



3 les 2 bouwplaten

Auteur	Its Academy
Laatst gewijzigd	30 november 2014
Licentie	CC Naamsvermelding-GelijkDelen 3.0 Nederland licentie
Webadres	https://maken.wikiwijs.nl/46253



Dit lesmateriaal is gemaakt met Wikiwijs van Kennisnet. Wikiwijs is hét onderwijsplatform waar je leermiddelen zoekt, maakt en deelt.

Inhoudsopgave

Les 2 Bouwplaten

2.1 A Square op onderzoek

2.2 Het plakken van een vierkant

2.3 Bouwplaten en gelijkheid

2.4 Inbedden

Over dit lesmateriaal

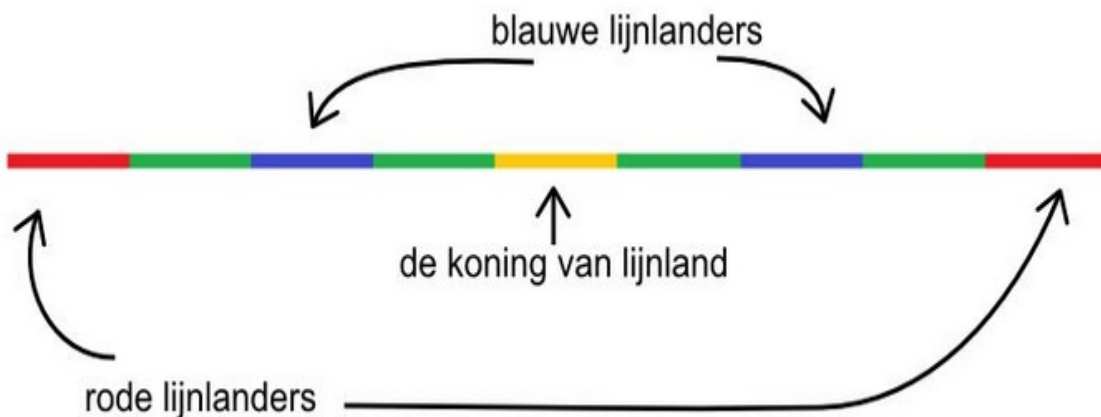
Les 2 Bouwplaten

Deze les gaat over bouwplaten voor oppervlakken. A Square ontdekt dat hij met bouwplaten of kaarten een voorstelling van een Flatland met een andere vorm dan een oneindig vlak kan maken. Je gaat bekijken welke bouwplaten je allemaal van een vierkant kunt maken en je zult zien dat niet elke bouwplaat een ander oppervlak levert. Verder gaan we in op het onderwerp inbedden. Als je als topoloog bent geïnteresseerd in het classificeren van oppervlakken, wil je dat doen op basis van intrinsieke eigenschappen. We zullen zien dat hetzelfde oppervlak er soms heel anders uitziet doordat we het op een andere manier inbedden (voorstellen) in 3D.

Maak nu eerst de microtoets van les 1.

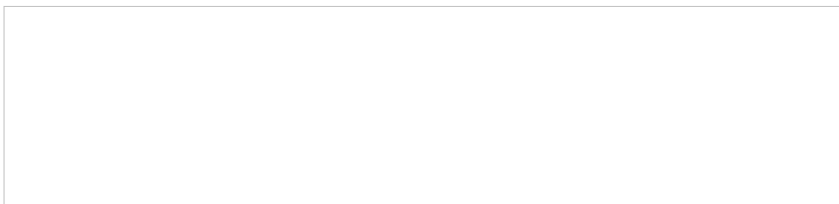
2.1 A Square op onderzoek

Nadat A Square heeft gedroomd over Lineland bedenkt hij dat Lineland ook een cirkel zou kunnen zijn zonder dat de Koning of een andere bewoner dit door zou hebben. De bewoners van Lineland zien immers maar een klein stukje van hun ruimte.



