

# LEER ZE REKENEN

PRAKTISCHE INZICHTEN UIT ONDERZOEK  
VOOR LERAREN BASISONDERWIJS

BEA ROS, MARIAN HICKENDORFF, RONALD KEIJZER & HANS VAN LUIT



# LEER ZE REKENEN

## Leer ze rekenen

Praktische inzichten uit onderzoek voor leraren basisonderwijs

Redactie: Marian Hickendorff, Ronald Keijzer en Hans van Luit

Productiebegeleiding: Monique Marreveld

Auteur: Bea Ros

Teksten interviews: Paulien de Jong

Eindredactie: Machiel van Zanten

Beeld omslag: Tom van Limpt

Beeld binnenwerk: Shutterstock

Omslag en vormgeving: FIZZ | Digital Agency

Uitgever: Ten Brink Uitgevers, Meppel

Druk: Drukkerij Bariet Ten Brink, Meppel

Dit boek is tot stand gekomen door financiële bijdragen van elf schoolbesturen, het Lerarencollectief en de PO-Raad.



ISBN: 978-90-77866-68-9

NUR: 840

1e druk januari 2022

Bestellen via [www.didactiefonline.nl](http://www.didactiefonline.nl)

Downloaden op [www.leerzerekenen.nl](http://www.leerzerekenen.nl)

© TBU / Bea Ros

Bij het boek hoort een online dossier met alle doorleessuggesties, zie [www.didactiefonline.nl](http://www.didactiefonline.nl).

# LEER ZE REKENEN

PRAKTISCHE INZICHTEN UIT ONDERZOEK VOOR  
LERAREN BASISONDERWIJS

Bea Ros, Marian Hickendorff, Ronald Keijzer & Hans van Luit  
Ten Brink Uitgevers

**LEER ZE REKENEN**

# INHOUD

Voorwoord.....	10
Inleiding .....	12

**I. Wat is rekenen?..... 16**

1. Ruimtelijk inzicht kun je trainen .....	18
2. Er leiden meer rekenwegen naar Rome.....	22
3. Leren schatten is van levensbelang .....	26
4. Gun je leerlingen een Eureka-momentje .....	30
5. Streetwise rekenen .....	34

*In de praktijk*

Metten met één maat .....	20
Schatten als hulpmiddel .....	28

**II. Beginnend en aanvankelijk rekenen..... 38**

6. Een prentenboek in de rekenles .....	40
7. Laat ze lopen op een getallenlijn .....	45
8. Waarom vingertellen even nuttig is.....	49
9. Zonder tellen komen ze er niet .....	53
10. Hoe leerlingen zich tafels eigen maken.....	58
11. Via concreet naar abstract .....	63

*In de praktijk*

Boeken met rekenhaakjes.....	42
Lichaam spreekt boekdelen.....	47
Verbieden heeft geen zin .....	50
Getallen zijn overal.....	55
Keersommen fröbelen .....	65

**III. Gevorderd rekenen..... 68**

12. Grip op breuken .....	70
13. Hoe het werkgeheugen werkt.....	75
14. De rekenradertjes in ons hoofd.....	80
15. Meer leven in de rekenles .....	84
16. Creatief met rekenen .....	89

<i>In de praktijk</i>	
Gelijknamige pannenkoeken .....	72
'Spelen' met werkgeheugen .....	76
Talig rekenen .....	86

**IV. Inspelen op rekenontwikkeling** ..... 94

17. Een logische lijn in rekenen .....	96
18. Ben jij voorbereid op fouten van leerlingen? .....	101
19. Recept voor krachtig rekenonderwijs .....	104
20. De kunst van differentiëren .....	109
21. Jij bent de sleutel .....	114

<i>In de praktijk</i>	
Doelgericht lesgeven .....	98
Eenvoud siert de rekenles .....	106
Beelden opbouwen .....	111

**V. Bijzondere rekenbehoeften** ..... 118

22. Breek de ban van bange rekenaars .....	120
23. Grijp vroeg in bij twijfel .....	125
24. Beste hulp voor zorgleerling .....	129
25. Geef talenten groeikansen op maat .....	133

<i>In de praktijk</i>	
Niet forceren, maar loslaten .....	122
Stof voor rekentalenten .....	134
Over de makers .....	138





# VOORWOORD

Rekenen vormt samen met taal en lezen het fundament onder het curriculum van de basisschool. Daarbij vormt rekenen een taal apart die leerlingen zich moeten eigen maken, namelijk de taal van getallen, hoeveelheden en patronen. Om leerlingen hierin in te wijden, hebben leraren een stevige kennisbasis én effectief rekenonderwijs nodig.

Het internationale en nationale rekenonderzoek bevat een schat aan kennis en inzichten waarmee leraren hun voordeel kunnen doen. Uit deze schatkamer selecteerden rekenonderzoekers Marian Hickendorff, Ronald Keijzer en Hans van Luit 25 invloedrijke wetenschappelijke artikelen over rekenen en rekenonderwijs. Onderwijsjournalist Bea Ros vertaalde de inzichten hieruit uitstekend naar de praktijk van de leraar. Met dit boek hopen we dat *evidence informed* werken in het rekenonderwijs wordt bevorderd.

*Leer ze rekenen* is – net als de eerdere delen uit de *Didactief*-reeks: *Op de schouders van reuzen*, *Werk maken van gelijke kansen* en *Leer ze lezen* mogelijk gemaakt door de samenwerking tussen besturen in het primair onderwijs, de PO-Raad, de wetenschap en *Didactief*. Dit keer sloot het Lerarencollectief zich bij hen aan. In diverse hoofdstukken vertellen leraren van de betrokken schoolbesturen in praktijkkaders hoe ze de theorie toepassen in hun klas.

*Leer ze rekenen* is verkrijgbaar in gedrukte vorm, maar ook gratis te downloaden op [Leerzerekenen.nl](http://Leerzerekenen.nl).

*Namens alle partners die deze publicatie mogelijk hebben gemaakt,*

*Harrie van de Ven*

*Voorzitter college van bestuur Optimus*

# INLEIDING

Niemand zal betwisten dat reken-wiskundeonderwijs op de basisschool essentieel is. Rekenen is een basisvaardigheid, net als lezen en schrijven. Over hoe je leerlingen daarin het best kunt onderwijzen, bestaat in Nederland al jaren discussie. Dit boek gaat voorbij aan deze strijd, en kijkt wat decennia aan onderzoek ons vertellen over hoe kinderen leren rekenen en wat goed rekenonderwijs is. Dat staat los van de vraag of je nu meer traditioneel georiënteerd bent of meer realistisch.

Aan rekenen en rekenonderwijs hebben onderzoekers de afgelopen jaren enorm veel aandacht besteed. Was de verhouding tussen het aantal wetenschappelijke publicaties over lezen en rekenen twee decennia geleden nog 20:1, nu is dat 2:1. Er is dus veel meer bekend geworden over rekenen en in dit boek zetten we de belangrijkste bevindingen op een rijtje. Eendrachtig heeft de redactie artikelen bij elkaar gezocht die onomstreden zijn en die jou en je leerlingen verder helpen.

In de eerste plaats buigen we ons over de vraag wat rekenen eigenlijk is. Het is een proces waarin we de tastbare wereld om ons heen (her)ordenen met tal van bewerkingen en concepten. Dit doen leerlingen binnen de domeinen 'Wiskundig inzicht en handelen', 'Getallen en bewerkingen' en 'Meten en meetkunde'. Rekenen, of meer precies rekenen-wiskunde (in dit boek gebruiken we beide termen om naar het hele vakgebied te verwijzen), is veelzijdig.

Gelukkig hebben leerlingen lang de tijd om die veelzijdigheid te doorgronden en in de vingers te krijgen. Ze doen al ruim voordat ze naar school gaan ervaring op met concrete hoeveelheden en met de taal die daarnaar verwijst; ze tellen objecten (hun poppen of snoepjes) en weten hoe oud ze zijn (hoeveel jaren) of hoe lang (aantal centimeters). Vanaf groep 1 werk je in de klas aan het ontwikkelen van rekenvaardigheid. Je verbindt rekenbewerkingen met hoeveelheden en je besteedt veel tijd aan het

omgaan met concrete materialen die je koppelt aan abstracte cijfersymbolen. Deels gaat het daarbij al om het leren berekenen, maar deels ook om het probleemoplossend en logisch redenerend denken en het verwerven van rekenconcepten. Naarmate leerlingen de basisschool doorlopen, maken ze zich rekenkennis eigen waarmee ze passende berekeningen kunnen uitvoeren om tot adequate oplossingen te komen. Ze leren zowel basiskennis te automatiseren als oplossingsstrategieën met verschillende reken- en denkstappen toe te passen.

Uit internationaal vergelijkingsonderzoek blijkt dat Nederland relatief weinig sterke rekenaars kent en dat de meeste scholen en leraren niet bijzonder prestatiegericht zijn. Dit boek helpt je de resultaten van je leerlingen *evidence informed* te verbeteren. Het bestaat uit vijf delen. In het eerste deel, *Wat is rekenen?*, laten we zien dat rekenen niet alleen uit getallen en bewerkingen bestaat, maar dat daar veel meer bij komt kijken, zoals ruimtelijk inzicht en het belang van schatten. In je onderwijs is het verder belangrijk om de vertaalslag te benadrukken tussen de betekenis van getallen en de abstracte weergave met cijfers. Daarbij is het goed om in de gaten te houden dat rekenen op school en rekenen in het leven van alledag niet altijd gelijk opgaan.

In het tweede deel, *Beginnend en aanvankelijk rekenen*, bespreken we onderzoeksbevindingen die van belang zijn voor de eerste jaren van het (reken) onderwijs. Aan bod komen onder meer het belang van voorbereidend rekenen in de kleuterfase en van vingertellen (en het weer afbouwen daarvan in groep 4). We laten zien dat je rekenen kunt stimuleren door prentenboeken voor te lezen en dat de getallenlijn beter beklijft als leerlingen daadwerkelijk over zo'n lijn kunnen lopen. Tot slot bespreken we hoe leerlingen leren om basisbewerkingen te automatiseren.

In het derde deel, *Gevorderd rekenen*, kun je lezen over de relatie tussen rekenen en het werkgeheugen, aandacht en taal. Verder komen aan bod: de rol van creativiteit in de reken-wiskundeles en manieren om leerlingen talige opgaven te leren oplossen. Ook vind je in dit deel tips over hoe je leerlingen kunt helpen oplossingsstrategieën flexibel te gebruiken en om breuken net iets minder lastig te maken.

In het vierde deel, *Inspelen op de rekenontwikkeling*, beschrijven we wat jij als leraar idealiter in huis hebt om goed rekenonderwijs te kunnen geven. Dit vraagt bijvoorbeeld om vakdidactische kennis én gedegen vakkennis. Ook kun je materialen met zorg en op maat inzetten en met leerlijnen werken die de ontwikkeling van leerlingen volgen. Onderling overleg met je teamleden is dan essentieel. Verder is het van belang om (flexibele) differentiatie toe te passen en bij leerlingen die moeite hebben met rekenprocedures, directe instructie in te zetten. Maar onderzoek laat tevens zien dat kinderen zelf ook actief moeten zijn om zich het rekenen eigen te maken. Rekenonderwijs is dus geen of-of, maar en-en.

Het vijfde deel ten slotte, *Bijzondere rekenbehoeften*, is gewijd aan hoe je alle leerlingen kunt bedienen. Kleuters die achterblijven in voorbereidend rekenen hebben bijvoorbeeld expliciete ondersteuning nodig. Ook zorgleerlingen en kinderen met dyscalculie behoeven maatwerk. Leerlingen die het makkelijk aangaat, hebben juist behoefte aan een uitdagend en rijk aanbod. Onderzoek laat zien dat rekenangst het leren rekenen belemmert en wat je daartegen kunt doen.

Ieder hoofdstuk kent dezelfde opbouw: we vertellen waarom het wetenschappelijke kernartikel zo belangrijk is, tot welke inzichten het leidt, wat de implicaties voor het onderwijs zijn en wat het bete-

kent voor je eigen klas. Per hoofdstuk vind je tips om verder te lezen. Bovendien vind je – verdeeld over het boek – diverse praktijkkaders, waarin leraren vertellen hoe zij de theorie vertalen naar hun klaslokaal.

We willen de deelnemende schoolbesturen, het Leraarencollectief, PO-Raad en onderwijsvakblad *Didactief* bedanken dat ze dit boek mogelijk hebben gemaakt. Ook danken we onze collega's Christian Bokhove en Lieven Verstraete voor hun kritisch meekijken met onze selectie van kernartikelen. Ten slotte zijn we de redactie en uitgever van vakblad *Volgens Bartjens* erkentelijk voor het online openbaar ter beschikking stellen van enkele achtergrondartikelen om verder te lezen.

Het (aan)leren van rekenen is niet altijd gemakkelijk, maar hopelijk biedt dit boek je handvatten om in je rekenonderwijs toe te passen.

*Bea Ros, Marian Hickendorff, Ronald Keijzer en Hans van Luit*





# I

# WAT IS REKENEN?

Rekenen is een taal apart. Namelijk die van getallen, hoeveelheden en afmetingen. Deze taal helpt om de wereld om ons heen te duiden en patronen te herkennen. Een landschap opgebouwd uit rechthoeken. Of zeven even grote porties friet.

In dit eerste deel staat die eigen taal van rekenen, oftewel het wezen van rekenen-wiskunde, centraal. We beschrijven waarom deze taal voor beginnelingen echt even wennen is. Leerlingen moeten, met jouw hulp, leren om voortdurend te pendelen tussen het concrete en het abstracte, tussen procedures en concepten, tussen doen en denken.

Rekenen omvat veel meer dan werken met getallen. Er komt ook ruimtelijk inzicht bij kijken en inschattingsvermogen. En om het extra lastig te maken: soms gaan rekenen op school en rekenen in het leven van alledag niet gelijk op. Ook dan hebben leerlingen jou hard nodig om bruggen te slaan.



# 1. RUIMTELIJK INZICHT KUN JE TRAINEN

**Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013).** The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352–402.

## INTRODUCTIE

Ken je het verhaal over de Londense taxichauffeurs? Die blijken allemaal een grote hippocampus te hebben. Dat is het hersengebied dat ons ruimtelijk inzicht bepaalt, dus hoe soepel we weten in te parkeren en hoe snel we de weg kunnen vinden. Het mooie van dit verhaal is: daar zijn ze niet mee geboren, dat is tijdens en door hun werk ontstaan. Deze taxichauffeurs vormden ruim tien jaar geleden een van de bewijzen voor wat hersenwetenschappers het plastische brein noemen: onze hersenfuncties groeien of slinken al naargelang we ze veel of weinig gebruiken.

