Logica H8 Waarheidstafels

10 h8 waarheidstafels

Auteur	Its Academy
Laatst gewijzigd	29 november 2014
Licentie	CC Naamsvermelding-GelijkDelen 3.0 Nederland licentie
Webadres	https://maken.wikiwijs.nl/46162

Inhoudsopgave

8.1 Waarheidstafels

Inleiding

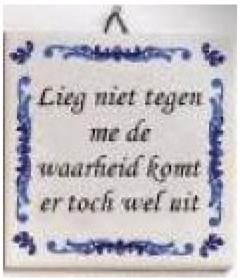
Een *propositie* is een bewering.
Beweringen kunnen opgebouwd zijn uit deelbeweringen:

- Ik ben Corry *en* ik lees de Story.
  Johnny wist het *niet*, *of* hij is het vergeten.
  Als *x* priem is, *dan* is *x* groter dan 25.

Die delen zijn dan aan elkaar gezet met voegwoorden (connectieven). In wiskundige teksten kom je de volgende voegwoorden regelmatig tegen:

- en, of, niet, of..of.., als ...dan ..., ... dan en slechts dan als ...

Merk op: we noemen een koppel als "als... dan..." een *voegwoord*, terwijl het in onze taal bestaat uit twee woorden.
Logisch redeneren komt voor een deel neer op het omgaan met deze voegwoorden. In deze paragraaf leer je complexe situaties met veel van dergelijke voegwoorden overzichtelijker te maken met behulp van *waarheidstafels*.



Vraagstuk 1

Bewering

maken.wikiwijs.nl/p/questionnaire/standalone/662154

Welke bewering is waar?

Welke bewering is waar als p, q en r de volgende betekenis krijgen:
p = x is een zesvoud
q = x is een drievoud
r = x getal is even
Kies de ware bewering voor x:

a. a) als r dan (p en niet q)

a. b) als q dan (p en niet r)

a. c) als p dan (q en r)

Welke bewering is waar als p, q en r de volgende betekenis krijgen:

p = x is een rechthoek
q = x is een parallellogram
r = x is een vlieger
Kies de ware bewering voor x:

a. a) als (p en q) dan r
a. b) als q dan (p en niet r)
a. c) als p dan (q of niet r)

Twee soorten *of*

Het voegwoord *of* heeft in het dagelijks taalgebruik twee betekenissen.

- *Wilt U thee of koffie ?* uitsluitend: slechts één van beide
  Ja lekker, koffie alsjeblieft.

  Wilt U melk of suiker in Uw koffie? insluitend: mag ook allebei
  Allebei graag.

In de eerste vraag is het de bedoeling dat je kiest tussen thee en koffie, je hoort niet allebei te kiezen. Hier is sprake van "uitsluitend" of. Duidelijker wordt dit als volgt aangegeven:

- *Wilt U thee of wilt U koffie*
  Nee, Thee òf koffie
  Nee: òf thee òf koffie.

In de tweede vraag wordt een insluitend of gebruikt: nu mag je wel allebei kiezen. Hier gaat het om "insluitend" of. Hiervoor wordt in schrijftaal ookwel "en/of" gebruikt.

tafels voor *en, niet, of* en *òf-òf*

Voor willekeurige beweringen schrijven we in deze paragraaf letters p, q, r. Deze letters noemen we propositieletters: ze zijn variabelen die beweringen voorstellen, zoals een x een getal voorstelt.
Voor de verschillende voegwoorden zullen we symbolen invoeren om zo samengestelde beweringen te

kunnen schrijven.
De woorden *en* en *niet* hebben in de wiskunde geen andere betekenis dan in het dagelijks leven. In formuletaal worden ze met de volgende symbolen aangegeven:

$p \wedge q$ p *en* q

$\neg p$ *niet* p

Voor de twee soorten *of* hebben we in de wiskunde aparte tekens:

$p \vee q$ insluitend *of* p is waar, q is waar *of* ze zijn allebei waar.

$p \underline{\vee} q$ uitsluitend *of* p is waar en q niet, *danwel* q is waar en p niet.