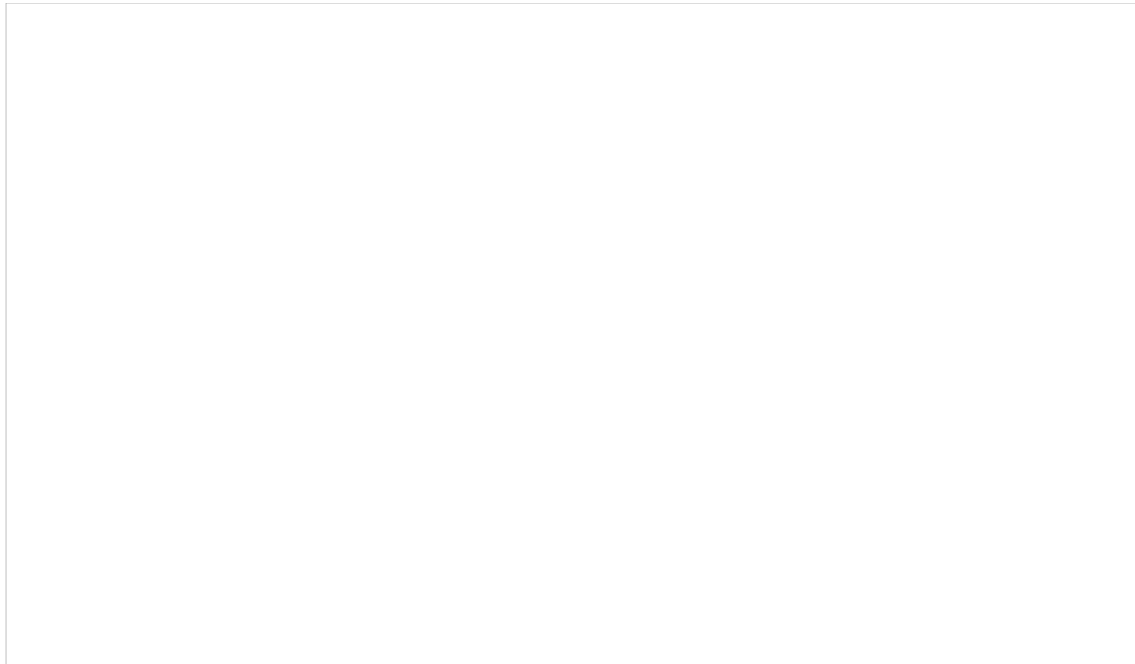
Misschien dat de kaart van Lineland er volgens de koning zo uitziet;

Maar in werkelijkheid zouden de Linelanders ook op een klein stukje van een cirkel kunnen wonen.



Om hierachter te komen zou een rode lijnlander de cirkel rond moeten lopen om de andere rode lijnlander te ontmoeten. Ook kan een lijnlander kaarten tekenen van gebieden waar hij of zij geweest is en aangeven welke kaarten in elkaar overlopen. Zo kunnen de Linelanders uiteindelijk zien dat de kaarten een cirkel opleveren. Ze kunnen zich nog steeds niks voorstellen bij de vorm van een cirkel, aangezien ze geen tweedimensionale objecten kunnen voorstellen, maar ze weten wel dat wanneer ze maar lang genoeg doorlopen, ze weer terug komen op hun beginpunt.

A Square bedenkt nu dat hij ook platte kaarten van zijn land kan maken, hij geeft met pijltjes en letters aan welke randen op elkaar geplakt moeten worden. Alhoewel hij zich niet voor kan stellen hoe de ruimte er na plakken in drie dimensies uit zal zien, kan hij zich wel voorstellen hoe hij door deze ruimtes zou bewegen.

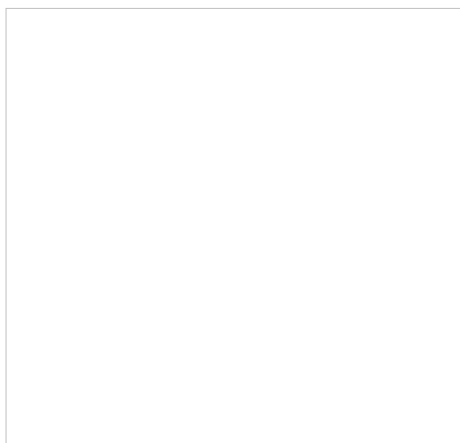


A Square vraagt zich af welke mogelijke vormen Flatland allemaal zou kunnen hebben. Hij heeft natuurlijk geen 3D voorstellingsvermogen zoals wij, dus zelfs bij de meest eenvoudige kaarten kan hij zich moeilijk een voorstelling maken. Jij zult A Square af en toe moeten helpen bij zijn onderzoeken naar de vorm van Flatland.