Voor het onderwijs is dat goed nieuws. Van ruimtelijk inzicht is lang gedacht: je hebt het of je hebt het niet. Dat klopt dus niet. Het is wel degelijk te trainen. In een grote overzichtsstudie zetten David Uttal en zijn collega's alle bewijzen hierover op een rijtje. Bovendien hebben ze een heldere indeling ontwikkeld van wat ruimtelijk inzicht zoal inhoudt.

## HET IDEE

Ruimtelijk inzicht voorspelt hoe goed iemand is (of wordt) in de bèta- en techniekvakken. Het is daarmee, net als tekstbegrip, een voorwaarde voor een succesvolle schoolloopbaan.

***‘Meisjes hebben  
net zoveel baat  
bij training als jongens’***

Des te belangrijker, zo redeneerde Uttal, om te weten of je ruimtelijke vaardigheden kunt trainen. Dan immers kun je leerlingen een stevige basis meegeven. Om dat te onderzoeken, heeft hij samen met zes collega's 206 studies uit de periode tussen 1984 en 2009 naar het trainen van ruimtelijke vaardigheden onder de loep genomen. Hun meta-analyse geeft antwoord op de vraag of zulke trainingen effect

sorteren, voor hoelang, bij wie en of er sprake is van transfer naar nieuwe taken. We verklappen alvast het korte antwoord: de bevindingen waren positief.

## DE INZICHTEN

### Orde op zaken

Voordat Uttal en collega's de studies indoken, hielden ze zich eerst bezig met het begrip ruimtelijk inzicht. Want een eensluidende definitie was er nog niet. Waar hebben we het precies over? Gaat het bij ruimtelijk inzicht om visualisatie? Verbeeldingskracht? Oriëntatie? Patroonherkenning?



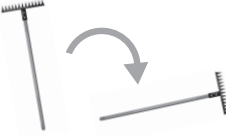

Dat inderdaad allemaal, en nog meer. Om orde op zaken te krijgen, ontwierpen Uttal en collega's een classificatie vanuit twee kenmerken: intrinsiek versus extrinsiek en statisch versus dynamisch (zie figuur op pagina 19).

Bij intrinsiek gaat het om het herkennen en verbeelden van losse objecten (een hark versus een schoffel of een driehoek versus een cirkel). Voeg je dynamiek toe, dan kun je losse objecten ook herkennen (of visualiseren) in omgedraaide vorm, binnenstebuiten of doormidden gesneden.

Bij extrinsiek gaat het om relaties tussen objecten. Waar bevind ik me bijvoorbeeld ten opzichte van het huis of van iemand anders? Kaartlezen is daarvan een voorbeeld. Voeg je hier weer dynamiek toe, dan gaat het om het inschatten van bewegingen tussen objecten. Denk aan autorijden of het geven van een voorzet op het voetbalveld.

### Training helpt

In de onderzochte studies ging het om verschillende soorten trainingen, zoals het spelen van videogames, een cursus van enkele weken en gerichte oefeningen. Allemaal sorteerden ze effect: na een training verbeterden de ruimtelijke vaardigheden van deelnemers meer dan die van leerlingen in controlegroepen.

	<b>intrinsiek</b> (binnen een object)	<b>extrinsiek</b> (tussen objecten)
<b>statisch</b>		
<b>dynamisch</b>		

Classificatie van ruimtelijke vaardigheden

## RUIMTEKRAKERS

De cognitiewetenschappen kennen verschillende klassieke ruimtekraakers: taken die onderzoekers graag gebruiken om te zien hoe goed iemands ruimtelijk inzicht is. Zo is er de *embedded figures task*: een tekening van een object waarin allerlei geometrische figuren verstopt zitten. Hoeveel driehoeken tel je, is dan bijvoorbeeld de vraag. Ontwikkelingspsycholoog Piaget bedacht de drie-bergentaak, waarbij een kind een afbeelding van drie bergen te zien krijgt en vervolgens gevraagd wordt zich voor te stellen hoe iemand aan de andere kant de bergen ziet. Andere klassiekers zijn papier vouwen en plaatjes roteren (hoe ziet deze figuur eruit als je hem linksom kantelt). Allemaal taken die een beroep doen op goed kijken en mentale visualisaties. En dan heb je ook nog een moderne klassieker: het computerspelletje Tetris, een combinatie van figuurherkenning en reactievermogen.

Positief is ook dat er geen noemenswaardige verschillen waren tussen effectmetingen direct of een paar dagen na de training. Dat betekent dat het geleerde beklijft (al is in geen enkele studie onderzocht of dit maanden later nog steeds het geval is). Bovendien konden leerlingen die voldoende intensieve training kregen, het geleerde toepassen op andere en nieuwe taken. Niet alleen op taken uit hetzelfde hokje van de figuur hierboven, maar ook op die uit andere hokjes.

## Gun ze een aanloop

Over het algemeen presteren jongens beter op ruimtelijke taken dan meisjes. Dat bleek ook nu weer. Maar het goede nieuws is dat meisjes net zoveel baat hebben bij training als jongens. Leerlingen met een lager startniveau leren meer. Wel verloopt hun leertraject vaak anders. Ze hebben even een aanloop nodig: in het begin gaat de verbetering trager om daarna te versnellen. Bij leerlingen die bij de start al beter zijn, is dat precies andersom, bij hen zit de winst vooral in het begin. Gun zwakke leerlingen dus de tijd om zichzelf te verbeteren.

## IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Ruimtelijk inzicht is zo'n eigenschap waarvan mensen al snel denken: je hebt het of je hebt het niet. Niets is minder waar, blijkt uit dit onderzoek van Uttal en zijn collega's: ruimtelijke vaardigheden zijn te trainen. De leerlingen in hun onderzoek werden er door oefening beter in.

Er is alle reden om daar op school aandacht aan te besteden, aangezien ruimtelijk inzicht een belangrijke voorspeller is voor succes in rekenen-wiskunde en andere bètavakken. Het verlaagt bovendien de drempel tot deze vakken. Met extra aandacht en oefening kunnen basisscholen leerlingen met een

zwakker ruimtelijk inzicht een stevige basis meegeven voor het voortgezet onderwijs, zodat jongens én meisjes bijvoorbeeld vaker exact durven kiezen.

## JOUW EIGEN KLAS

Ruimtelijke vaardigheden kun je trainen en je helpt leerlingen er enorm mee als je dat doet, ze hebben er een schoolleven lang profijt van. Je kunt ruimtelijk inzicht al vanaf de kleuterklas met speelse opdrachten oefenen. Samen vormen verkennen en bouwen met de blokkendoos, bijvoorbeeld. En als de toren dan staat, kun je kijken of die er van alle kanten hetzelfde uitziet. Je kunt met kinderen routes

in de  
praktijk

## METEN MET ÉÉN MAAT

Werken aan ruimtelijk inzicht van je leerlingen vraagt om eenduidigheid in didactiek, kennis, materiaal en tijdsinvestering. Dat weten Wout Plattel en Arvid Brandsma, die lesgeven in groep 6 en 7 van basisschool de Schatgraaf in Arnhem, inmiddels dondersgoed. Ze deden in 2020-2021 onderzoek naar de rekenopbrengsten van hun groepen en de aanpak van rekenonderwijs vanuit de methode- en Cito-toetsen. De uitkomst: de scores voor meten en rekenen met tijd en geld waren wisselend, de verschillen in resultaten tussen de klassen groot. De ene leraar besteedde meer tijd aan meetkunde dan de andere, de een deed vooral opdrachten op het digibord of uit het boek, de ander ging juist meer praktisch met meetopdrachten aan de slag. Brandsma: 'Er waren zelfs verschillen in materiaal. In elke (parallel)klas hing bijvoorbeeld een andere poster voor het metriek stelsel. De iconen waren niet duidelijk en er waren geen afspraken over het gebruik. Nu wel.' Plattel: 'Voor hoeveelheden, inhouden en gewichten maken we gebruik van referentiematen. Een pak suiker staat voor een kilo, de breedte van je nagel is 1 cm, een pak melk is

1 liter, een appel is 100 gram en een soeplepel is een deciliter.'

Brandsma: 'Bij oppervlakten plakken we met tape een vierkante meter af of knippen we deze uit karton om de grootte inzichtelijk te maken, en dan laten we de leerlingen bijvoorbeeld het lokaal opmeten. Hierbij moeten ze wel de formule lengte x breedte gebruiken.'

Met het zelf maken van bouwwerken trainen de leraren het ruimtelijk inzicht. 'We bespreken dan de verschillende aanzichten, die leerlingen ook natekenen, en we laten hen nadenken hoe het bouwwerk er van de andere kant uitziet,' zegt Plattel.

Ruimtelijk inzicht kun je ook verbeteren door het vakoverstijgend aan te bieden. Bij wereldoriëntatie verduidelijkt Brandsma de stand van de zon met een zaklamp. 'De kinderen ervaren hierbij dat de richting en de lengte van de schaduw veranderen door de positie van de lichtbron, de zon.' Zijn de positieve effecten van hun meten met één maat al zichtbaar? 'Dat moet nog blijken uit de Cito-scores,' zegt Plattel, 'maar we zien zeker verbetering in alle groepen.'

uitstippelen op het schoolplein en samen uitzoeken hoe zo'n route er op papier zou uitzien. Welke vorm past er wel in deze doos en welke niet? Wat zou in een vierkant pakketje kunnen zitten en wat niet? Gebruik vooral ook ruimtelijke woorden: van boven, van onderen, achterkant, voorkant, rond, driehoekig. Zo maken kinderen zich de taal eigen om op een ruimtelijke manier te denken. In de hogere klassen kun je ruimtelijke oefeningen – behalve bij rekenen – eenvoudig invoegen in vak-

***'Gun zwakke leerlingen  
de tijd om zich te verbeteren'***

ken. In de sportles zitten die er vanzelf al in. Maar denk ook eens aan de zaakvakken. Geef topografie bijvoorbeeld een ruimtelijk tintje. En in de tekenles kun je een drie-bergen-achtige opdracht (zie kader op pagina 19) geven: teken eens hoe het er aan de achterkant uitziet. Of hoe zou je een boom weer-geven in geometrische figuren? Samen kijken naar abstracte kunst (Mondriaan of Picasso) wordt zo een dubbel ruimtelijk avontuur.

**LITERATUUR**

**Gebruikte wetenschappelijke bron**

**Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013).** The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352–402. doi:10.1037/a0028446

**Verder lezen**

Dit artikel biedt tips over hoe je met praktische opdrachten abstracte begrippen kunt verduidelijken. *Leraar24.nl*.

Met en meetkunde: zo maak je abstracte rekenbegrippen concreet.

<https://www.leraar24.nl/69958/meten-en-meetkunde-zo-maak-je-abstracte-rekenbegrippen-concreet/>

**OM IN TE LIJSTEN**

- Ruimtelijk inzicht voorspelt hoe goed je bent in rekenen-wiskunde en andere bètavakken.
- Leerlingen met een lager startniveau leren meer door training dan leerlingen die ruimtelijk al vaardig zijn.
- Ruimtelijke vaardigheden kun je verbeteren door op een speelse manier te trainen.

## 2. ER LEIDEN MEER REKENWEGEN NAAR ROME

**Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015).**

Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, 27(4), 587–597.

### INTRODUCTIE

Een taart eerlijk verdelen of een etentje samsam betalen, we doen het zo ongeveer dagelijks. Om geen ruzie te krijgen met je familie of vrienden moet je twee dingen weten: wat is delen en hoe doe je dat? Dit wat en hoe vormen de centrale elementen in de rekenles. Onderzoekers noemen dat conceptuele en procedurele kennis. Tot zover zijn ze het roerend eens. Maar over de vraag welke soort kennis het belangrijkste is, willen ze nog weleens kibbelen. Evenals over de vraag wat je leerlingen het eerst leert: de concepten of de procedures?

In de VS ging de rekenoorlog (*math wars*) er nog een graadje verhitser aan toe dan in Nederland (zie kader op pagina 23). Bethany Rittle-Johnson, Michael Schneider en Jon Star, alle drie doorgewinterde rotten in het rekenonderzoek, besloten orde op zaken te stellen. In hun artikel ontkrachten ze de mythe dat procedurele kennis minder belangrijk zou zijn. Beide soorten kennis versterken elkaar juist.

### HET IDEE

Bij conceptuele kennis gaat het om inzicht in en begrip van abstracte wiskundige concepten en principes (zoals vermenigvuldigen, verhoudingen of hele getallen). Procedurele kennis is weten hoe je bepaalde bewerkingen uitvoert, bijvoorbeeld hoe je breuken vermenigvuldigt of hoe je het snelst kunt optellen met honderdtallen.

In de VS was de mainstream opvatting dat conceptuele kennis procedurele kennis ondersteunt. Dus hoe meer inzicht je hebt in begrippen, hoe makkelijker het voor leerlingen is om bewerkingen te snappen en toe te passen. Maar of procedurele kennis omgekeerd ook tot beter begrip leidt, daarover waren de meningen sterk verdeeld.

Dat is onhandig, vonden Rittle-Johnson en haar collega's. Want pas als daar duidelijkheid over is, weet je hoe je het best je reken-wiskundeonderwijs kunt

inrichten. En dus besloten ze om bewijzen uit eerder onderzoek te verzamelen over twee zaken: Is er inderdaad sprake van eenrichtingsverkeer (van concept naar procedure) of beïnvloeden beide soorten kennis elkaar juist? En in welke volgorde kun je ze het best aanleren?

### DE INZICHTEN

#### Voorspellende kracht

Wat betekent het precies als je zegt dat conceptuele kennis het startpunt is en procedurele kennis ondersteunt? De drie rekenonderzoekers begonnen met logisch nadenken. Als, zo redeneerden ze, je kennis A (concepten) nodig hebt om kennis B (procedures) te verwerven, dan voorspelt de mate van kennis A hoe goed iemand wordt in kennis B.

Daar vonden Rittle-Johnson en haar collega's inderdaad bewijzen voor. Maar ze vonden ook veel bewijzen voor het omgekeerde: de mate van procedurele kennis (B) voorspelt hoeveel begrip (A) leerlingen hebben. In een studie werd bijvoorbeeld gemeten hoe goed leerlingen waren in breuken,

***'Inzicht vergroot de vaardigheid, oefenen bevordert het inzicht'***

eerst halverwege groep 6 en daarna nog een keer halverwege groep 7. Wat bleek: beide soorten kennis voorspelden elkaar. Hoe beter leerlingen in groep 6 waren in het toepassen van bewerkingen, hoe meer begrip ze in groep 7 hadden, en evenzo voorspelde meer begrip in groep 6 een betere beheersing van de bewerkingen in groep 7.