We kunnen ook de betekenis van de verschillende voegwoorden aangeven in tabellen. In de tabel staan alle mogelijke combinaties die er zijn voor p en q waar of onwaar. Voor waar gebruiken we 1, voor onwaar een 0.
Vaak wordt in plaats van 0 en 1 gewerkt met w en o voor 'waar' en 'onwaar', of t en f voor 'true' en 'false'.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0

p	$\neg p$
1	0
0	1

1 = waar
0 = onwaar

In de derde regel zie je bijvoorbeeld dat als p onwaar, en q waar is, de bewering $p \wedge q$ onwaar is, terwijl de beweringen $p \vee q$ en $p \underline{\vee} q$ dan wel waar zijn.

Vraagstuk 2a

Waar of niet waar

maken.wikiwijs.nl/p/questionnaire/standalone/662156

Welke bewering is waar als p waar is en q niet waar is?

a) $p \wedge q$

a. Waar
a. Niet waar

b) $p \vee q$

a. Waar
a. Niet waar

c) p$\underline{\vee}$q

a. Waar
a. Niet waar

d) ¬p

a. Waar
a. Niet waar

e) ¬q

a. Waar
a. Niet waar

Vraagstuk 2b

Beweringen

maken.wikiwijs.nl/p/questionnaire/standalone/662158

Welke bewering is waar als p en q beide onwaar zijn?

a) p∧q

a. Waar
a. Niet waar

b) p∨q

a. Waar
a. Niet waar

c) p$\underline{\vee}$q

a. Waar
a. Niet waar

d) ¬p

a. Waar
a. Niet waar

e) ¬q

a. Waar
a. Niet waar

8.2 De tafel voor als-dan

de tafel voor *als-dan*

Bij de waarheidstabel voor als-dan is belangrijk te beseffen dat p⇒q op twee flauwe manieren waar werd (zie les 6):

- geval 1: p is onwaar
  geval 2: q is waar

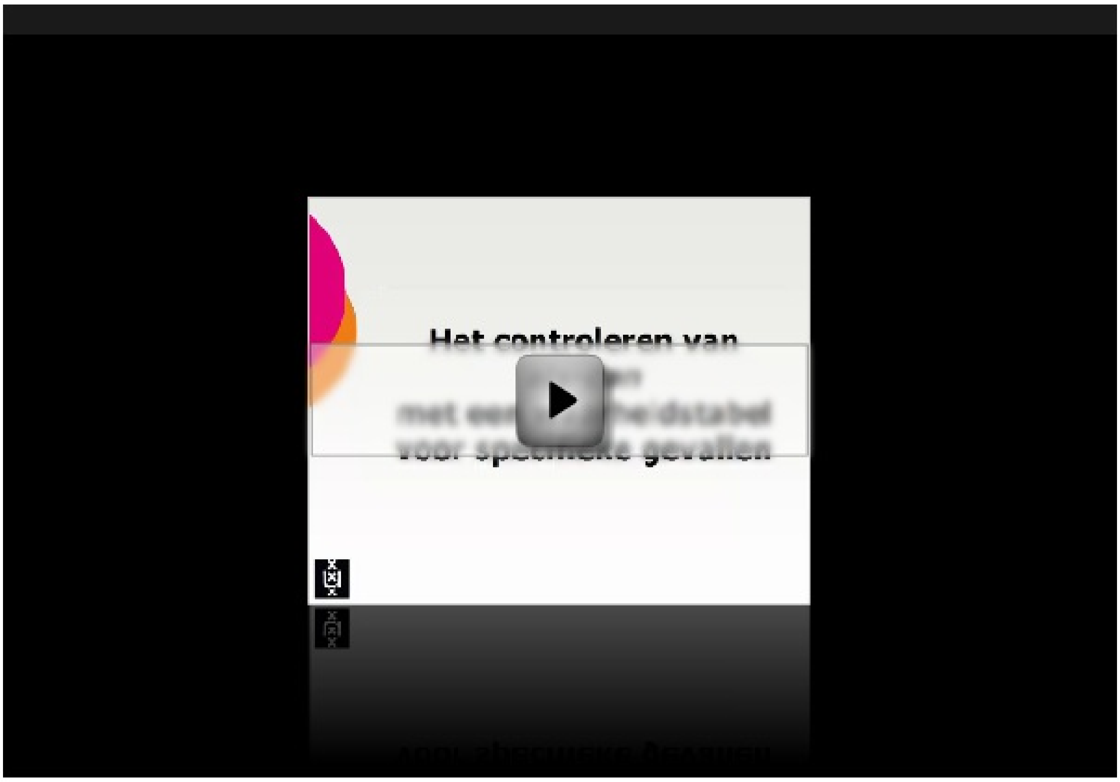
Besef dat p en q staan voor concrete bewering die of waar of onwaar zijn. Dan is "nooit waar" en "onwaar" hetzelfde.
De enige situatie waarin p⇒q niet klopt, is als p waar is, maar q niet. De tabel wordt dus als volgt:

p	q	p⇒q	
1	1	1	volgens geval 1: want q is waar
1	0	0	
0	1	1	volgens geval 1 en 2: want p is onwaar, q is waar
0	0	1	volgens geval 2: want p is onwaar

als-dan als universele bewering

In de waarheidstafels komt de betekenis van als-dan niet goed uit, omdat als-dan eigenlijk een universele bewering is, en P⇒Q voor gesloten beweringen zelden voorkomt.
Gewoonlijk gaat het om een hele serie situaties x (momenten, getallen, personen enz.) waarin P(x) en Q(x) soms wel en soms niet waar zijn. Om te zien of P⇒Q universeel waar is moet je dan alle gevallen x apart bekijken en steeds nagaan of P(x)⇒Q(x) klopt. Die gevallen apart zijn dan steeds flauwe gevallen.

Het volgende voorbeeld maakt duidelijk waar het om gaat:



kn.nu/ww.de85db9 (maken.wikiwijs.nl)

Vraagstuk 3

Controleer de bewering p ⇒ q
p = dit getal is een zesvoud
q = dit getal is even
door de tabel in te vullen.

Schrijf een 0 voor "onwaar" en een 1 voor "waar".

X	x is een zesvoud?	x is even?	x is een zesvoud ⇒x is even?
x=4			
x=5			
x=6			
x=8			
x=9			
x=12			

klik hier

tafel voor dan en slechts dan als

Wat betreft de tabel van de dubbele implicatie moet je beseffen dat $p \Leftrightarrow q$ waar is als p en q of allebei waar of allebei onwaar zijn.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

8.3 Tafels voor samenstellingen

propositionele formules

Een propositionele formule is een soort schema voor een samengestelde bewering. De beweringen zijn door letters vervangen, en de voegwoorden zijn geschreven met symbolen. Bijvoorbeeld $(p \underline{\vee} q) \vee (p \wedge q)$ is een propositionele formule.
Wat betreft haakjes-weglaten gelden de volgende afspraken:

Het teken $\neg$ bindt het sterkste,
dan komen samen $\wedge$, $\vee$ en $\underline{\vee}$;
en dan komen samen $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ en $\Leftrightarrow$.

Dus

- $q \Rightarrow \neg p \underline{\vee} q$ is eigenlijk $q \Rightarrow ((\neg p) \underline{\vee} q)$

Zijn twee tekens even sterk dan gaat het linker teken voor het rechter.
Dus

- $q \vee p \wedge q$ is eigenlijk $(q \vee p) \wedge q$.

de wetten van De Morgan

Iemand vraagt je "wilt U koffie of thee" en je zegt "Nee" dan betekent dat, dat je geen koffie wilt EN geen thee. Zo zie je dat

- $\neg(A \vee B)$ is $\neg A \wedge \neg B$.