In deze les zullen wij verschillende kaarten van A Square bekijken en aangezien wij de derde dimensie wel kunnen zien kunnen we ook bekijken welke vormen horen bij deze kaarten. Zijn kaarten vormen een *bouwplaat* van een oppervlak.

2.2 Het plakken van een vierkant

Door de zijden van een vierkant aan elkaar te plakken kunnen we oppervlakken maken. Het simpelste voorbeeld is het plakken van een torus (donutvorm). In het plaatje hieronder is met pijlen en letters aangegeven hoe de zijden op elkaar geplakt moeten worden. Dit noemen we een bouwplaat.



De torus

Bekijk het volgende filmpje en leg uit wat dit met het plakschema hierboven te maken heeft.



https://youtu.be/OH5_h-RB0T8

Bron: http://www.youtube.com/watch?v=OH5_h-RB0T8

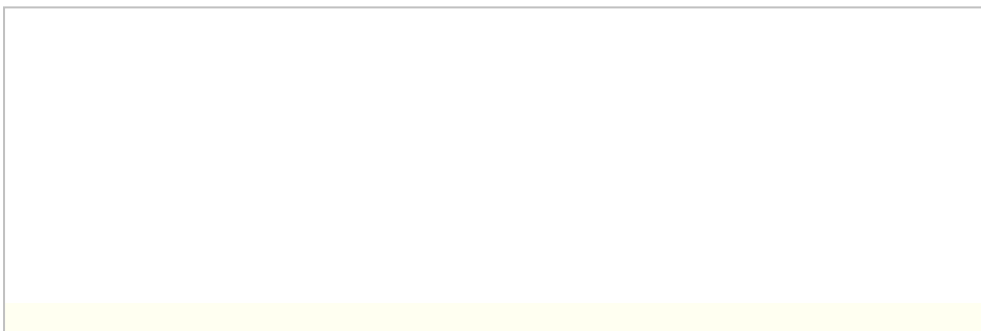
[klik hier](#)

Er zijn een heel aantal verschillende manieren om de zijdes van een vierkant te plakken. Hieronder zijn alle verschillende mogelijkheden weergegeven.



Invuloefening

Hieronder zie je nog twee plakschema's, maar deze staan eigenlijk ook al in het bovenstaande overzicht. Ga na welke met welke plakschema's ze overeenkomen.

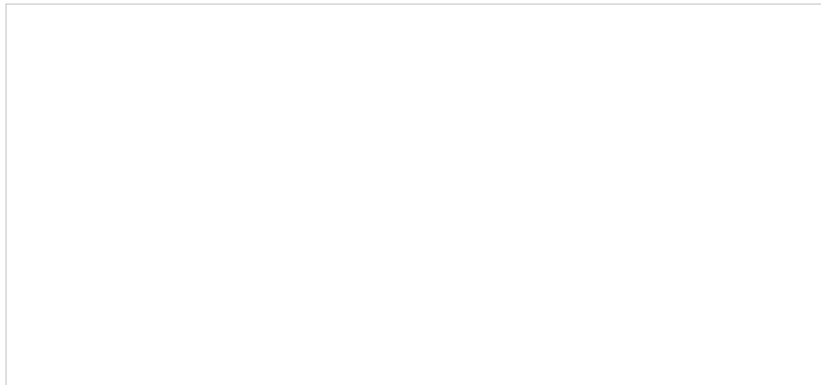


Vul in:

- Plakschema 1 komt overeen met plakschema _____.
- Plakschema 2 komt overeen met plakschema _____.
- Plakschema 3 komt overeen met plakschema _____.

Plakschema F is waarschijnlijk het makkelijkst voor te stellen, dit is een cilinder. Ga maar na, als je de zijden van een stuk papier op elkaar plakt dan krijg je inderdaad een cilinder.

