](https://maken.wikiwijs.nl/77122/Kwadratuur_van_een_cirkel)

Er is inhoud gevonden die niet kan worden weergegeven in de offline weergave. Bekijk het arrangement online op https://maken.wikiwijs.nl/77122/Kwadratuur_van_een_cirkel.

Voorbeelden van constructies

Hieronder een tweetal voorbeelden van constructies met passer en lineaal.

Constructie van een middelloodlijn op een gegeven lijnstuk AB
kn.nu/ww.63057eb (youtu.be)

Constructie van de deellijn van een gegeven hoek
kn.nu/ww.5880a60 (youtu.be)

Is er een oplossing voor de kwadratuur van een cirkel?

Voorbereiding

Om het antwoord op de vraag uit deze sectie te kunnen geven is een aantal begrippen nodig.

- Een **veelterm** of **polynoom** in een variabele x is een uitdrukking van de vorm: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$. $a_0,..,a_n$ heten **coëfficiënten** en zijn willekeurige getallen; n is een natuurlijk getal. Wanneer a_n <>0 dan heet n de **graad** van de veelterm. Wanneer n=2, dan heet de veelterm een **kwadratische** veelterm.
- Wanneer alle a_i (i=0,..,n) rationale getallen zijn ("breuken"), dan heet de veelterm **algebraïsch**.
- Stel $f(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$. Een getal p heet een **oplossing** van f(x)=0 als $a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0=0$
- Wanneer een getal p een oplossing is voor een algebraïsche veelterm dan heet p een **algebraïsch** getal.
- Alle "breuken" zijn algebraïsch. Een breuk a/b (b<>0; a,b gehele getallen) is oplossing van de veelterm f(x)=0, met f(x)=x-(a/b)
- $\sqrt{2}$ is een voorbeeld van een algebraïsch getal dat geen breuk is. Het is oplossing van de vergelijking $x^2-2=0$

Het antwoord

Het korte antwoord is: **NEE**

De korte uitleg volgt hier stapsgewijs

- Een cirkel met straal r heeft een oppervlakte van πr^2
- Het te construeren vierkant zou dan een oppervlakte moeten hebben van πr^2
- De zijde van het vierkant is dan de wortel daaruit: $r\sqrt{\pi}$
- Galois heeft aangetoond dat constructie van een lijnstuk met passer en lineaal alleen kan als de lengte van dat lijnstuk oplossing is van een kwadratische algebraïsche veelterm met gehele coëfficiënten.
- De kunst is dus zo'n algebraïsche veelterm f(x) te vinden die $r\sqrt{\pi}$ als oplossing heeft voor f(x)=0.
- Echter: in 1882 werd bewezen dat π en daarmee ook $r\sqrt{\pi}$ **geen** algebraIsch getal is.
- Er bestaat dus **geen** algebraìsche veelterm f die $r\sqrt{\pi}$ als oplossing heeft voor f(x)=0
- Ergo: de kwadratuur van de cirkel is onmogelijk

Over dit lesmateriaal

Colofon

Auteur	Robert Schuwer
Laatst gewijzigd	10 february 2017 om 13:03
Licentie	Dit lesmateriaal is gepubliceerd onder de Creative Commons Naamsvermelding 4.0 Internationale licentie. Dit houdt in dat je onder de voorwaarde van naamsvermelding vrij bent om: • het werk te delen - te kopiëren, te verspreiden en door te geven via elk medium of bestandsformaat • het werk te bewerken - te remixen, te veranderen en afgeleide werken te maken • voor alle doeleinden, inclusief commerciële doeleinden. Meer informatie over de CC Naamsvermelding 4.0 Internationale licentie

Aanvullende informatie over dit lesmateriaal

Van dit lesmateriaal is de volgende aanvullende informatie beschikbaar:

Leerniveau	; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ;
Leerinhoud en doelen	; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ;
Eindgebruiker	leerling/student
Moeilijkheidsgraad	gemiddeld
Studiebelasting	0 uur en 10 minuten
Trefwoorden	constructie, galois, wiskunde

Bronnen

Bron	Type
Constructie van een middelloodlijn op een gegeven lijnstuk AB https://youtu.be/WR2R_wrdEVY	Video
Constructie van de deellijn van een gegeven hoek https://youtu.be/KNr52iFk7n4	Video