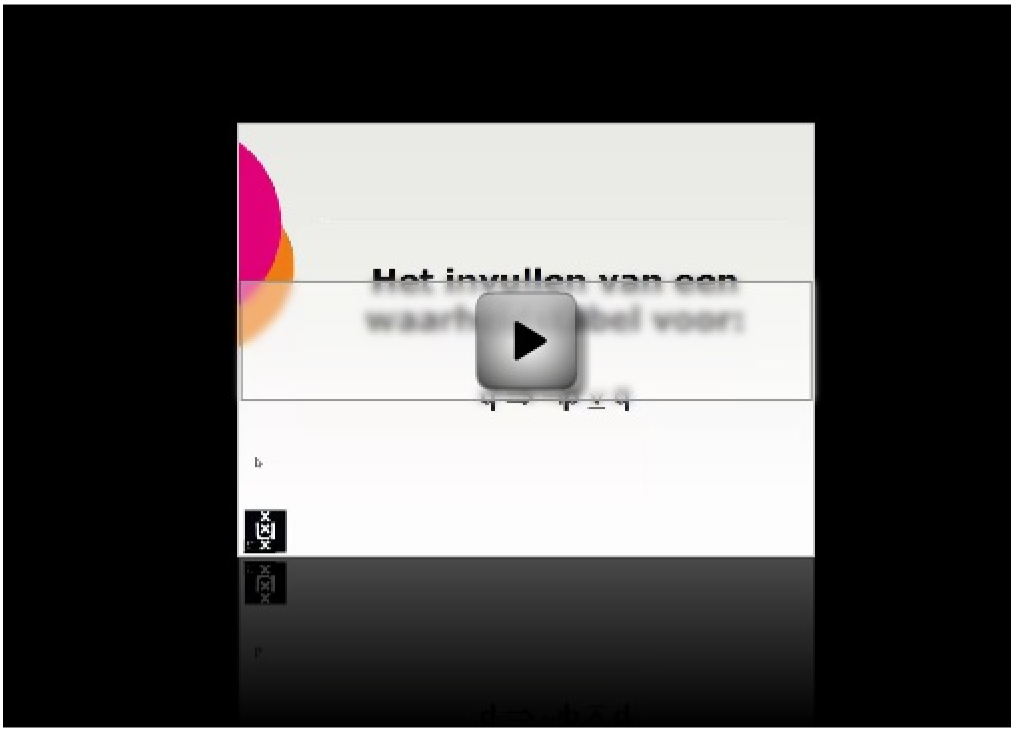
Zo is de ontkenning van een en-bewering een of-bewering:

- $\neg(A \wedge B)$ is $\neg A \vee \neg B$.

Deze twee regels heten de wetten van De Morgan.

Waarheidstafel van een formule

Bij een formule kun je de waarheidstafel maken. Daarin staat aangegeven in welke situaties de formule waar danwel onwaar wordt.
Wij gaan als voorbeeld de waarheidstafel opstellen van de formule: $q \Rightarrow \neg p \underline{\vee} q$.



[kn.nu/ww.fd7297c](kn.nu/ww.fd7297c) (maken.wikiwijs.nl)

Tautologie

Een tautologie is een uitspraak die puur op grond van zijn vorm altijd waar is. Bijvoorbeeld:

- *Als ik lieg dan lieg ik.*

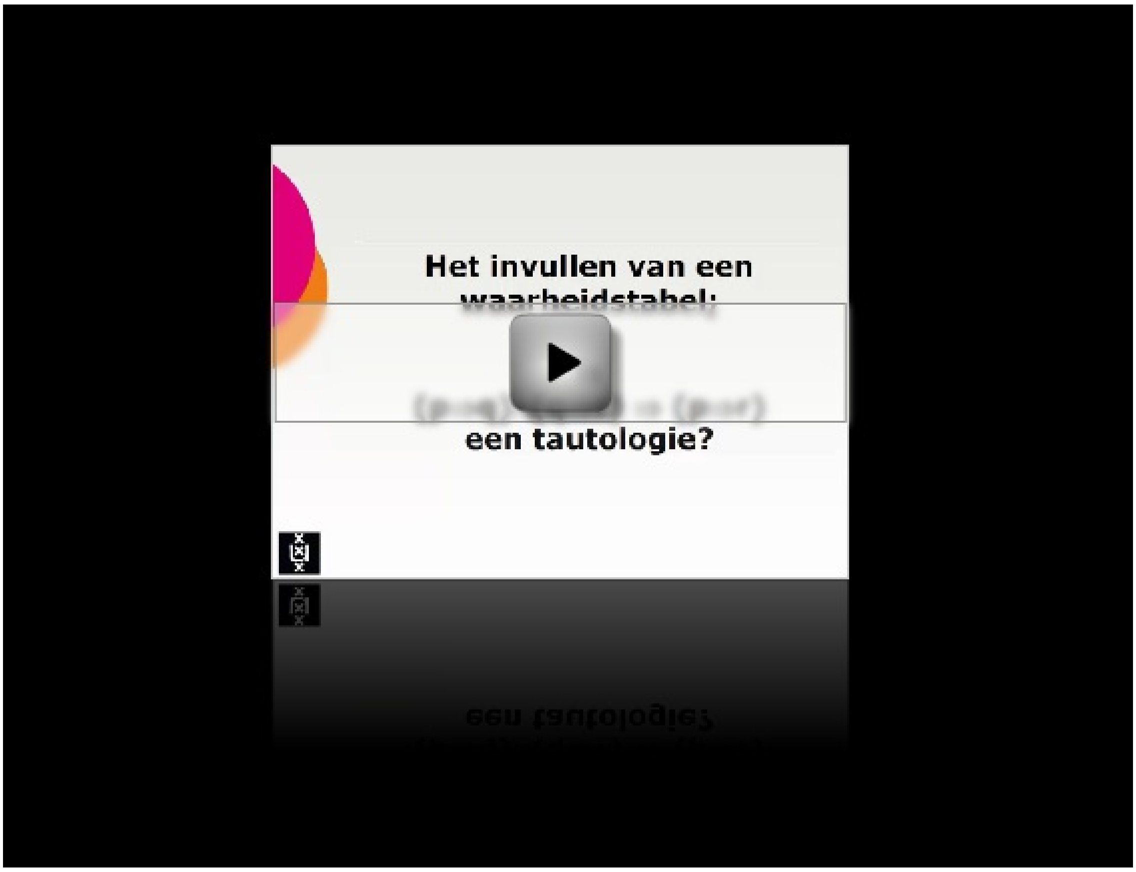
Dit is altijd waar, onafhankelijk van de vraag of ik wel of niet lieg.
Iedere uitspraak van de vorm $p \Rightarrow p$ is sowieso waar, oftewel: de formule $p \Rightarrow p$ is een tautologie.
Tautologieën kun je opsporen met behulp van waarheidstafels. Immers een tautologie is een formule die in alle regels een 1 krijgt. Hierboven bleek dat de formule $q \Rightarrow \neg p \veebar q$ geen tautologie is.

8.4 Waarheidstafels met drie propositieletters

Een voorbeeld met drie propositieletters

Is $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ een tautologie?

We stellen de waarheidstafel van de formule op, om te zien of hij in alle gevallen de waarde 1 krijgt. In de formule komen de drie letters p, q en r voor. Er zijn dan dus 8 mogelijkheden voor p,q en r om waar en/of onwaar te zijn. Dat betekent dat de tabel 8 regels krijgt. Verder hebben we voor alle deelformules aparte kolommen nodig.



[kn.nu/ww.28e47d5](kn.nu/ww.28e47d5) (maken.wikiwijs.nl)

8.5 Opgaven

Vraagstuk 4

a. Schrijf alle haakjes in de volgende formules:

1. $P \wedge Q \Rightarrow R \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \vee R$

2. $P \Rightarrow Q \wedge \neg R \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \Rightarrow R$

b. Laat zoveel mogelijk haakjes weg:

1. $((P \Rightarrow (Q \wedge \neg (P))) \Leftrightarrow \neg (P \wedge \neg Q))$

2. $((P \vee \neg(Q \wedge \neg(P))) \wedge \neg(P \Rightarrow (\neg Q)))$

De antwoorden zijn terug te vinden onder de knop "klik hier", maar bekijk deze niet te snel. Probeer de vragen eerst zelf op te lossen.

klik hier

Vraagstuk 5

Als je een waarheidstafel wilt maken voor onderstaande formules, hoeveel en welke kolommen moet je dan maken?

a. $(Q \vee P) \wedge \neg P \Rightarrow \neg (Q \Rightarrow P)$
b. $P \wedge \neg (Q \vee \neg P) \Rightarrow (P \underline{\vee} Q)$
c. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$
d. $(P \Rightarrow Q \wedge \neg P) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

Voorbeeld: voor de formule

- $P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg (Q \Rightarrow P)$

heb je in de waarheidstafel zes kolommen nodig en wel voor:

- P, Q, $\neg Q$, $P \wedge \neg Q$, $Q \Rightarrow P$, $P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg (Q \Rightarrow P)$

klik hier

Vraagstuk 6

Tautologieën

maken.wikiwijs.nl/p/questionnaire/standalone/662170

Onderzoek of de volgende formules tautologieën zijn. Maak je waarheidstafel op een apart papier en vul daarna ja/nee in.

a) $P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg (Q \Rightarrow P)$

a. Ja
a. Nee

b) $(Q \vee P) \wedge \neg P \Rightarrow \neg (Q \Rightarrow P)$

a. Ja
a. Nee

c) $P \Rightarrow (P \vee Q)$

a. Ja
a. Nee

d) $P \wedge \neg (Q \vee \neg P) \Rightarrow (P \underline{\vee} Q)$

a. Ja
a. Nee

e) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

a. Ja
a. Nee

f) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$

a. Ja
a. Nee

g) $\neg P \vee Q \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$

a. Ja
a. Nee

8.6 Waarheidstabulator

De Waarheidstabulator van Jan Jaspars (UvA)

Met de waarheidstabulator kun je formules maken met de drie letters p, q en r. Bestudeer eerst hoe je de waarheidstabulator bedient. Merk op dat in plaats van de tekens voor de logische operatoren woorden als "en", "of", "niet", "alsdan" en "desda (dan en slechts dan)" worden gebruikt.
Tik een formule in met behulp van de knoppen links onderaan. Elke keer verschijnt wat je intikt in de vakjes boven de paarse streep. In de bovenste rij 'invoerknoppen' staan de propositieletters p, q en r en de haakjes en de negatie ("niet"). Daaronder vind je de logische voegwoorden. De betekenis van "en", "of" en "alsdan" zullen duidelijk zijn. "desda" staat voor 'dan en slechts dan als', de gewoonlijke Nederlandse omschrijving van equivalentie. De "noch"-knop betekent dat p noch q waar is, notatie pXq. De "uitsluitende of" ($\underline{\vee}$) is helaas niet aanwezig.
Maak je een fout tijdens het invoeren van je formule, dan kun je van achteren naar voren symbolen verwijderen met de knop "DEL". Wil je helemaal opnieuw beginnen, gebruik dan de knop "CLEAR".

Haakjes

Formules met te weinig haakjes vindt deze machine niet prettig. Zo weet hij niet wat je bedoelt als je p->q->p intikt. Het kan betekenen dat je (p->q)->p in gedachten had, maar het kan ook zijn dat je p->(q->p) voor ogen had. Dit zijn verschillende formules. Vergeet dus de haakjes niet!

De machine op gang brengen

Als je formule volledig is breng je de waarheidstabel op gang door op "PUT" te klikken. De linkerkolommen in de tabel sommen nu alle relevante situaties (valuaties of modellen) op: alle 0,1-mogelijkheden. Bovendien worden deze verschillende waarden onder de verschillende propositieletters in je formule aangebracht. Om het lezen van de tabel te vergemakkelijken worden ook de haakjes in de tabel gekopieerd.
Vervolg nu met "STEP" in te drukken. De machine gaat nu vanaf de linkerkant op zoek naar het eerste voegwoord wat hij kan toepassen. Hij berekent de resultaten en zet deze neer in de kolom onder het symbool dat bij dit voegwoord hoort.
Deze 0,1-waarden worden afgebeeld met een rode achtergrond, terwijl de kolommen die hierbij als invoer dienen een gele achtergrond krijgen. Als je weer "STEP" indrukt, dan worden de veranderde waarheidswaarden wit en wordt het volgende voegwoord opgezocht. Blijf nu op "STEP" drukken totdat de tabel helemaal vol is.