Het plakschema bij B levert topologisch gezien een schijfje op, zoals je in onderstaande figuur kunt zien.



Plaatje C hebben we al eerder gezien, dat is de torus.



Waar/Niet waar-vraag

Probeer zelf oppervlak A te maken van een strook papier. Dit oppervlak wordt door wiskundigen de Möbiusband genoemd.

De cilinder heeft een binnenkant en een buitenkant. De Möbiusband heeft dat niet.

Waar of niet waar?

- a. Waar
- a. Niet waar



Meerkeuzevraag

Het laatste plakschema dat we nu zullen bespreken is schema H, op de overige schema's komen we later terug. Welk oppervlak stelt schema H voor?

- a. Een krakeling (oppervlak met drie gaten)
- a. Een zwemband (torus)
- a. Een bolschil
- a. Een dubbele zwemband

De meeste oppervlakken die we tegenkomen hebben naast een naam ook een verkorte notatie. De notatie voor de torus is T^2 , de bolschil wordt aangegeven met S^2 .



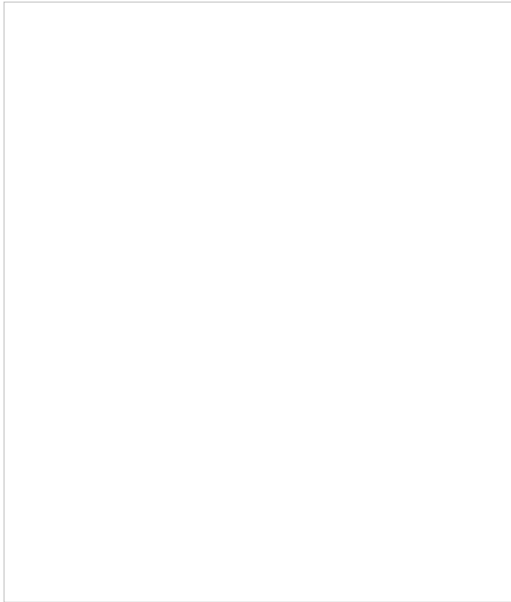
Reflectie

De T in T^2 staat voor torus, waar denk je dat de S in S^2 voor staat? (Zoek, als je deze niet weet, de engelse naam voor dit oppervlak op.)

[klik hier](#)

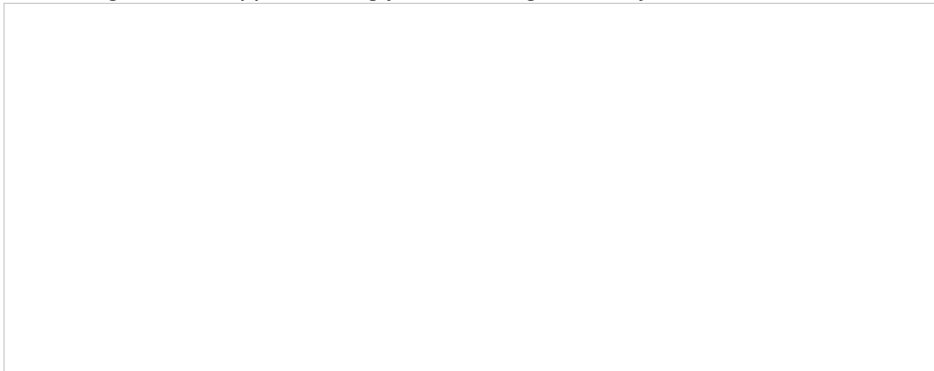
2.3 Bouwplaten en gelijkheid

Bouwplaten zijn een handige manier om een oppervlak te representeren. Met een bouwplaat bedoelen we een plat figuur - een of meerdere veelhoek(en) - waarbij we aangeven waar we randen of punten op elkaar plakken. Hieronder staan nog enkele voorbeelden van bouwplaten:

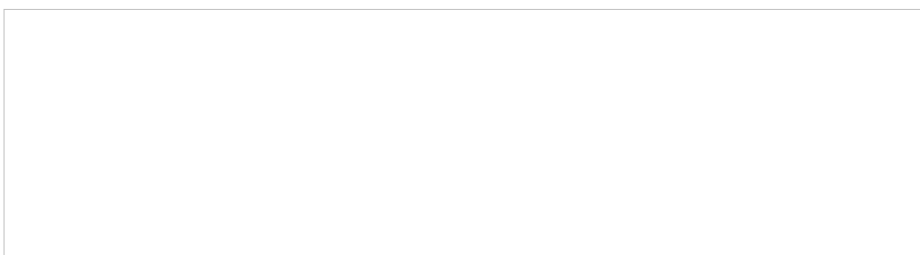


Verskillende bouwplaten kunnen hetzelfde oppervlak voorstellen. We kunnen de bouwplaten "knippen en plakken" zonder dat het oppervlak dat ze voorstelt verandert:

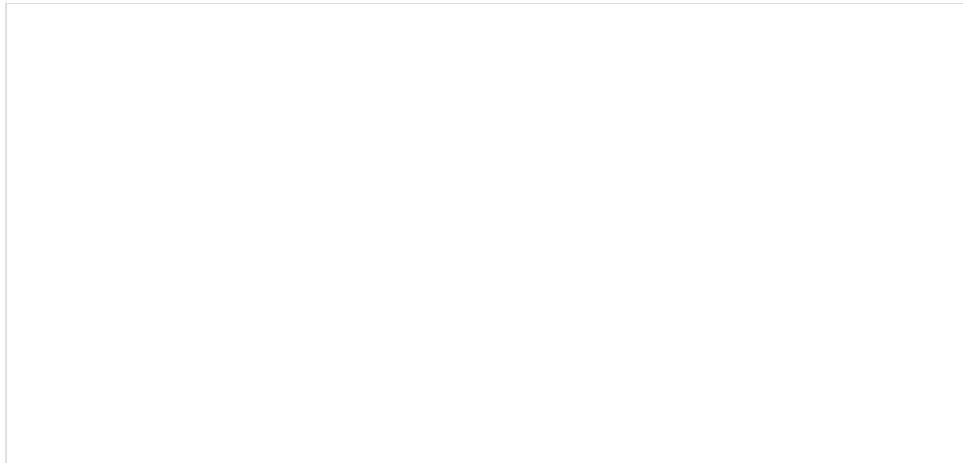
1. Je mag overal knippen zolang je maar aangeeft hoe je de stukken weer aan elkaar plakt.



2. Laat richtingen intact.

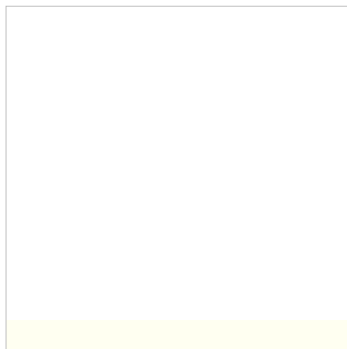


3. Je mag soms twee pijlen samenvoegen, namelijk wanneer je twee keer dezelfde volgorde tegenkomt.



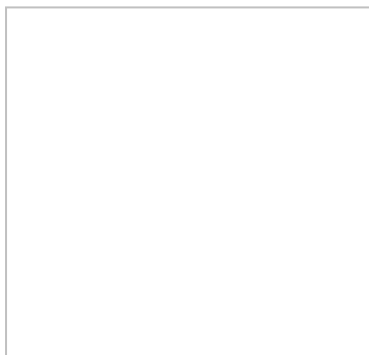
Welk oppervlak is het?

De volgende bouwplaat ken je nog niet:



Maar als we het plakken zouden uitvoeren krijg je een oppervlak dat je al eerder bent tegengekomen. Pak pen, papier, een schaar en plakband.