Die bewijzen voor een tweerichtingsverkeer kwamen ook uit experimentele studies. Zo had Rittle-Johnson eens basisschoolkinderen in drie groepen verdeeld: de eerste kreeg les in een bepaalde bewerking, de tweede in een bepaald concept en de derde groep

kreeg geen les (controlegroep). De proceduregroep bleek ook iets bijgeleerd te hebben over het concept en de conceptgroep iets over procedures, zo bleek uit vergelijking met de controlegroep. Door de ene soort kennis te ontwikkelen, versterk je dus ook de andere. Daarmee hadden de drie rekenonderzoekers de heersende mythe ontkracht dat procedurele kennis pas na conceptuele kennis volgt. Nee, beide soorten kennis ontwikkelen zich parallel en versterken elkaar.

## NEDERLANDSE REKENOORLOG

Nederland kent zijn eigen rekenoorlog en die lijkt inhoudelijk wel enigszins op de Amerikaanse. De traditionalisten hameren op het belang van vaardigheden: veel oefenen van kale sommen en herhalen. De realisten bepleiten juist het belang van inzicht en begripsvorming en werken met realistische contexten. Beide besteden aandacht aan procedurele en conceptuele kennis, alleen verschillen ze van mening over de vraag waar de focus moet liggen.

Hoewel de tegenstelling nog steeds soms opspeelt, weten we al jaren dat het voor het rekenniveau van leerlingen niet uitmaakt of ze les krijgen volgens de traditionele of realistische didactiek. Al in 2009 bracht de KNAW hierover een rapport uit: niet de didactiek, maar de manier waarop de leraar die toepast, is bepalend. Dezelfde conclusie trokken Marian Hickendorff en collega's in hun reviewstudie (2017) naar het rekenonderwijs op de basisschool. De nieuwste lesmethodes mengen overigens steeds vaker elementen uit beide aanpakken.

## Favoriete volgorde?

Tijd voor de volgende denkstap. Ook al is er sprake van tweerichtingsverkeer, dan nog kan het effectiever zijn om per rekenthema eerst de ene soort kennis en daarna pas de andere aan te leren. In de VS is de eerst-concept-dan-procedure-aanpak dominant. Is dat inderdaad de beste aanpak of werken andere manieren ook?

Rechtstreekse bewijzen konden Rittle-Johnson en haar collega's niet vinden: er was domweg geen enkele studie die de effectiviteit van beide volgordes had vergeleken. Hooguit vergeleken ze traditioneel rekenonderwijs (louter oefenen van procedures) met vernieuwingsonderwijs, waarin juist instructie in concepten centraal stond. Dat is geen eerlijke vergelijking, aldus de drie rekenonderzoekers. Immers: om goed te leren rekenen, gaat het niet om of-of, maar om en-en, je hebt én vaardigheden én begrip nodig. In diverse studies vonden ze wel aanwijzingen dat starten met een korte instructie in concepten beter is dan langdurig stilstaan bij concepten. De conceptuele kennis hoeft nog niet uitgehard te zijn voordat je met het oefenen van procedures begint. Waarschijnlijk werkt juist de afwisseling goed: een korte uitleg over concepten, oefenen met bijbehorende bewerkingen en dan telkens ook weer teruggrijpen naar die concepten. Zo kunnen beide soorten kennis zich voortdurend verdiepen.

## IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Je kunt best autorijden zonder te begrijpen hoe de motor je voertuig aandrijft. En gelukkig kun je ook heel goed tekstverwerken, Zoomen of een Excelbestand invullen zonder iets te snappen van bits en bytes. Voor rekenen (en veel andere schoolvakken) ligt dat anders. Daar telt zowel het wat als het hoe. Het hedendaagse rekenonderwijs is daar ook steeds meer op ingericht. De tijd van alleen maar cijferen zonder dat leerlingen weten wat ze aan het doen

zijn, ligt ver achter ons. En scholen waar leerlingen alleen maar bezig zijn met concepten en begrip zonder te oefenen, zijn er ook nauwelijks.

Rittle-Johnson en haar collega's hebben ons inzicht verdiept in beide soorten kennis: conceptueel en procedureel. Ze hebben overtuigend laten zien dat die twee elkaar versterken en verdiepen. Inzicht en begrip vergroten de vaardigheid en omgekeerd bevordert het oefenen van vaardigheden het inzicht en begrip.

***‘Om goed te leren rekenen,  
heb je én vaardigheden  
én begrip nodig’***

Terecht dus dat voor beide in de rekenles aandacht is. Er zit speelruimte in de precieze verhouding en volgorde waarin leraren dat doen. Zolang ze beide soorten kennis – inzicht én vaardigheden – maar ruimschoots aan bod laten komen, leiden er meer rekenwegen naar Rome.

## **JOUW EIGEN KLAS**

Het zijn vast niet de begrippen die je zelf zou gebruiken, maar in je lessen ben je voortdurend bezig met conceptuele en procedurele kennis. Als je een nieuw rekenonderdeel gaat behandelen, vertel je daar in je instructie waarschijnlijk eerst iets over. Wat jullie gaan doen (bijvoorbeeld rekenen met honderdtallen), wat dat precies is en waarom het handig is dat te kunnen. Vervolgens doe je voor hoe je dat doet en welke stappen je uitvoert, en ga je samen met de klas opgaven oefenen.

De boodschap van Rittle-Johnson en haar collega's is dat juist die combinatie van het aanbieden van beide soorten kennis heel krachtig is. Ze versterken elkaar en ontwikkelen zich hand in hand. Begrip van wat vermenigvuldigen is en hoe het zich bijvoorbeeld verhoudt tot optellen –  $5 \times 8$  is hetzelfde als  $8 + 8 + 8$

– helpt leerlingen bij het maken van een keersom. En als je weet wat je aan het doen bent, begrijp je ook beter waarom je iets fout doet. Omgekeerd verdiep je al rekenend je begrip.

Daarom werkt juist de afwisseling goed. Een te lange instructie over concepten blijft te abstract, door ze te gaan toepassen valt het kwartje. Dingen die leerlingen tijdens het rekenen tegenkomen, vormen weer mooie aangrijpingspunten om het inzicht in de concepten te verdiepen. Als een leerling bijvoorbeeld steeds dezelfde fout maakt, werkt het goed om even het begrip te toetsen: weet je nog wat je aan het doen bent? Zo help je leerlingen om grip te krijgen op het wat en het hoe.

### **OM IN TE LIJSTEN**

- Om te leren rekenen, moet je weten hoe je iets doet en begrijpen wat je doet.
- Begrip en vaardigheden zijn even belangrijk.
- Toepassen versterkt het begrip van concepten en begrip versterkt de rekenvaardigheid.
- Wissel oefenen en nadenken over de achterliggende concepten voortdurend af.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015).** Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, 27(4), 587–597. doi:10.1007/s10648-015-9302-x

### Verder lezen

Dit KNAW-rapport laat zien dat het voor het reken-niveau van leerlingen niet uitmaakt of je kiest voor de realistische of traditionalistische didactiek.

KNAW. (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering.*

<https://www.knaw.nl/nl/actueel/publicaties/rekenonderwijs-op-de-basisschool>

Deze reviewstudie concludeert eveneens dat het niet uitmaakt of je kiest voor de realistische of traditionalistische aanpak.

Hickendorff, M. et al. (2017). *Rekenen op de basisschool. Review van de samenhang tussen beïnvloedbare factoren in het onderwijsleerproces en de rekenwiskundeprestaties van basisschoolleerlingen.* Universiteit Leiden/NRO.

<https://www.nro.nl/sites/nro/files/migrate/405-17-920-010-Rapport-NRO-Review-Rekenenen.pdf>



# 3. LEREN SCHATTEN IS VAN LEVENSBELANG

Halberda, J., Mazzocco, M. M. M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, 455(7213), 665–668.

## INTRODUCTIE

Honden kiezen bij voorkeur de best gevulde voederbak. Vogels weten feilloos welke krentenboom de meeste vruchten draagt. En wolven weten precies hoe groot hun roedel moet zijn om een eland op te jagen, namelijk zes tot acht. Voor een bizon moeten ze beslist met meer zijn (minimaal negen, liefst dertien).

Gevoel voor hoeveelheden is letterlijk van levensbelang. Het is dan ook een natuurlijke eigenschap, eentje die alle dieren, mensen inclusief, delen. Maar mensen zijn, voor zover we weten, de enige soort die er naast dit evolutionaire schattingssysteem nog een preciezer getsysteem op na houdt: rekenen-wiskunde.

Justin Halberda, Michèle Mazzocco en Lisa Feigenson hebben aangetoond dat kunnen schatten ook voor reken-wiskundige vaardigheden van vitaal belang is. Ze publiceerden hun ontdekking in het wetenschappelijke toptijdschrift *Nature*.

## HET IDEE

Alle dieren hebben een natuurlijk gevoel voor hoeveelheden. Kenmerkend voor dit natuurlijke getsysteem is dat het onnauwkeurig is. Dieren of baby's hebben wel een gevoel voor meer en minder of veel en weinig, maar ze kunnen niet tellen. Het verschil

***‘Door te rekenen worden leerlingen beter in schatten en door beter te schatten, gaan ze beter rekenen’***

tussen drie en vier zien ze bijvoorbeeld niet. Dit vermogen noemen wetenschappers het *approximate number system* (ANS), vrij vertaald een schattingssysteem of relatief getalbegrip.

Om wel nauwkeurig hoeveelheden te kunnen onderscheiden, is een preciezer systeem nodig. Eentje dat gebruik kan maken van telwoorden en symbolen,

van taal dus. Zo'n systeem hebben mensen ontwikkeld: rekenen-wiskunde. Dit zogeheten symbolisch of talig getsysteem is niet van nature gegeven, maar moet je aanleren.

Hoe verhouden beide getsystemen zich tot elkaar? Dat was de vraag die Halberda en collega's zich stelden. Ze wilden vooral weten of er een verband is tussen hoe goed mensen kunnen schatten en hun prestaties in rekenen-wiskunde. Om dat te ontdekken, volgden ze de ontwikkeling van 64 kinderen gedurende de basisschoolleeftijd (5-11 jaar). Jaarlijks namen de onderzoekers reken- en algemene intelligentietoetsen af. En toen de leerlingen 14 jaar waren, testten ze hun vermogen om te schatten.

## DE INZICHTEN

Met een stippentest (zie kader op pagina 27) konden de onderzoekers meten hoe goed de veertienjarigen waren in schatten. Ze zagen veel verschillen in de testscores. Sommige tieners konden nauwkeuriger schatten dan andere. De grote vraag: verklaptten deze schattingsscores ook iets over de eerdere rekenprestaties van deze leerlingen?

### Duidelijk verband

Het antwoord op die vraag is bevestigend. Hoe nauwkeuriger de schattingen, hoe beter de rekenprestaties. Met terugwerkende kracht konden de scores op de stippentest dus voorspellen hoe goed iemand in elke groep van de basisschool in rekenen was. Dat verband bleef ook overeind nadat de onderzoekers andere invloeden zoals intelligentie en werkgeheugen eruit hadden gefilterd.

Dat betekent dat er een duidelijk verband is tussen beide getsystemen. Hierbij gaat het om tweerichtingsverkeer. Een goed ontwikkeld schattingvermogen vergemakkelijkt het aanleren van het symbolische systeem. Dit blijkt ook uit neuro-cognitief onderzoek: tijdens het doen van rekenen-

wiskundetaken is ook het schattende hersendomein actief. Omgekeerd kan vaardigheid in rekenen-wiskunde het natuurlijke systeem aanscherpen. Ook daar zijn aanwijzingen voor, vanuit de antropologie: bij volken die geen formeel getalsysteem kennen of waar de taal qua telwoorden minder fijnmazig is, is het schattingsvermogen globaler.

## IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Het onderzoek van Halberda en collega's biedt inzicht in (het ontstaan van) menselijk getalbegrip. Dit kent twee fundamenten: een natuurlijk en een aangeleerd systeem. Van nature heeft iedereen een

### DE STIPPENTEST

Mensen kunnen van nature hoeveelheden in één oogopslag inschatten. Dat is nodig, zodat we snel gevaar of de beste voedselplekken herkennen. Maar de een is daar wel beter in dan de ander. Halberda en collega's ontwikkelden een even simpele als ingenieuze manier om dit natuurlijke schattingsvermogen te meten: de stippentest. De tieners in hun onderzoek kregen op een computerscherm telkens heel kort, tweehonderd milliseconden, een verzameling blauwe en gele stippen te zien. Te kort om ze allemaal te kunnen tellen, maar lang genoeg om ze te schatten. De tieners moesten daarna vertellen van welke kleur ze de meeste bolletjes zagen. Daarvoor kregen ze net zo lang de tijd als ze wilden en desgewenst konden ze hun antwoord ook bijstellen. In totaal deden ze dit tachtig keer per test. Het aantal goede antwoorden was de maat voor hoe goed hun schattingsvermogen was ontwikkeld.

globaal begrip van hoeveelheden. Scholen kunnen, door hierbij aan te haken en erop in te spelen, het aanleren van het formele systeem, rekenen-wiskunde, vergemakkelijken. Dit onderzoek onderstreept dus het belang van aandacht besteden aan schatten.

Rekenonderwijs kun je definiëren als het taal geven aan datgene wat leerlingen uit zichzelf al zo ongeveer aanvoelen. Die taal – en daaronder vallen niet alleen woorden, maar ook symbolen als het plus- of wortelteken en formules – verfijnt en verscherpt het natuurlijke systeem. Zo worden leerlingen door te rekenen beter in schatten en door beter te schatten gaan ze beter rekenen.

## JOUW EIGEN KLAS

Waarschijnlijk besteed je in je rekenlessen al aandacht aan schatten en schattend rekenen. Het onderzoek van Halberda en collega's maakt nog eens duidelijk waarom dat belangrijk is. Je verscherpt hiermee niet alleen het natuurlijke getalbegrip van je leerlingen, maar slaat ook een brug tussen wat ze van nature al zo'n beetje kennen en wat ze moeten leren.

### ***'Met schattend rekenen versterk je het gevoel voor verhoudingen tussen getallen'***

In elke groep kun je aandacht besteden aan schattend rekenen. In groep 1 gebeurt dat nog speels. Bijvoorbeeld: Welke boom staat dichtst bij het klimrek? Zullen we het eens samen nalopen? Of: wie heeft het langste haar in de klas? Past dit pakje melk in dit glas of heb ik een groter nodig? In hogere groepen worden de schattingstaken complexer en passend bij waar je in de rekenles mee bezig bent. Bijvoorbeeld: Hoe vaak past deze lat van één meter in ons klaslokaal? Of in het raam? Of welk getal, 117 of 89, ligt dichtst bij 100?