Vraagstuk 7

Tautologieën

maken.wikiwijs.nl/p/questionnaire/standalone/662173

Onderzoek opnieuw of de volgende formules tautologieën zijn.

a) $P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg(Q \Rightarrow P)$

a. Ja
a. Nee

b) $(Q \vee P) \wedge \neg P \Rightarrow \neg(Q \Rightarrow P)$

a. Ja
a. Nee

c) $P \Rightarrow (P \vee Q)$

a. Ja
a. Nee

d) $P \wedge \neg(Q \vee \neg P) \Rightarrow (P \underline{\vee} Q)$

a. Ja
a. Nee

e) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

a. Ja
a. Nee

f) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$

a. Ja
a. Nee

g) $\neg P \vee Q \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$

a. Ja
a. Nee

Vraagstuk 8

Creëer een formule met de letters P en Q die gelijkwaardig is aan ($P \underline{\vee} Q$) en controleer met de waarheidstabulator of jouw formule de juiste waarheidstafel geeft:

p	q	$p \underline{\vee} q$
1	1	0
1	0	1

0	1	1
0	0	0

Over dit lesmateriaal

Colofon

<p>Dit materiaal is achtereenvolgens ontwikkeld en getest in een SURF-project (2008-2011: e-klassen als voertuig voor aansluiting VO-HO) en een IIO-project (2011-2015: e-klassen&PAL-student). In het SURF project zijn in samenwerking met vakdocenten van VO-scholen, universiteiten en hogescholen e-modules ontwikkeld voor Informatica, Wiskunde D en NLT. In het IIO-project (Innovatie Impuls Onderwijs) zijn in zo’n samenwerking modules ontwikkeld voor de vakken Biologie, Natuurkunde en Scheikunde (bovenbouw havo/vwo). Meer dan 40 scholen waren bij deze ontwikkeling betrokken.</p> <p>Organisatie en begeleiding van uitvoering en ontwikkeling is gecoördineerd vanuit Bètapartners/Its Academy, een samenwerkingsverband tussen scholen en vervolgopleidingen. Zie ook www.itsacademy.nl</p> <p>De auteurs hebben bij de ontwikkeling van de module gebruik gemaakt van materiaal van derden en daarvoor toestemming verkregen. Bij het achterhalen en voldoen van de rechten op teksten, illustraties, en andere gegevens is de grootst mogelijke zorgvuldigheid betracht. Mochten er desondanks personen of instanties zijn die rechten menen te kunnen doen gelden op tekstgedeeltes, illustraties, enz. van een module, dan worden zij verzocht zich in verbinding te stellen met de programmamanager van de Its Academy (zie website). </p> <p>Gebruiksvoorwaarden: creative commons cc-by sa 3.0</p> <p>Handleidingen, toetsen en achtergrondmateriaal zijn voor docenten verkrijgbaar via de bètasteunpunten.</p> <p> </p>

Auteur	Its Academy
Laatst gewijzigd	29 november 2014 om 21:53
Licentie	Dit lesmateriaal is gepubliceerd onder de Creative Commons Naamsvermelding-GelijkDelen 3.0 Nederland licentie. Dit houdt in dat je onder de voorwaarde van naamsvermelding en publicatie onder dezelfde licentie vrij bent om: • het werk te delen - te kopiëren, te verspreiden en door te geven via elk medium of bestandsformaat • het werk te bewerken - te remixen, te veranderen en afgeleide werken te maken • voor alle doeleinden, inclusief commerciële doeleinden. Meer informatie over de CC Naamsvermelding-GelijkDelen 3.0 Nederland licentie

Aanvullende informatie over dit lesmateriaal

Van dit lesmateriaal is de volgende aanvullende informatie beschikbaar:

Leerniveau	; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ;
Leerinhoud en doelen	; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ;
Eindgebruiker	leerling/student
Moeilijkheidsgraad	gemiddeld
Trefwoorden	e-klassen rearrangeerbaar

Bronnen

Bron	Type
https://maken.wikiwijs.nl/userfiles/6d8ae6bf69e72c92e010ce839bf909c6.swf https://maken.wikiwijs.nl/userfiles/6d8ae6bf69e72c92e010ce839bf909c6.swf	Video
https://maken.wikiwijs.nl/userfiles/3b0218c1a21ad8186e28307989f112b1.swf https://maken.wikiwijs.nl/userfiles/3b0218c1a21ad8186e28307989f112b1.swf	Video
https://maken.wikiwijs.nl/userfiles/607873d1121e1422c8189e5f862ca931.swf https://maken.wikiwijs.nl/userfiles/607873d1121e1422c8189e5f862ca931.swf	Video

Gebruikte Wikiwijs Arrangementen

Academy, Its. (z.d.). *test*. https://maken.wikiwijs.nl/45635/test