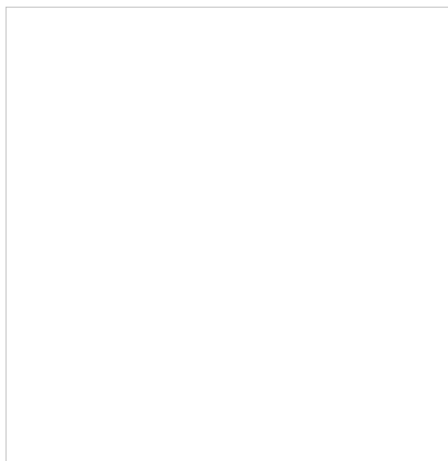
- Knip een zeshoek en zet bij de zijden een pijltje en een letter overeenkomend met het plaatje hierboven.
- Knip de zeshoek in zes stukken zoals hieronder aangegeven:



- Geef bij randen van de stukken I tot en met VI aan hoe ze op elkaar geplakt moeten worden.
- Plak de stukken I tot en met VI tot een vierkant (zodat het plakken van de randen klopt natuurlijk). Welke bouwplaat heb je nu? Dus welk oppervlak correspondeert met de zeshoekige bouwplaat?

Identificatieschema's

We kunnen vaak kort noteren over welke bouwplaat we het hebben. Als we een bouwplaat hebben waarvan we de identificaties met letters op de rand aangeven, kunnen we het identificatieschema samenvatten als "woord". (Hoekpunten zijn dan impliciet geïdentificeerd). We schrijven de letters zoals we ze tegenkomen als we met de klok mee langs de zijden van het veelhoek lopen. De oriëntatie van de pijl geven we aan door klein -1 rechts boven de letter te schrijven als de pijl "tegen de klok in" wijst. Het identificatieschema van de torus kunnen we daarmee noteren als $aba^{-1}b^{-1}$ (spreek uit: a, b, a-invers, b-invers).



De torus heeft identificatieschema $aba^{-1}b^{-1}$.

Het maakt natuurlijk niet uit in welk hoekpunt we beginnen met het aflezen van het identificatieschema. De torus heeft ook identificatieschema $bab^{-1}a^{-1}$, oftewel $aba^{-1}b^{-1} = bab^{-1}a^{-1}$. Je mag ook besluiten in tegengestelde richting te lopen. Het oppervlak verandert dan nog steeds niet, dus we zien weer dat $aba^{-1}b^{-1} = bab^{-1}a^{-1}$. We noemen identificatieschema's altijd gelijk wanneer zij hetzelfde oppervlak maken. Daarbij mogen we ook best de namen van de zijden veranderen, dus; $bab^{-1}a^{-1} = cdc^{-1}d^{-1}$.



Waar/Niet waar-vraag

Waar of niet waar?

maken.wikiwijs.nl/p/questionnaire/standalone/664077



Geef steeds aan of de volgende beweringen waar of niet waar zijn.

$$abab^{-1} = b^{-1}a^{-1}ba^{-1}$$

- a. Waar
- a. Niet waar

$$abab = b^{-1}aba$$

- a. Waar
- a. Niet waar

$$ab^{-1}ab = ba^{-1}ba$$

- a. Waar
- a. Niet waar

$$acbba^{-1}c = bcca^{-1}ba$$

- a. Waar
- a. Niet waar

2.4 Inbedden

Topologen (wiskundigen die zich met ruimte bezighouden) willen altijd weten wat de eigenschappen van de ruimte zelf zijn, onafhankelijk van de keuze die gemaakt is om de ruimte voor te stellen.

De eigenschappen van de ruimte zelf noemen we **intrinsieke eigenschappen**. Dit zijn de eigenschappen die te onderzoeken zijn door een bewoner van de ruimte. Eigenschappen die dit niet zijn heten **extrinsiek**.



A Square

In de zoektocht van A Square naar de mogelijke vormen van Flatland onderzoekt hij allerlei eigenschappen. Is het voor A Square mogelijk om eigenschappen te onderzoeken die niet intrinsiek zijn?

[klik hier](#)



Omtrek

Is de omtrek van een cirkel in het vlak een extrinsieke of een intrinsieke eigenschap van de cirkel? Is het een topologische eigenschap?

[Klik hier](#)

In het vervolg noemen we twee ruimtes gelijk op basis van hun **intrinsieke** en **topologische** eigenschappen.

Dezelfde ruimte is vaak op veel manieren voor te stellen. De volgende geknoopte torus ziet er bijvoorbeeld heel anders uit dan de standaard "donut" of de bouwplaat.