Met aandacht voor schattend rekenen versterk je het gevoel voor verhoudingen tussen getallen. In plaats van een opgave direct uit te rekenen, leren leerlingen om het antwoord bij benadering te geven. Dit is wat anders dan zomaar raden naar het antwoord, het gaat om een beredeneerde schatting. Dat is iets wat je leerlingen expliciet moet voordoen en leren. Wie goed is in schattend rekenen, kan daarmee eigen

berekeningen checken: dit antwoord kan nooit goed zijn, dus ik reken het nog eens na.

Het samen bespreken van schattingen is belangrijk. Laat leerlingen vertellen hoe ze tot hun schatting komen. Verrijk hun rekenwoordenschat door hierover te praten. Zo help je hen om de brug te slaan tussen het natuurlijke en het formele getselsysteem.

in de  
praktijk

## SCHATTEN ALS HULPMIDDEL

‘Hoe je schattend rekenen kunt versterken? Maak er geen aparte les van, maar pas het toe bij alle rekenlessen’, zegt Carola van Outvorst van basisschool Hertogin Johanna Locatie A.

‘Leerlingen ervaren schattend rekenen soms als een rekensom an sich. Wij proberen ze te laten ervaren dat het vooral een makkelijk controle-hulpmiddel is.’

Van Outvorst geeft les in groep 5/6 en is sinds 2015 rekencoördinator. Schatten zit op haar school in Oss bijna door iedere rekenles verweven. ‘Bij contextopgaven maar ook bij het meten van tijd, oppervlakte, omtrek of bijvoorbeeld hoeveel liter water er in een zwembad gaat.’

De school gebruikt bij veel klassikale rekenlessen het drieslagmodel, waarin schattend rekenen een vaste plek heeft. In elk lokaal hangt onder het bord een kinderversie van het model. Bovenin (bol 1) staat: wat moet ik uitrekenen? Rechts onder (bol 2): wat is de rekensom? Linksonder (bol 3): wat is de oplossing? Bij een pijl tussen bol 1 en 2 staat: hoe ga ik dat uitrekenen? Tussen bol 2 en 3: reken het echt uit, en tussen bol 3 en 1: klopt mijn antwoord? In die laatste stap kijk je met de

leerlingen terug naar de schatting die ze maakten bij de vraag: hoe ga ik dat uitrekenen?

De leraar loopt bij elke som op het bord de stappen door. ‘Niet statisch, maar ik grijp daar steeds op terug en doe het hardop voor: Wat vraag ik nou eigenlijk? Wat gaan we uitrekenen?’

Hebben leerlingen een schatting gemaakt, dan gaan ze verder met de som en checken ze of het antwoord in de buurt van de schatting komt. Als ze zelfstandig aan de slag gaan, rekenen ze de som zelf stapsgewijs uit in hun rekenschrift. ‘Daar moet ook de schatting bij staan, daar let ik op bij het rondlopen.’

Leerlingen zijn meer betrokken sinds de leraar stapsgewijs lesgeeft. Ook vertellen waarom schatten zinvol is in het dagelijks leven, werkt stimulerend, merkt Van Outvorst. ‘Ik geef veel eigen voorbeelden, zoals: ik stond in de bouwmarkt voor een emmer latex en moest een globale inschatting maken; mijn kamer is ongeveer zo breed en zo hoog, dus kocht ik de emmer die het dichtst bij mijn beraming lag. Ons rekenonderwijs is niet alleen beter geworden, maar ook zinvoller voor de leerlingen.’

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Halberda, J., Mazocco, M. M. M., & Feigenson, L. (2008).** Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, 455(7213), 665–668. doi:10.1038/nature07246

### Verder lezen

Onderwijswetenschapper Casper Hulshof geeft in dit artikel meer informatie over schatten en schattend rekenen. *Didactiefonline.nl*.

Hulshof, C. (2006). Schatten van kinderen. *Didactief*, 5 (mei).

<https://didactiefonline.nl/artikel/schatten-van-kinderen>

Onderwijsadviseur Dolf Janson geeft hier tips over hoe je op de basisschool kunt werken aan schatten en schattend rekenen.

Janson, D. (2014). Een schatter kan niet zonder redeneren. *Wijleren.nl*.

<https://wij-leren.nl/schatten-rekenen.php>

In dit artikel kun je meer lezen over het evolutionaire belang van schatten.

Morell, V. (2020). Veel dieren kunnen ‘tellen’ – wat ze helpt om te overleven. *National Geographic*.

<https://www.nationalgeographic.nl/dieren/2020/03/veel-dieren-kunnen-tellen-wat-ze-helpt-om-te-overleven>

Over het verschil tussen natuurlijk schattingsvermogen en aangeleerd rekenen lees je meer in dit artikel. Sprundel, M. van (2021). Waarom mensen kunnen rekenen en dieren niet. *NemoKennislink.nl*.

<https://www.nemokennislink.nl/publicaties/waarom-mensen-kunnen-rekenen-en-dieren-niet/>

### OM IN TE LIJSTEN

- Mensen hebben van nature het vermogen om hoeveelheden te schatten.
- Taal vormt de brug tussen het natuurlijke en aangeleerde getalbegrip.
- Door aan te haken bij het natuurlijke schattingsvermogen help je leerlingen om rekenvaardiger te worden.
- Hoe beter iemand kan schatten, hoe beter hij is in rekenen en omgekeerd.

# 4. GUN JE LEERLINGEN EEN EUREKA-MOMENTJE

**Sfard, A. (1991).** On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.

## INTRODUCTIE

Beth, de hoofdpersoon in de Netflix-serie *The queen's gambit*, telt geen schaapjes als ze niet kan slapen, maar neemt hele schaakpartijen door. Op het plafond boven haar bed visualiseert ze een schaakbord met stukken die ze in gedachten razendsnel verplaatst.

Haar schaakmanoeuvres lijken op wat er in het hoofd van een wiskundige gebeurt. Een voortdurende afwisseling tussen denken en doen, goochelen met mogelijke zetten op basis van kennis van eerdere partijen, structuren en regels.

Hoe krijg je dat als beginnening ooit geleerd? Dat is inderdaad een hele opgave, beaamt Anna Sfard. In haar artikel legt ze haarfijn uit waarom wiskunde leren ingewikkeld is. Ze neemt geen genoegen met de gangbare vaststelling dat wiskunde de meest abstracte kennisdiscipline is. Dat is zeker zo, maar

***‘Het kost beginners tijd en moeite om zich de denktrant van wiskundigen eigen te maken’***

Sfard vertelt ons ook waaróm dat zo is. Ontmoediging? Nee hoor, want door het leerproces te ontrafelen laat ze zien hoe leerlingen het toch onder de knie kunnen krijgen.

## HET IDEE

Waarom is het leren van rekenen en wiskunde zo moeilijk? En waarom snappen wiskundigen niet waarom veel andere mensen dat vinden? Sfard, zelf een vermaard wiskundige, wil dat tot op de bodem uitzoeken. Want ze zag te vaak in het onderwijs dat leerlingen afhaakten. Als we beter begrijpen wat wiskunde in wezen is, zo is haar idee, kun je het anderen ook beter leren.

En dus duikt ze de diepte in. Ze beschouwt de aard van wiskundige kennis en hoe we ons die eigen maken. Ze neemt de lezer mee op een reis door de

wondere wereld van wiskundig denken. Riemen vast, daar gaan we.

## DE INZICHTEN

### Wat je niet ziet

De taal van wiskundigen lijkt heus wel op die van andere wetenschappers. Ze beschrijven eigenschappen van bijvoorbeeld getallen en functies op dezelfde manier waarop een geoloog aardkorsten beschrijft of een scheikundige chemische stoffen. Maar er is toch een verschil: wiskundigen mogen dan wel doen alsof getallen net zo tastbaar zijn als aardkorsten en metalen, die getallen zijn toch echt alleen met ons geestesoog waar te nemen.

Voor wiskundigen speelt dit verschil niet meer, voor hen zijn die getallen en functies net zo reëel als gebakjes en fietsen. Maar beginners kost het tijd en moeite om zich die denktrant eigen te maken.

### Statisch en dynamisch

En om het nog wat ingewikkelder te maken: een wiskundig concept kan duiden op zowel een statische eigenschap als een dynamisch proces. Sfard noemt dit de structurele en operationele kanten van wiskundige concepten.

Statisch en dynamisch tegelijk, dat lijkt tegenstrijdig. Maar ze vullen elkaar juist aan, als twee zijden van dezelfde medaille. Zo is een natuurlijk getal, bijvoorbeeld 4 of 19, zowel de eigenschap van een set als iets wat ontstaat door te tellen (in het proces dus). Voor wiskunde moet je beide ‘zien’ en begrijpen, net zoals je twee voeten nodig hebt om te kunnen lopen. Voor wiskundigen is dit wederom gesneden koek. Maar voor beginners is het vaak verwarrend.

### Het leerproces

Hoe kun je je dat wiskundige denken dan toch eigen maken? Sfard onderscheidt in het leerproces én in

de geschiedenis van de wiskunde (zie kader in de rechterkolom) drie stappen:

### **1. Leren door doen (interiorization)**

Wiskundige concepten ontspruiten al doende, door processen dus. Het is niet zo dat onze voorouders op een dag hebben gezegd 'en nu zijn er getallen' en toen gingen rekenen. Ook in het leerproces begin je met de operationele kant. Je kunt leerlingen best een definitie van een breuk geven, maar zonder ermee aan de slag te gaan, zullen ze dat concept nooit ten volle vatten.

### **2. Patronen ontdekken (condensation)**

Hoe meer je bezig bent met processen, hoe sneller je daarin grotere gehelen en patronen gaat zien. Eerst kun je alleen nog tellen met getallen, later kun je er ook andere rekenbewerkingen mee doen en ga je begrijpen dat bijvoorbeeld delen en vermenigvuldigen elkaars omgekeerde zijn. Al doende krijg je steeds meer zicht op de onderliggende structuur.

### **3. Het licht zien (reification)**

Waar de eerste twee fasen vaak een tijdje duren, is deze derde fase als een eureka-moment. Opeens, pats, valt het kwartje. Je begrijpt het concept ten volle en kunt ermee rekenen en schrijven. Proces en concept vallen samen. En dan ben je klaar voor de volgende ronde. Want deze drie fasen vormen een continue leercyclus, zodat je steeds dieper en verder komt in het wiskundig denken.

### **Werkgeheugen ontlasten**

Denken in structuren en bewerkingen horen bij elkaar. Ze versterken elkaar en je moet het allebei kunnen. Sfard legt uit waarom: inzicht in de structuur ontlast je werkgeheugen. Je hoeft niet meer alle mogelijke bewerkingen met getallen actief te

houden, het concept roept de juiste bewerking vanzelf al op. Dat concept zal zich al doende verdiepen en verbreden, waarbij elk eureka-momentje zorgt voor een nog betere structuur. Zo kun je uiteindelijk goed gewapend een nieuw probleem oplossen.

Sfard vergelijkt het met je weg vinden in een onbekende stad: dat gaat echt veel gemakkelijker als je eerst een blik op de plattegrond kunt werpen dan wanneer je zomaar wat ronddoelt. Maar door alleen maar op die kaart te turen, bereik je je bestemming natuurlijk niet: je moet ook in actie komen.

## **KETTERSE GETALLEN**

In haar artikel beschrijft Sfard in vogelvlucht de geschiedenis van de wiskunde. Zo werd in de loop der eeuwen het begrip 'getallen' steeds breder. Eerst kenden mensen alleen nog maar wat we nu natuurlijke getallen noemen. Dat zijn de getallen waarmee je telt en rekent in het dagelijks leven. Logisch doordenkend bedachten wiskundigen dat de wereld van getallen groter moest zijn. Er konden bijvoorbeeld ook negatieve getallen zijn (denk:  $4 - 6 = -2$ ) en complexe getallen. Absurd, ja zelfs ketter, oordeelden tijdgenoten, vakgenoten inclus. Zoiets bestaat toch helemaal niet! Zelfs een geleerde als René Descartes wilde er niet aan. Hij sprak laatdunkend van 'imaginaire getallen', dingen die alleen in de verbeelding bestaan. Maar wiskundigen hielden vol en wisten bewijzen te leveren dat zulke getallen wel degelijk bestaan. Ze lagen misschien niet voor het oprapen in het dagelijks leven, maar bleken wel degelijk nuttig. Bijvoorbeeld om golven en trillingen te beschrijven.

# IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Wiskunde is een vak waarop nogal wat leerlingen lastig grip krijgen. Sfard legt uit waarom dat is. Wiskundig denken is de hoogste vorm van abstractie. Niet alleen moet je werken met concepten die niet tastbaar en zichtbaar zijn, die concepten zijn ook nog eens verdraaid complex, want statisch en dynamisch tegelijk. De wereld van rekenen-wiskunde is een abstract bouwwerk waar je als beginnening zonder hulp geen toegang toe krijgt.

***‘Voor wiskundigen zijn getallen en functies net zo reëel als gebakjes en fietsen’***

Sfards beschrijving van het cyclische leerproces verheldert wat leraren dagelijks in de les kunnen zien: dat leerlingen worstelen met abstracte noties en notaties. Gelukkig geeft ze leraren handvatten hoe ze hun leerlingen geleidelijk kunnen inwijden in die wereld van getallen. Door voortdurend te pendelen tussen concreet en abstract en tussen denken en doen help je leerlingen om zich het wiskundig denken eigen te maken.

## JOUW EIGEN KLAS

Als gevorderde in rekenen sta je er niet meer zo bij stil. Veel van wat voor jou vanzelfsprekend is, is voor leerlingen, zeker in de onder- en middenbouw, een vreemde wereld. Ze hebben eerst nog haakjes nodig in de werkelijkheid. Precies de reden waarom je hulpmiddelen als knikkers, (nep)geld en een meetlat gebruikt.

Sfard maakt ook duidelijk waarom het niet zo goed werkt om bij nieuwe rekenstof te starten met een definitie. Een breuk is een gebroken getal? Leerlingen zouden je verwilderd aankijken. Hoe kan een getal nou kapot zijn? Maar snijd je een pizza in stukken, dan snappen ze het beter. Gebruik ook

begrippen als teller en noemer liever wat later. Dat wil zeggen: je kunt ze wel gebruiken om verkenningen en ontdekkingen van leerlingen te beschrijven, zolang je er maar niet van uitgaat dat leerlingen ze meteen begrijpen. Blijf ze dus herhalen; door ermee te werken zullen leerlingen zich de concepten en de bijbehorende taal eigen maken. Zo voer je hen steeds dieper die vreemde wereld van getallen binnen. In hoofdstuk 2 (‘Er leiden meer rekenwegen naar Rome’) kon je al meer lezen over de afwisseling tussen denken en doen die je daar bij kan helpen.

## OM IN TE LIJSTEN

- Een wiskundig concept is statisch en dynamisch tegelijk: structuur én proces.
- Beginners krijgen via het proces inzicht in de structuur en ontdekken zo patronen.
- Grip op de structuur ontlast het werkgeheugen.
- Begin met betekenisvolle situaties en niet met definities.
- Wissel denken en doen in de reken-wiskunde voortdurend af.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Sfard, A. (1991).** On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36. doi:10.1007/BF00302715

### Verder lezen

In zijn oratie legt rekenonderzoeker Paul Drijvers uit waarom abstract leren denken zo belangrijk is voor het reken-wiskundeonderwijs.

Drijvers, P. (2015). *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT* (oratie). Universiteit Utrecht.

[http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/Oratie\\_Paul\\_Drijvers\\_facsimile\\_20150521.pdf](http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/Oratie_Paul_Drijvers_facsimile_20150521.pdf)

In deze blog gaat ook rekenonderzoeker Geeke Bruin-Muurling in op het belang van abstract leren denken als basis voor rekenen-wiskunde.

*Bruin-muurling.nl*

Bruin-Muurling, G. (2020). *De cijfers liegen niet - deel 5: Doelen voor onderwijs*.

<http://www.bruin-muurling.nl/de-cijfers-liegen-niet-deel-5-doelen-voor-onderwijs/>

Dit YouTube filmpje vertelt op een laagdrempelige manier over de geschiedenis van rekenen. Ook geschikt om in de klas te gebruiken.

<https://www.youtube.com/watch?v=CceQwWJ6vrs>



# 5. STREETWISE REKENEN

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1985).

Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*, 3(1), 21–29.

## INTRODUCTIE

Kun je zingen zonder noten te kunnen lezen? Ja, natuurlijk. Gelukkig wel. Maar kun je ook rekenen zonder te weten wat optellen en vermenigvuldigen is of wat een plus en een min betekenen? Je bent geneigd om ook hier te zeggen: ja, natuurlijk. En inderdaad, er zijn genoeg voorbeelden van mensen die kunnen rekenen zonder de officiële rekenroutines (voldoende) te kennen.

Toch is er op scholen lange tijd geen aandacht geweest voor dit zogeheten informele of intuïtieve rekenen. Best raar, vonden rekenonderzoekers Terezinha Carraher, David William Carraher en Analúcia Dias Schliemann. Met een prachtige casestudie laten ze zien dat jonge Braziliaanse straatverkopers op de markt beter en vlugger rekenen dan wanneer ze dezelfde opgaven moeten maken volgens de op school geleerde rekenroutines. Hun les: benut de informele kennis van je leerlingen.

## HET IDEE

Halverwege de jaren tachtig hadden diverse onderzoekers al aangetoond dat er verschillen zijn tussen informeel en formeel rekenen, dus tussen hoe mensen rekenopgaven in het dagelijks leven oplossen en hoe ze dat op school doen. Carraher en collega's wilden nog een stapje verder gaan: kunnen we aantonen dat een en dezelfde persoon in verschillende situaties dezelfde opgave verschillend te lijf gaat?

Zo kwamen ze op het idee om een bezoek aan de markt te brengen. In hun land Brazilië werken namelijk veel kinderen en jongeren als marktverkopers om zo het gezinsinkomen op peil te houden. De meesten van hen gaan nog naar school. De ideale groep dus om te bestuderen als het gaat om verschillen in rekenroutines op straat en op school.

De studie van Carraher en collega's gaat over vijf van deze Braziliaanse straatverkopers (tussen negen en vijftien jaar). Een van hen had maar één jaar school

gehad, de andere vier zaten nog op school. De onderzoekers deden zich eerst voor als klanten, om zo te kunnen observeren hoe de kinderen rekenden (de informele toets). Daarna vroegen ze de kinderen om dezelfde opgaven nog eens te maken, maar dan volgens schoolse rekenroutines (de formele toets).

## DE INZICHTEN

Dezelfde kinderen maakten dezelfde rekenopgaven, alleen in een ander jasje. De formele toets bevatte 99 opgaven zoals je die in lesboeken tegen kunt komen: kaal ( $3 \times 35$ ) of met context ('Mary koopt 3 bananen op de markt, de bananen kosten 35 *cruzeiros* per stuk. Hoeveel moet Mary betalen?').

### ***'Schoolse rekenroutines kunnen intuïtieve denkprocessen versterken'***

Meestal bevatte de formele toets dezelfde getallen en rekenbewerkingen als op de markt. Maar soms kregen de kinderen de omgekeerde rekenbewerking:  $500 - 385$  uit de informele toets werd dan bijvoorbeeld  $385 + 115$ . En soms veranderden de onderzoekers de decimale munteenheid: 100 centen versus 1 euro (even op z'n Nederlands). Bovendien gaven ze de kinderen potlood en papier en moedigden ze hen aan dat te gebruiken of in elk geval het antwoord te noteren. Op de markt ging het steeds om hoofdrekenen.

## Straat versus school

Hoe brachten de jonge straatverkopers het ervan af? Het zal je niet verbazen dat ze op de markt het meest in hun element waren: hier leverden ze maar liefst 98,2 procent goede antwoorden. Bij de formele toets ging het minder goed: op de contextopgaven was hun score 73,7 procent en op de kale sommen slonk die zelfs naar 36,8 procent. En dat terwijl het in alle drie de gevallen om dezelfde rekenkundige bewerkingen ging.

Niet waar, hoor ik je nu denken. De onderzoekers hadden toch bij sommige opgaven kleine variaties aangebracht?! Klopt, maar daar zat het 'm niet in. Er bleken geen verschillen van betekenis tussen dezelfde en aangepaste opgaven.

Komt het dan omdat je met een echte kokosnoot in je hand handiger rekent dan met alleen abstracte cijfers of woorden? Nee, zagen de onderzoekers, want de kinderen bleken vrijwel alles uit het hoofd te berekenen.

Wat is er dan wel aan de hand? De enige conclusie is dat kinderen heel goed intuïtief kunnen rekenen

### REKENGESPREKJES OP DE MARKT

Klant/onderzoeker: 'Oké, ik neem drie kokosnoten. Hoeveel wordt dat?' (stukprijs is 40 *cruzeiros*)

M.D. (9 jaar): Hardop tellend: '40, 80, 120.'

Klant/onderzoeker: 'Wat zou ik moeten betalen voor zes kilo watermeloen?' (kiloprijs is 50 *cruzeiros*).

S. (11 jaar): '300.'

Klant/onderzoeker: 'Wacht even, hoe weet je dat zo snel?'

S. (telt de meloenen twee bij twee): '100, 200, 300.'

Klant/onderzoeker: 'Hoe duur is een kokosnoot?'

M. (12 jaar): '35 *cruzeiros*.'

Klant: 'Ik wil er graag tien. Hoeveel wordt dat?'

M. na een korte pauze: 'Drie is 105, plus nog eens drie wordt 210 ...' (even pauze). 'Ik heb er nog vier nodig. Dat wordt ...' (na weer een pauze): '315 ... ik denk dat het 350 is.'

zonder dat ze per se de juiste rekenkundige bewering voor ogen hebben. Deze bevinding staat haaks op de didactiek dat leerlingen eerst de rekenprocedures leren beheersen, voordat ze die gaan toepassen op en in concrete situaties. Deze Braziliaanse straatkinderen laten zien dat het ook andersom kan werken.

### Andere bewerkingen

Helemaal bevredigend vonden Carraher en haar collega's het nog niet. Want als de jonge marktverkopers zulke goede hoofdrekenaars zijn, waarom doen ze het in die formele toets dan toch slechter? Om dat te verklaren, keken de onderzoekers nog eens goed naar wat de kinderen precies deden.

Wat bleek? De kinderen rekenden op de markt niet alleen beter, maar ook anders. Op de markt zetten ze rekenbewerkingen naar hun hand, in de formele toets volgden ze de rekenroutines zoals ze die op school hebben geleerd. Op de markt maakten de kinderen van een vermenigvuldiging vaak een optelsom (zie kader hiernaast). Met de hoeveelheden op de markt konden ze daarmee prima uit de voeten. Bij de formele toets probeerden ze de op school geleerde rekenprocedures te volgen, maar raakten ze in de knoei. De meeste fouten maakten ze door vermenigvuldigen en optellen te verwarren. De twaalfjarige M. bijvoorbeeld loste  $35 \times 4$  op door eerst  $4 \times 5$  te berekenen. Hij kwam op 20, dus dat ging nog goed. Maar vervolgens telde hij de tientallen van 20 en 35 op en vermenigvuldigde hij het resultaat van deze optelsom (50) met 4 om als eindantwoord 200 te geven. En dat terwijl M. dezelfde rekenopgave op de markt feilloos oploste.

### IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Moeten we de schoolse rekenlessen dus maar liever staken? Nee, dat is zeer zeker niet de boodschap van Carraher en haar collega's. Integendeel. Het intuïtieve

hoofdrekenen van de jonge marktverkopers werkt prima voor de dagelijkse verkoop van groente en fruit. Maar zodra er grotere getallen en ingewikkelder bewerkingen aan te pas komen, volstaat het niet meer. Dan heb je echt meer houvast aan schoolse rekenroutines. Die kunnen de intuïtieve denkprocessen versterken.

De vraag is meer waar je in de klas mee begint. Dit onderzoek laat zien dat starten met de abstracte, formele rekenprincipes en notaties – zoals ten tijde van de publicatie van dit onderzoek schering en inslag was op scholen – niet zo vruchtbaar is. Het is beter om concreet te beginnen, met alledaagse reken situaties, en van daaruit kinderen de abstracte rekenwereld in te leiden. Dit inzicht heeft mede dankzij het onderzoek van Carraher en collega's school gemaakt.

***'Benut informele kennis  
om het formele leren  
te vergemakkelijken'***

Het onderzoek maakt bovendien duidelijk dat je niet te snel moet denken dat een leerling niet kan rekenen. Immers, de Braziliaanse kinderen die op schoolse toetsen onvoldoendes of magere zesjes haalden, rekenden op de markt als de beste. Het is dus zaak om de verbinding te leggen tussen informele en formele kennis. Beter gezegd: benut de al aanwezige informele kennis om het formele leren te vergemakkelijken.

**JOUW EIGEN KLAS**

De rekenlessen op school zien er tegenwoordig anders uit dan halverwege de jaren tachtig, toen Carraher en haar collega's hun onderzoek publiceerden. Waarschijnlijk begin jij je les over een nieuw rekenkundig principe ook met concrete voorbeelden. Zo bied je leerlingen haakjes om de abstracte(re) stof aan op te hangen.

Door aan te sluiten bij informele rekenkennis en -strategieën maak je het je leerlingen gemakkelijker om zich de formele eigen te maken. Dat kun je doen door goed te kijken hoe leerlingen uit zichzelf rekenen. Door te vragen 'hoe zou jij dit oplossen' of 'hoe zou jij dit berekenen' krijg je inzicht in hoe leerlingen redeneren. Misschien lossen ze een vermenigvuldiging net als de Braziliaanse straatverkopers ook wel op door een herhaalde optelling te doen. Dan kun je hun duidelijk maken dat dat prima is met kleine hoeveelheden, maar dat het ondoenlijk wordt bij grote getallen. En dat daarom het vak rekenen is uitgevonden: om het ons makkelijker te maken (en niet moeilijker).

**OM IN TE LIJSTEN**

- Bouw je rekenstof op van concreet naar abstract.
- Verbind nieuwe rekenprocedures altijd aan concrete, alledaagse situaties.
- Benut de informele rekenkennis van je leerlingen.
- Laat leerlingen hardop vertellen hoe ze een opgave oplossen.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1985).** Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*, 3(1), 21–29. doi:10.1111/j.2044-835X.1985.tb00951.x

### Verder lezen

In het hoofdstuk ‘Ontdek de wereld van je leerlingen’ uit *Werk maken van gelijke kansen* kun je lezen hoe leraren de kennis die leerlingen van huis uit meenemen, in de klas benutten. Je kunt dit boek gratis downloaden van [Werkmakenvangelijkekansen.nl](https://werkmakenvangelijkekansen.nl).  
Bergh, L. van den, Denessen, E., & Volman, M. (2020). *Werk maken van gelijke kansen*. Amsterdam: Didactief/Meppel: Ten Brink Uitgevers.  
<https://werkmakenvangelijkekansen.nl>

Dit artikel geeft tips over hoe je zwakke rekenaars kunt ondersteunen. *Volgens-bartjens.nl*.  
Borghouts, C. (2011). De vertaalcirkel; werken aan begrip en inzicht bij zwakke rekenaars. *Volgens Bartjens*, 31(2), 8–11.  
[https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-2263\\_De-vertaal-cirkel-Werken-aan-begrip-en-inzicht-bij-zwakke-rekenaars](https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-2263_De-vertaal-cirkel-Werken-aan-begrip-en-inzicht-bij-zwakke-rekenaars)

Dit artikel laat zien hoe je je rekenlessen met concrete voorbeelden betekenisvoller kunt maken voor leerlingen. *Volgens-bartjens.nl*.  
Griffioen, J., & Herpen, E. van (2002). Je kunt het gewoon tellen. Hoe maak je reken-wiskundeonderwijs betekenisvol? *Volgens Bartjens*, 22(1), 14–17.  
[https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3397\\_Je-kunthet-gewoon-tellen-Hoe-maak-je-reken-wiskundeonderwijs-betekenisvol](https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3397_Je-kunthet-gewoon-tellen-Hoe-maak-je-reken-wiskundeonderwijs-betekenisvol)



# II





# BEGINNEND EN AANVANKELIJK REKENEN

De basis voor rekenvaardigheid wordt ruim voor het formele rekenonderwijs gelegd. Zo kun je in de kleuterklas getalbegrip al stimuleren door prentenboeken voor te lezen en allerlei rekenspelletjes te doen.

In dit deel staat de fase van beginnend en aanvankelijk rekenen centraal. We beschrijven de rekenontwikkeling, waarbij leerlingen steeds beter leren omgaan met de abstracte rekentaal. Zo maakt vingertellen vanaf groep 4 plaats voor het automatiseren van basisbewerkingen.

Je leest hoe je leerlingen hierbij kunt helpen. Bijvoorbeeld door te werken met een fysieke getallenlijn in de klas. Zo verwerven leerlingen inzicht in verhoudingen tussen getallen. Kennis die ze nodig hebben voor het gevorderde rekenen.