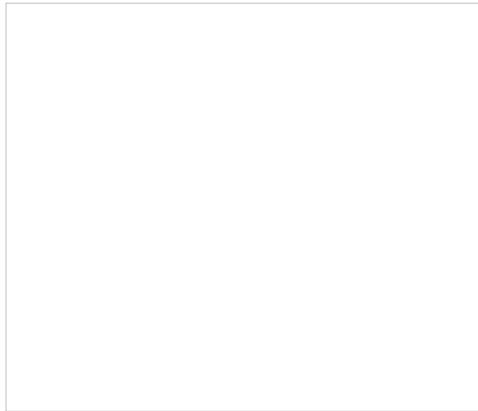


Al deze tori (meervoud van torus) beschouwen we als dezelfde ruimte. Het verschil tussen het oppervlak van een donut en deze geknoopte torus zit in de manier waarop we dit oppervlak voorstellen in een omhullende driedimensionale ruimte.

Het voorstellen van een ruimte in een omhullende ruimte heet **inbedden**. De geknoopte torus en het oppervlak van een donut zijn twee verschillende inbeddingen van hetzelfde oppervlak. Eigenschappen die afhangen van de inbedding zijn extrinsiek.

Waar/Niet waar

Hieronder een plaatje van een lus in drie dimensies met een knoop er in.



Dit is een cirkel.

- a. Waar
- a. Niet waar

Invuloefening

Welke van de volgende plaatjes stellen dezelfde ruimte voor? (Geef de letters in hoofdletters, zonder spaties, dus bijvoorbeeld AB)



- Antwoord: _____.

Over dit lesmateriaal

Colofon

Dit materiaal is achtereenvolgens ontwikkeld en getest in een SURF-project (2008-2011: e-klassen als voertuig voor aansluiting VO-HO) en een IIO-project (2011-2015: e-klassen&PAL-student). In het SURF project zijn in samenwerking met vakdocenten van VO-scholen, universiteiten en hogescholen e-modules ontwikkeld voor Informatica, Wiskunde D en NLT. In het IIO-project (Innovatie Impuls Onderwijs) zijn in samenwerking modules ontwikkeld voor de vakken Biologie, Natuurkunde en Scheikunde (bovenbouw havo/vwo). Meer dan 40 scholen waren bij deze ontwikkeling betrokken. Organisatie en begeleiding van uitvoering en ontwikkeling is gecoördineerd vanuit **Its Academy**, een samenwerkingsverband tussen scholen en vervolgopleidingen. Zie ook www.itsacademy.nl De auteurs hebben bij de ontwikkeling van de module gebruik gemaakt van materiaal van derden en daarvoor toestemming verkregen. Bij het achterhalen en voldoen van de rechten op teksten, illustraties, en andere gegevens is de grootst mogelijke zorgvuldigheid betracht. Mochten er desondanks personen of instanties zijn die rechten menen te kunnen doen gelden op tekstgedeeltes, illustraties, enz. van een module, dan worden zij verzocht zich in verbinding te stellen met de programmamanager van de Its Academy (zie website). Gebruiksvoorwaarden: creative commons cc-by sa 3.0 Handleidingen, toetsen en achtergrondmateriaal zijn voor docenten verkrijgbaar via de **Its Academy**.

Auteur	Its Academy
Laatst gewijzigd	30 november 2014 om 08:06
Licentie	Dit lesmateriaal is gepubliceerd onder de Creative Commons Naamsvermelding-GelijkDelen 3.0 Nederland licentie. Dit houdt in dat je onder de voorwaarde van naamsvermelding en publicatie onder dezelfde licentie vrij bent om: <ul style="list-style-type: none">• het werk te delen - te kopiëren, te verspreiden en door te geven via elk medium of bestandsformaat• het werk te bewerken - te remixen, te veranderen en afgeleide werken te maken• voor alle doeleinden, inclusief commerciële doeleinden.

[Meer informatie over de CC Naamsvermelding-GelijkDelen 3.0 Nederland licentie](#)

Aanvullende informatie over dit lesmateriaal

Van dit lesmateriaal is de volgende aanvullende informatie beschikbaar:

Leerniveau	;
Leerinhoud en doelen	;
Eindgebruiker	leerling/student
Moeilijkheidsgraad	gemiddeld
Trefwoorden	e-klassen rearrangeerbaar