# 6. EEN PRENTENBOEK IN DE REKENLES

Anderson, A., Anderson, J., & Shapiro, J. (2005).

Supporting multiple literacies: Parents' and children's mathematical talk within storybook reading. *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), 5–26.

## INTRODUCTIE

Hoeveel pruimen eet Rupsje Nooitgenoeg op woensdag? Voel eens de vorm van de gaatjes die hij achterlaat in al die lekkernijen waar hij zich doorheen eet. En kijk eens hoe hij elke dag groter en dikker wordt!

We wisten al dat het voorlezen van prentenboeken de woordenschat van kinderen vergroot. Maar er is meer winst: tijdens het voorlezen krijgen ze ook gevoel voor wiskundige begrippen. Ann Anderson, Jim Anderson en Jon Shapiro hebben veel onderzoek gedaan naar het belang van voorlezen voor

***‘Samen lezen is een krachtige manier om kinderen te attenderen op wiskundige begrippen’***

voorbereidende rekenvaardigheid. In dit artikel beschrijven ze nauwkeurig hoe volwassenen tijdens het voorlezen de aandacht van kinderen kunnen richten op zaken als hoeveelheden, vormen, getallen en verhoudingen. Hun artikel maakt duidelijk dat er nog meer uit voorlezen te halen valt dan je al dacht.

## HET IDEE

Jonge kinderen doen spelenderwijs veel woorden en kennis van de wereld op. Onderdeel daarvan is gevoel voor maten, hoeveelheden en verhoudingen. Denk maar aan spelen in de zandbak, puzzelen of ouders die meten hoeveel hun kind gegroeid is.

Anderson en Anderson hadden in de jaren negentig al aangetoond dat het voorlezen van prentenboeken een rijke context bood voor wat ze noemden ‘mathematische gesprekjes’, dus samen praten over wiskundige begrippen. Samen met Shapiro wilden ze dat nader onderzoeken: hoe verlopen die boekgesprekjes en waarover praten ouders en kinderen precies?

Ze vroegen 39 ouders uit diverse lagen van de bevolking om hun vierjarige zoon of dochter voor

te lezen. Elk ouder-kindpaar kreeg twee prentenboeken cadeau: *Swimmy* en *Meneer Muis* van Leo Lionni (zie ook kader op pagina 41). ‘Lees maar gewoon voor zoals je altijd doet’, zeiden de onderzoekers. Want ze wilden juist weten wat er spontaan gebeurde tijdens dat voorlezen. Ze hebben alle voorleessessies gefilmd en de boekgesprekken geanalyseerd.

## DE INZICHTEN

Hoewel elke ouder dezelfde twee boeken voorlas, verschilden de gesprekken met hun kinderen sterk. Dat laat weer eens zien, benadrukken de onderzoekers, dat er niet één manier van voorlezen is. Bovendien wordt in het ene gezin meer gepraat dan in het andere. Toch zagen ze bij bijna alle gezinnen, op één na, wiskunde opduiken in de gesprekken: ouder en kind praatten over omvang, hoeveelheid en vorm. Vooral de illustraties lokten dat uit.

### Omvang: een grote vis!

Het begrip omvang kwam in vrijwel alle gesprekken ter sprake. Dit is niet vreemd, want woorden als groot, klein, groter en langer zijn gangbaar in alledaags taalgebruik. Bovendien is klein versus groot het thema van *Swimmy*. Ouder en kind praten bijvoorbeeld over de tonijn die zoveel groter is dan de kleine *Swimmy* of ze laten met uitgestrekte armen zien hoe groot de walvis wel niet is. Soms vergelijken ze verhoudingsgewijs: een moeder zegt dat grashalmen voor muizen net zo groot zijn als bomen voor mensen.

### Hoeveelheid: een krab met zes poten

In bijna de helft van de gesprekken (achtien) ging het ook over hoeveelheden. De taal daarvoor is specifiek: het gaat om telwoorden. Een ouder wijst bijvoorbeeld de krab aan en zegt ‘kijk, een krab met zes poten’, kinderen gaan tellen of zeggen ‘eentje hier en eentje daar’. In een gesprek vraagt een kind

zijn vader om alle rode visjes te tellen. Dat zijn er wel erg veel om een voor een te tellen, vindt de vader, dus hij maakt een schatting.

### **Vorm: een gebogen staart**

In slechts zes gesprekken komt de vorm van voorwerpen of dieren ter sprake. En vaak ook nog in algemene zin, dus zonder aanduiding van de vorm zelf: 'Kijk, ze hebben allemaal dezelfde vorm.' Slechts in één gesprekje wordt het concreter en benoemt een moeder de lange staart van de paling als een gebogen lijn. Dat komt ook omdat vorm in beide verhalen een rol van betekenis speelt.

### **REKENOOG OP PRENTENBOEKEN**

*Swimmy* (1963) van Leo Lionni, een van de twee in dit onderzoek gebruikte prentenboeken, is een echte klassieker en nog steeds te leen bij de bibliotheek. Het is het verhaal van een kleine, zwarte vis die op ontdekkingsstocht gaat in de zee en leert hoe je met vele kleine visjes de grote vissen te slim af kunt zijn.

Nog veel meer prentenboeken lenen zich voor 'mathematische gesprekjes'. We noemden al een andere klassieker, *Rupsje Nooitgenoeg* van Eric Carle. Daarin komen hoeveelheden, vorm en omvang expliciet aan bod. Dat is niet per se nodig. In vrijwel elk boek zijn haakjes te vinden naar vormen, hoeveelheden en verhoudingen. Denk bijvoorbeeld aan de trap waar Dikkertje Dap op klimt, de vierkante tractor van Boer Boris of de kleine muis die een grote Grufalo bedenkt. Als je met zo'n rekenoog naar kinderboeken kijkt, zul je merken dat (voorbeeldend) rekenen en lezen heel mooi gelijk op kunnen gaan.

### **Het verhaal centraal**

Doel van de boekgesprekken is niet om te praten over wiskundige begrippen, maar om het verhaal beter te begrijpen en daarvan te genieten. En dat is juist de kracht ervan, stellen de onderzoekers. Het zijn geen gekunstelde lesjes, maar spontane gesprekken in reactie op het verhaal en vooral de illustraties. Zoals de onderzoekers schrijven: 'Geen enkele ouder en geen enkel kind ging dingen in het boek tellen puur om te kunnen tellen.' Zolang het verhaal centraal blijft staan, is het samen lezen van een (prenten)boek een krachtige manier om kinderen te attenderen op wiskundige begrippen.

### **IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS**

Dit onderzoek laat zien dat je door het samen lezen van prentenboeken jonge kinderen ontvankelijk kunt maken voor wiskundige begrippen. Ouders, maar natuurlijk ook leraren, kunnen zo alvast een bodem leggen voor het latere reken-wiskundeonderwijs.

Sinds het werk van Anderson en collega's hebben meer rekenonderzoekers aangetoond dat de inzet van prentenboeken in het (voorbereidend) rekenonderwijs vruchten afwerpt. Zo blijkt uit onderzoek van onder anderen Marja van den Heuvel-Panhuizen dat kleuters die in de klas een voorleesprogramma met prentenboeken volgden, 22 procent meer vooruitgang boekten op een toets over begrip van getallen, meten en meetkunde dan leeftijdsgenoten die niet werden voorgelezen.

Voorlezen is dus niet alleen een krachtig hulpmiddel voor het taal-, maar ook voor het reken-wiskundeonderwijs.

### **JOUW EIGEN KLAS**

Voorlezen is een laagdrempelige manier om te werken aan taal. En dus aan rekenen-wiskunde, zoals dit onderzoek duidelijk maakt. Daarbij bereik je het meeste effect als je interactief voorleest, dus als je



voor, tijdens of na het voorlezen regelmatig vragen stelt die de leesbeleving en het verhaalbegrip van leerlingen stimuleren.

### ***‘Er valt nog meer uit voorlezen te halen dan je al dacht’***

De ouders en kinderen uit dit onderzoek begonnen spontaan te praten over omvang, hoeveelheden en vormen. Dat laat al zien dat een rekengesprek over een boek heus niet zo ingewikkeld hoeft te zijn. Wel is het belangrijk dat je als leraar gericht

en meer voorbereid het gesprek aangaat. Kies een prentenboek waar wat aan te ontdekken valt, dus geen simpel telboekje, maar een boek met een verhaal en aansprekende illustraties (zie ook kader hieronder). Lees het boek altijd van tevoren. Zo kun je al bedenken over welke passages en illustraties je straks samen met je leerlingen kunt gaan praten en welke wiskundige aspecten ze daarin zullen ontdekken. Houd daarbij vooral het advies van de drie rekenonderzoekers voor ogen: de kracht zit in het samen beleven en uitdiepen van het verhaal en niet in het ‘tellen om het tellen’.

**in de  
praktijk**

## **BOEKEN MET REKENHAAKJES**

Als je goed kijkt, hebben alle prentenboeken wel een of meer rekenhaakjes, ervaart Wilma van de Wiel, die lesgeeft in groep 1/2 van Kindcentrum ‘t Schrijverke in ‘s-Hertogenbosch. De boeken van Eric Carle liggen voor de hand. ‘Hij heeft zoveel fantastisch mooie boeken gemaakt waarin alle rekendomeinen terugkomen: verhouding, tellen, inhoud, tijd, seizoenen, vormen. Maar ook *Boer Boris* en de *Muis*-reeks van Lucy Cousins bevatten rekenhaakjes.’ Je herkent ze volgens Van de Wiel meestal aan een probleem of conflict dat je kunt aanpakken. ‘Bij het boek *Boodschappen doen met Muis* bijvoorbeeld, is het probleem dat de koelkast leeg is.’

‘t Schrijverke, een school die ontwikkelingsgericht en thematisch werkt, gebruikt prentenboeken om verhalen te kunnen naspelen bij de verteltafel. Zo bouwde Van de Wiel met haar klas bij het thema ‘Worden wat je wil’ (thema Kinderboekenweek 2021), een supermarkt, het huis en andere details uit het boek van Muis na. Tijdens het bespreken en het bouwen kwam

regelmatig rekenen om de hoek kijken. ‘Hoeveel ramen tel je? Twee? Maar als je goed kijkt, zit daar een kruis in. Zijn het dan wel twee ramen? Het zijn er inderdaad vier. Hoeveel tel je er nu? Ja, het zijn wel ácht kleine ramen.’ Bij onderdelen maken van constructiemateriaal (duplo) en klei, leerden leerlingen wat breed en smal is, en de juiste verhouding. ‘Spontaan ontstonden er rekenhandelingen (passen en meten) en geweldige een-op-eenverhoudingen toen ze minimekflesjes kleiden die precies op de flesjes in het boek pasten.’

Van de Wiel leest een prentenboek meestal eerst voor zonder vragen te stellen. De tweede keer stelt ze vragen en/of verbindt ze er handelingen aan. ‘Bij het boek *De prinses met de lange haren* van Annemarie van Haeringen laat ik ze het begrip “heel lang” ervaren door op de grond een lange rij met liggende kinderen te maken.’ De echte kracht zit ‘m in de koppeling van het prentenboek aan de activiteit, merkt Van de Wiel. ‘Zo houd ik de kinderen nieuwsgierig en betrokken, waardoor ze het beter begrijpen, onthouden en inzichten krijgen.’

## OM IN TE LIJSTEN

- Prentenboeken voorlezen is een krachtig hulpmiddel voor het rekenonderwijs.
- Besteed tijdens het interactief voorlezen aandacht aan wiskundige begrippen als omvang, hoeveelheden, vormen en verhoudingen.
- In veel prentenboeken zijn rekenhaakjes te ontdekken.
- Kies een prentenboek waar qua verhaal en illustraties wat aan te ontdekken valt.

## Verder lezen

In een kort interview met *Didactief* legt rekenonderzoeker Marja van den Heuvel-Panhuizen uit waarom het lezen van prentenboeken bevorderlijk is voor rekenvaardigheden.

Marreveld, M. (2014), Drie vragen aan Marja van den Heuvel-Panhuizen. *Didactief*, 10 (december).

<https://didactiefonline.nl/artikel/drie-vragen-aan-marja-van-den-heuvel-panhuizen>

Over dit Nederlandse onderzoek kun je ook lezen op Leraar24.nl:

<https://www.leraar24.nl/50343/kleuters-beter-leren-rekenen-met-prentenboeken/>

Met interactief voorlezen bevordert je dat leerlingen dieper het verhaal in duiken. Meer hierover lees je in het hoofdstuk 'Maak van voorlezen een dialoog' uit *Leer ze lezen*. Je kunt dit boek gratis downloaden van Leerzelezen.nl.

Ros, B. et al. (2021). *Leer ze lezen. Praktische inzichten uit onderzoek voor leraren basisonderwijs*. Amsterdam: Didactief/Meppel: Ten Brink Uitgevers.

<https://leerzelezen.nl>

Het hoofdstuk 'Niet elk kind wordt voorgelezen' uit *Leer ze lezen* maakt duidelijk dat er tussen gezinnen grote verschillen bestaan in leescultuur en hoe je daar op school rekening mee kunt houden. Je kunt dit boek gratis downloaden van Leerzelezen.nl.

Ros, B. et al. (2021). *Leer ze lezen. Praktische inzichten uit onderzoek voor leraren basisonderwijs*. Amsterdam: Didactief/Meppel: Ten Brink Uitgevers.

<https://leerzelezen.nl>

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bronnen

**Anderson, A., Anderson, J., & Shapiro, J. (2005).** Supporting multiple literacies: Parents' and children's mathematical talk within storybook reading. *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), 5–26. doi:10.1007/BF03217399

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Elia, I., & Robitzsch, A. (2016). Effects of reading picture books on kindergartners' mathematics performance. *Educational Psychology*, 36(2), 323–346.

Op de website van Het Jonge Kind staat een artikel over rekenen met prentenboeken.

Bree, R. van (2019), Rekenen met prentenboeken.

<https://www.hjk-online.nl/rekenen/rekenen-met-prentenboeken/>

Op deze websites staan titels van prentenboeken die zich lenen voor de rekenles:

- Juf Bianca, Prentenboeken over rekenen:

<https://jufbianca.nl/2018/06/prentenboeken-over-rekenen/>

- Klas van juf Linda, Rekenen met prentenboeken

<https://klasvanjuflinda.nl/leren/rekenen-leren/16998/rekenen-met-prentenboeken/>

Op Prentenboeken.nl vind je achtergrondinformatie over *Rupsje Nooitgenoeg* en een mooi animatiefilmpje over deze (reken)klassieker.

<https://www.prentenboek.nl/rupsje-nooitgenoeg/>

# 7. LAAT ZE LOPEN OP EEN GETALLENLIJN

Link, T., Moeller, K., Huber, S., Fischer, U., & Nuerk, H.-C. (2013).

Walk the number line - An embodied training of numerical concepts. *Trends in Neuroscience and Education*, 2(2), 74–84.

## INTRODUCTIE

Ergens in ons hoofd zit-ie, de mentale getallenlijn. Eerst is er alleen nog een ruw besef van hoeveelheden. Zo raken baby's verveeld als je hun almaar plaatjes van tweetallen blijft voorschotelen – twee honden, twee bloemen, twee ... – en leven ze op als er opeens een plaatje met een drietal of eenling langskomt.

Vanuit dit vage besef van hoeveelheden ontwikkelt zich een steeds preciezer getalbegrip.

Kinderen krijgen grip op de verschillen tussen getallen en weten steeds beter en sneller welk getal groter of kleiner is. In hun hoofd ontstaat een eindeloze liniaal: de mentale getallenlijn. En die hebben ze nodig om goed te kunnen rekenen.

### ***‘De getallenlijn is een belangrijke basis voor rekenvaardigheid’***

In de kleuterklas en groep 3 kun je die ontwikkeling stimuleren. Tanja Link en haar collega's hebben daarbij aangetoond dat het lijf het hoofd kan helpen: leerlingen daadwerkelijk over een getallenlijn laten lopen, blijkt een krachtige stimulans voor de ontwikkeling van getalbegrip.

## HET IDEE

Om te kunnen rekenen, moet je grip op getallen hebben. Je moet bijvoorbeeld weten dat 8 meer is dan 5 en dat  $3 + 3$  minder is dan 8. Om te kijken in hoeverre kinderen dat al kunnen, hebben onderzoekers de schattingstaak bedacht: op een lijn waarbij alleen de begin- en eindgetallen staan aangegeven, zoals 0-10, 0-100 of 0-1000, vraag je kinderen een getal te positioneren. Kleuters en leerlingen in groep 3 willen de positie van kleine getallen nog weleens overschatten: op een lijn van 0-100 plaatsen ze het getal 10 bijvoorbeeld op de plek van 40. Voor hen is de afstand tussen twee opeenvolgende getallen aan

het begin van de getallenlijn groter dan die tussen de getallen verderop op die lijn. Later leren ze dat die afstanden overal gelijk zijn: hun liniaal wordt nauwkeuriger.

De prestaties van kinderen op deze schattingstaak voorspellen mede hoe goed ze later kunnen rekenen. Anders gezegd: goed schatten is een belangrijke wegbereider voor goede rekenvaardigheid (zie ook hoofdstuk 3, 'Leren schatten is van levensbelang'). Des te prettiger daarom dat je deze vaardigheid gericht kunt trainen, bijvoorbeeld met spelletjes als ganzenbord. Ook Link en haar collega's bogen zich over de vraag hoe je getalbegrip kunt stimuleren. Ze lieten zich inspireren door onderzoekers die hadden laten zien dat bewegingsoefeningen werken:

## LIJF EN BREIN

Je rekent met je brein en je loopt met je lijf. Klinkt logisch, toch? Maar cognitiewetenschappers zijn er inmiddels achter dat lichaam en geest minder gescheiden zijn dan lang is gedacht. Ons brein maakt zich ook via bewegingen en andere lijfelijke ervaringen zaken eigen. *Embodied cognition* heet dat in vaktaal: belichaamde cognitie.

Een bekend voorbeeld is dat je door het schrijven met de hand je brein helpt om je lettertekens in te prenten. En door over een getallenlijn te lopen, krijg je dus beter grip op getalsverhoudingen. Al kan het lijf ons brein soms ook voor de gek houden: zo schatten mensen die naar links leunen de hoogte van de Eiffeltoren twaalf meter lager in dan mensen die naar rechts leunen. Dat heeft waarschijnlijk te maken met onze mentale getallenlijn: de getallen lopen van links naar rechts op.

een stap naar links als een getal kleiner was en een stap naar rechts bij een groter getal. Dat is nog vrij globaal, vonden onze rekenonderzoekers. Wat nu, zo bedachten ze, als je leerlingen langs een echte getallenlijn laat lopen? Dan ervaren ze aan den lijve dat je voor grotere getallen verder moet lopen dan voor kleine. En dat het lijf, zo wisten ze uit de cognitiewetenschap, het hoofd kan helpen (zie ook kader op pagina 45). Hun idee hebben ze in Duitsland beproefd bij 32 leerlingen uit groep 3 van gemiddeld ruim zeven jaar oud. Daarbij keken ze niet alleen of de leerlingen door de oefening beter werden in schatten, maar ook of dat resulteerde in betere prestaties bij optellen en vergelijkingstaken (transfereffect).

## DE INZICHTEN

### Het loopexperiment

De onderzoekers verdeelden de leerlingen in twee groepen. Beide deden schattingstaken op een getallenlijn van 0-100 en beide moesten daarbij lopen. Maar de leerlingen in de ene groep liepen alleen vanaf een aangegeven beginpunt naar een computer, om daarop de positie van een opgegeven getal op een lijn aan te geven. De leerlingen uit de andere groep liepen vanaf hetzelfde beginpunt naar een op de grond geplakte getallenlijn en liepen daar tot aan de geschatte positie van het opgegeven getal. Op die plek op de lijn draaiden ze zich om en liepen ze weer terug naar het beginpunt.

Elke leerling kreeg na elke schatting feedback: in de computergroep verscheen de juiste positie op het scherm, in de lijngroep wees de onderzoeker de juiste positie aan en liepen de leerlingen daarnaartoe.

### Lopen langs de lijn werkt

De leerlingen deden deze schattingsoefeningen gedurende drie sessies van elk zo'n vijftien tot twintig minuten. Daarna bleken alle leerlingen beter te zijn

geworden: ze maakten minder fouten en schatten nauwkeuriger. Maar de lijngroep ging meer vooruit dan de computergroep. Ze hadden het voordeel van de lijfelijke ervaring van afstanden op de getallenlijn. Bij de computergroep heeft het lopen geen toegevoegde waarde en is het vooral het oefenen met schatten dat effect sorteert.

### ***'Bewegend leren kan effectief zijn, mits je het gericht inzet'***

Vooraf leerlingen met minder ontwikkelde cognitieve vaardigheden (zoals werkgeheugen) profiteerden van de oefeningen.

### Van schatten naar optellen

Vertaalt beter schatten zich ook direct in betere rekenprestaties? Is er met andere woorden een transfer naar andere vaardigheden? Bij optelsommen met (ook) tweevoudige getallen (zoals  $14 + 3$ ) en vergelijkingstaken (kies de grootste van twee getallen of twee hoeveelheden) zagen de onderzoekers geen noemenswaardig effect. Deze opgaven bleken nog te moeilijk voor de leerlingen. Maar ze werden wel beter in optelsommen met enkelvoudige getallen (zoals  $3 + 6$  of  $9 + 8$ ). Ook hier was de lijngroep beter dan de computergroep.

Dat laat nogmaals zien, zo concluderen Link en haar collega's, dat de getallenlijn een belangrijke basis voor rekenvaardigheid is.

## IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Dit onderzoek maakt twee dingen duidelijk: getalbegrip is onontbeerlijk om te kunnen (leren) rekenen én deze vaardigheid is eenvoudig en gericht te trainen. Het is dan ook belangrijk om vanaf de kleuterklas aandacht te besteden aan deze voorbereidende rekenvaardigheid. Zo kunnen scholen versterken wat in ruwe aanleg al aanwezig is.

Daarbij is het bovendien zaak om de ontwikkeling van leerlingen op dit punt in de gaten te houden. Dat kleuters nog niet nauwkeurig getallen weten te positioneren, is normaal, maar als dit in groep 4 nog steeds hapert, is er mogelijk meer aan de hand. Zo is een kenmerk van dyscalculie dat kinderen moeite hebben met getalbegrip; hun mentale getallenlijn is niet goed ontwikkeld. Dat valt deels op te vangen met tijdig oefenen. Alle leerlingen hebben baat bij gerichte oefening, maar cognitief zwak ontwikkelde leerlingen profiteren er extra van. Precies de leerlingen die een extra zetje in de rug kunnen gebruiken.

Het onderzoek laat bovendien zien dat bewegend leren effectief kan zijn, mits het gericht wordt ingezet. Alleen maar lopen heeft geen meerwaarde, maar als het gaat om het lijfelijk ervaren van datgene wat cognitief geleerd moet worden, is het een effectieve werkvorm.

## JOUW EIGEN KLAS

Een goede voorbereiding is het halve werk. Dat maakt dit onderzoek duidelijk. Getalbegrip blijkt onontbeerlijk voor soepel rekenen en gelukkig kun jij als leraar daar gericht invloed op uitoefenen. Jij

in de  
praktijk

## LICHAAM SPREEKT BOEKDELEN

‘Pak allemaal je stoepkrijt, maak een rechte lijn en schrijf de getallen 1 tot en met 20 op. Is iedereen klaar? Dan gaan we hardop tellen terwijl je op de volgende cijfers stapt: 5, 6, 7, 8, 9, 10. Wat doet iedereen goed mee! Maak nu stapjes terug van 10 naar 3 en tel weer hardop. Niet omdraaien, hè? Stapjes terug lopen we achteruit, weten jullie het nog? Blijf staan op getal 3. Wat zijn de burens van dit getal?’

Aan het woord is Anne-Marie Bierman, leraar en rekencoördinator op sbo Pastoor van Ars in Den Haag. Voor een rekenles met haar ‘Papegaaien’ (niveau groep 3/4) gaat ze twee keer per week het schoolplein op, of ze blijft binnen en dan vormen de leerlingen zelf een denkbeeldige lijn op de grond. ‘Ik zet alle kinderen naast elkaar in een rij en laat ze op mijn teken allemaal tegelijk naar een getal springen, een kleine stap is 1, een sprong is 10.’

Op het schoolplein zijn er opdrachten met de korte getallenlijn (1-20) en de lange (tot 100). ‘Bij

de lange getallenlijn schrijven leerlingen alleen de tientallen op en pakken ze getallenkaartjes uit twee bakjes (afhankelijk van hun niveau) om de juiste cijfers tussen de tientallen neer te leggen.’ Leerlingen benoemen eerst het getal als ze het kaartje pakken en leggen het kaartje dan op de juiste plek tussen de tientallen. ‘Ik let dan op dat ze 47 niet direct naast de 40 leggen, maar in de buurt van de 50, zodat ze steeds meer gevoel voor verhoudingen krijgen.’

Bierman werkt nu zo’n vier jaar met de fysieke getallenlijn. Ze merkt dat haar leerlingen meer betrokken zijn. ‘Omdat we echte stapjes maken naar voor en naar achter, en bij het terugstappen ook letterlijk achterwaarts lopen, snappen ze beter wat de betekenis is van termen als: volgorde, naar voor, naar achter, meer, minder, verder. En voor mij als leraar is meteen zichtbaar wie het begrijpt en met wie ik nog een-op-een moet oefenen. Want in hun hoofd kan ik niet kijken, maar hun lichaam spreekt boekdelen.’

kunt helpen om die liniaal in het hoofd van leerlingen steeds nauwkeuriger te maken.

Alle spelletjes en taken die te maken hebben met schatten van hoeveelheden en afstanden tussen getallen zijn geschikt. Zoals Link en haar collega's laten zien, is het lijfelijk ervaren van die afstanden een krachtig middel. Je hoeft niet per se een getallenlijn op de vloer te plakken, je kunt dat ook op andere manieren bewerkstelligen. Tijdens de gymles kun je bijvoorbeeld alle leerlingen een getal geven (niet opeenvolgend, maar juist willekeurig) en hun vragen om een oplopende lijn te vormen. Of juist een aflopende.

Houd daarbij in de gaten welke leerlingen daar moeite mee hebben. Zij zijn gebaat bij extra gerichte oefeningen. Zoals gezegd is het niet raar dat kleuters afstanden soms nog verkeerd inschatten. Maar weten dat kleinere getallen dichter bij 0 staan op de lijn en grotere dichter bij 10 of 100 is iets wat ze zich wel snel eigen moeten maken.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Link, T., Moeller, K., Huber, S., Fischer, U., & Nuerk, H.-C. (2013).** Walk the number line - An embodied training of numerical concepts. *Trends in Neuroscience and Education*, 2(2), 74–84. doi:10.1016/j.tine.2013.06.005

### Verder lezen

In dit artikel op Kennislink kun je meer lezen over het met de Ig Nobelprijs bekroonde Eiffeltoren-onderzoek.

Amerom, M. van (2012). Ig Nobelprijs voor 'Eiffeltorenonderzoek'. Ohlala. Zo lijkt 'ie kleiner! *Nemokenislink.nl*.

<https://www.nemokennislink.nl/publicaties/ig-nobelprijs-voor-eiffeltorenonderzoek/>

## OM IN TE LIJSTEN

- In ieders hoofd zit een mentale getallenlijn die ons helpt bij rekenen.
- Getalbegrip (de getallenlijn) kun je gericht stimuleren met schattingstaken.
- Leerlingen lijfelijk afstanden tussen getallen laten ervaren, stimuleert het getalbegrip.
- Vooral cognitief zwakke leerlingen profiteren van oefeningen.

# 8. WAAROM VINGERTELLEN EVEN NUTTIG IS

**Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak, M. N. (2008).**

Development of number combination skill in the early school years: When do fingers help? *Developmental Science*, 11(5), 662–668.

## INTRODUCTIE

Volwassenen doen het soms ook nog. Bijvoorbeeld als ze willen natellen hoeveel gasten er ook alweer komen. Of om zichtbaar voor iedereen de tijd tot de start af te tellen bij ski- en wielervedstrijden.

Maar verder is vingertellen iets wat vooral jonge kinderen doen. Die vingers helpen hen om vat te krijgen op abstracte getallen en hoeveelheden. Toch zijn leraren en ouders weleens bezorgd: staat dit vingerwerk het echte rekenen niet in de weg? Nancy Jordan en haar collega's geven daar in hun artikel een even helder als genuanceerd antwoord op. Ze maken duidelijk dat vingertellen voor jonge kinderen een belangrijke vaardigheid is en de rekenontwikkeling stimuleert. Vanaf halverwege groep 4 kan het daarentegen die ontwikkeling belemmeren en kun je het beter ontmoedigen.

## HET IDEE

Jordan en haar collega's hadden zich al eerder gebogen over de rekenontwikkeling van jonge kinderen. Vingertellen, zo zagen ze, is een natuurlijke, intuïtieve manier van rekenen. Niet iets wat je op school leert, maar wat veel kinderen spontaan doen (zie ook kader hiernaast). De tien tastbare vingers maken allengs plaats voor abstracte getallen. Kinderen maken daar in hun hoofd een mentale representatie

### ***‘Kleuters mag je aanmoedigen om hun vingers te gebruiken’***

van en automatiseren getallen en rekenprincipes. Wanneer vindt die omslag plaats van fysiek vingertellen naar abstract rekenen? Vanuit die vraag zetten Jordan en collega's een nieuw onderzoek op. Ze volgden de rekenontwikkeling van 217 leerlingen, van groep 2 tot eind groep 4. De kinderen volgden allemaal hetzelfde rekenonderwijs waarin vingertellen gestimuleerd noch ontmoedigd werd. Op elf

momenten kregen ze een mondelinge toets, eerst nog met alleen optel- en aftreksommen onder de tien, toen ze ouder werden ook met getallen tot en met twintig. Kinderen mochten zelf weten hoe ze die sommen oplosten, met of zonder hun vingers. De onderzoekers turfden de goede antwoorden én of de kinderen wel of niet hun vingers gebruikten.

## DE INZICHTEN

Jordan en haar collega's zagen twee dingen: naarmate leerlingen ouder worden, gebruiken ze minder vaak hun vingers en worden hun antwoorden nauwkeuriger. Maar pas op voor te snelle conclusies. Dit betekent namelijk niet dat vingertellen

### **OP JE VINGERS NATELLEN**

Tellen op je vingers is van alle tijden en culturen. Je tien vingers heb je immers altijd bij de hand. Het zou zomaar kunnen dat we daar ons tientallig stelsel aan danken. Er zijn ook altijd mensen geweest die geen genoeg namen met die tien vingers. Ze bedachten oefjes om verder te reiken. Als je bijvoorbeeld met je duim de kootjes aantikt, kom je al tot twaalf op één hand. En als je dan met je andere hand meetelt hoe vaak je tot twaalf hebt geteld, kom je al tot zestig. Een middeleeuwse monnik (Bede de Eerbiedwaardige) heeft een systeem bedacht om wijzend met je vingers naar allerlei lichaamsdelen tot een miljoen te tellen. En de oude Chinezen presteerden het zelfs om met de vingers tot tien miljard te tellen. Ongetwijfeld heel ingenieus, maar bepaald onhandig. ‘Dat kun je op je vingers natellen’ betekent niet voor niets dat iets heel gemakkelijk na te gaan is.



zorgt voor slordig rekenen. Het verband ligt iets ingewikkelder.

### Nuttige hulp

Voor jonge kinderen blijkt vingertellen een nuttig hulpmiddel. Kleuters die hun vingers gebruikten om opgaven als  $3 + 4$  of  $6 - 2$  uit te rekenen, gaven vaker een goed antwoord dan leeftijdsgenoten die dat niet deden. De vingers helpen om grip te krijgen op getallen en hoeveelheden.

### Sta-in-de-weg

Op een bepaald moment in de ontwikkeling vol-  
doen die vingers steeds minder goed. Met maar tien vingers wordt het immers lastig(er) om te rekenen met grotere hoeveelheden. Bovendien is tellen op

je vingers omslachtiger dan rekenen in je hoofd. Precies wat de onderzoekers zagen: in groep 3 werd het verband tussen vingertellen en goede antwoorden al zwakker en in de loop van groep 4 bleek dat vingertellen zelfs een sta-in-de-weg. Leerlingen die dan nog steeds hun vingers gebruiken om iets uit te rekenen, doen het minder goed dan leeftijdsgenoten die rekenprincipes hebben geautomatiseerd.

### Verschillen tussen kinderen

Bij alle kinderen zagen Jordan en collega's dezelfde ontwikkelingslijn van vingertellen naar hoofd-  
rekenen. Alleen bleek die ontwikkeling bij kinderen van laagopgeleide ouders later te starten: ze begonnen later met vingertellen en gingen daar ook in groep 4 vaak nog mee door. Ze liepen daardoor achter bij

in de  
praktijk

## VERBIEDEN HEEFT GEEN ZIN

'Kinderen die nog vingertellen in groep 4, geven een signaal af: het rekenproces gaat nog niet vanzelf. Straffen of verbieden heeft geen enkele zin', weet Sonja Paulssen, leraar en rekenspecialist op basisschool Wolder in Maastricht. 'Als je zegt dat ze hun vingers niet mogen gebruiken, gebeurt het onder tafel, of ze bewegen met hun knokkels subtiel op en neer. En sommigen pakken hun liniaal uit de la en tellen daar op verder.' Die strategieën gebruiken ze met een reden, vertelt Paulssen: 'Het automatiseren zit er nog niet lekker in.'

Paulssen zegt nooit dat vingertellen niet mag, maar biedt liever op een speelse manier alternatieven aan. 'Ik ga terug naar de basis: oefenen met splitsen. Er zijn veel leuke spelletjes, zoals memory, waarbij het kind de juiste splitsing moet zoeken. Ook kun je overgooien met een

bal of cijfers op de muur hangen en dan moeten leerlingen de splitsing "vangen" met een vlieg-  
mepper. Bij het oefenen van de splitsing van 8 kan een leerling bijvoorbeeld 5 zeggen en moet een ander op het cijfer 3 slaan.'

Paulssen begint altijd met de makkelijkste splitsingen: 3 tot en met 6, daarna het cijfer 10 en dan pas 7, 8 en 9. Bij alle spellen koppelt ze de splitsingen aan een som. 'Zo leren ze welke abstracte som erbij hoort.'

Wat als de spellen niet helpen om van het vingertellen af te komen? 'De meeste leerlingen leren het vanzelf af. Lukt dat onverhoopt toch niet, dan geef ik ze vingerpoppetjes. Bij de splitsing van 5 doe ik om 2 vingers een poppetje, dan zijn er nog 3 over en vraag ik: welke som hoort hierbij? Het kost soms tijd, maar uiteindelijk leren de meeste kinderen hoofdrekenen.'

kinderen uit middenklasse gezinnen. Zeker in groep 4 leidde dat tot slechtere prestaties. Meisjes bleven langer dan jongens hun vingers gebruiken.

## IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Dit onderzoek maakt duidelijk dat vingertellen een duidelijke functie vervult in de rekenontwikkeling van jonge kinderen. De concrete, fysieke handeling van tellen op je vingers maakt hoeveelheden tastbaar. Dit helpt bij het maken van een mentale voorstelling daarvan, iets wat nodig is om vlot te kunnen rekenen. Vingertellen is dus een nuttige fase in de rekenontwikkeling. De onderzoekers adviseren dan ook om kleuters aan te moedigen hun vingers te gebruiken. In de loop van groep 4 moet het hoofd het overnemen van de vingers. Niet alleen omwille van de snelheid, maar ook om te kunnen rekenen met grotere getallen.

## JOUW EIGEN KLAS

De boodschap uit dit onderzoek is helder: voor jonge kinderen is vingertellen een handige steun, vanaf groep 4 moeten ze leren om het zonder vingers te doen. In de meeste gevallen gaat dit vanzelf: vingertellen is een nuttige, maar ook tijdelijke fase in de rekenontwikkeling. Je hoeft dus niet bang te zijn dat je kleuters iets aanleert wat jouw collega's in hogere groepen ze later weer moeten afleren. Het is als leren fietsen met zijwieltjes: de vingers zijn net als die wiel-tjes voor even een hulpmiddel. De meeste kinderen fietsen na een tijdje vanzelf op twee wielen weg. En hoe vaker ze het doen, hoe beter het gaat en dan kunnen ze ook scherpe bochten en hellingen aan. Zo gaat het met rekenen ook. Net als met fietsen is dat een kwestie van veel doen en oefenen. Zo help je leerlingen om rekenbewerkingen te automatiseren. Voor een som als  $7 + 3$  en zelfs  $13 + 5$  hebben ze dan hun vingers niet meer nodig, het goede antwoord plopt gewoon in hun hoofd op.

Als je ziet dat leerlingen in groep 4 nog steeds hun vingers nodig hebben, is dat een signaal dat ze het rekenen nog niet of onvoldoende geautomatiseerd hebben. Met extra oefentijd kun je hen vooruithel-pen. Als ze desondanks hardnekkig op hun vingers blijven tellen, kan het helpen om turvend tellen als tussenfase te gebruiken naar het echt abstracte werk. De turfjes (streepjes) vervangen als het ware de vingers en vormen een brug tussen concreet en mentaal rekenen. Let wel op hoe je de turfjes zet: in de meeste methoden is deze aanpak wel te vinden, maar dan staat het getal vijf afgebeeld als vier turfjes met een grote digitale streep erdoor (zoals volwas-senen ook vaak turven). Maar uit onderzoek weten we dat dit voor zwakkere leerlingen niet goed werkt.

***‘Vingertellen is een nuttige,  
maar wel tijdelijke fase  
in de rekenontwikkeling’***

Bij hen kun je de vijf het best verbeelden door vijf turfjes te zetten met een ovaal eromheen. Bij veel oefening gaan leerlingen een ovaal dan vanzelf zien als vijf, twee ovalen als tien et cetera, waardoor het verkort rekenen op gang komt en de weg naar reke-nen uit het hoofd wordt vergemakkelijkt.

## OM IN TE LIJSTEN

- Vingertellen is een natuurlijke en nuttige fase in de rekenontwikkeling.
- Stimuleer vingertellen bij kleuters: dit helpt hen om vat te krijgen op getallen en hoeveelheden.
- Vanaf halverwege groep 4 zit vingertellen de rekenontwikkeling in de weg en kun je dit beter ontmoedigen.
- Monitor welke leerlingen al en nog op hun vingers tellen: dit geeft informatie over hun rekenontwikkeling.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak, M. N. (2008).** Development of number combination skill in the early school years: When do fingers help? *Developmental Science*, 11(5), 662–668. doi:10.1111/j.1467-7687.2008.00715.x

### Verder lezen

Op Leraar24.nl vind je informatie over hoe leerlingen sommen tot en met tien automatiseren. [www.leraar24.nl/69600/sommen-tot-en-met-10-automatiseren-hoe-doe-je-dat/](http://www.leraar24.nl/69600/sommen-tot-en-met-10-automatiseren-hoe-doe-je-dat/)

In dit artikel kun je meer lezen over ingenieuze oefjes om je vingers voor grote getallen te gebruiken. Fritschy, Y. (2020). Hoe je op je vingers tot 10 miljard kunt tellen. *New Scientist*. <https://www.newscientist.nl/blogs/hoe-je-op-je-vingers-tot-10-miljard-kunt-tellen/>

In dit artikel vind je tips over hoe je kleuters helpt bij het leren tellen. *Leraar24.nl*. <https://www.leraar24.nl/50020/kleuters-voorbereiden-op-rekenen-voorkomt-latere-vertraging/>

## 9. ZONDER TELLEN KOMEN ZE ER NIET

Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M. K., & Nurmi, J. E. (2004). Developmental dynamics of mathematical performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96(4), 699–713.

### INTRODUCTIE

Al voordat ze in groep 3 officieel worden ingewijd in de wereld van getallen, bezitten de meeste kinderen basale rekenkennis. Ze willen bijvoorbeeld net zoveel koekjes als hun vriendje hebben en kunnen bovendien het grootste koekje aanwijzen. Vaak kunnen ze ook al (een beetje) tellen.

Wat heeft deze, vaak nog intuïtieve kennis te maken met hun latere ontwikkeling in rekenen-wiskunde? Zijn er verschillen tussen kinderen en zo ja, waardoor ontstaan die? Lange tijd was dat nog niet goed in beeld. Kaisa Aunola en haar collega's hebben daar verandering in gebracht. Als eersten laten ze zien wat er precies gebeurt in de overgang van kleuterklas naar middenbouw, dus in de overgang van intuïtieve kennis naar formeel rekenonderwijs. Hun studie biedt handvatten om rekenachterstanden tijdig aan te pakken.

### HET IDEE

Rekenen-wiskunde vraagt om diverse deelvaardigheden, zoals getallenkennis, een geheugen voor rekenkundige feiten, het begrijpen van concepten en de vaardigheid om procedures te volgen. De ontwikkeling hiervan is cumulatief: eerst leren kinderen de basis om vervolgens steeds complexere concepten en bewerkingen aan te kunnen.

Die basis moet dus in orde zijn, anders raken leerlingen achterop. Vanuit dat idee begonnen Aunola en haar collega's hun onderzoek naar de rekenwiskundige ontwikkeling van kinderen. Tot dan toe was er vooral onderzoek gedaan naar specifieke rekenbewerkingen of bij specifieke doelgroepen (zoals kinderen met rekenproblemen). Maar de Finse onderzoekers wilden juist een totaalplaatje hebben: hoe ontwikkelen doorsnee-leerlingen zich en waardoor wordt die ontwikkeling beïnvloed? Ze hoopten zo onder meer verklaringen te vinden waarom de ene leerling sneller rekenen leert dan de andere.

De onderzoekers volgden 194 leerlingen van in totaal dertien scholen drie jaar lang, van groep 2 tot en met groep 4. Halfjaarlijks maten ze de vorderingen in rekenen-wiskunde. Hun onderzoek was onderdeel van een langlopend onderzoek naar soepele overgangen tussen (de formeel in Finland niet verplichte) *preschool* en *primary school*.

### DE INZICHTEN

Aunola en haar collega's verzamelden de nodige gegevens over de leerlingen. Bij de start keken ze hoe goed kleuters konden tellen en hoe het gesteld was met hun visuele aandacht, begrijpend luisteren en metacognitieve vaardigheden (zoals kunnen bepalen wat je het best kunt doen om een probleem op te lossen). Uit eerder onderzoek waren deze zaken naar voren gekomen als mogelijk belangrijke voorspellers voor de rekenontwikkeling.

***'Kenmerk van sterke rekenaars is dat ze de basisbewerkingen al geautomatiseerd hebben'***

Bij de halfjaarlijkse metingen lieten ze leerlingen bijvoorbeeld het derde kind in de rij aanwijzen of bij plaatjes van een aantal ballen het bijbehorende getal aankruisen (getalbegrip en -herkenning). En ze lieten hen basisbewerkingen doen (optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen).

Vervolgens wierpen ze alle gegevens in de statistische hoge hoed en toen konden ze duidelijke conclusies trekken over de rekenontwikkeling van jonge kinderen en invloeden daarop.

### Twee groepen

Bij alle leerlingen was een stijgende lijn in rekenontwikkeling te zien. Maar hun ontwikkelingslijnen liepen niet allemaal even steil. Er is net als bij lezen sprake van een Mattheüs-effect (zie kader op pagina 54):

hoe beter de prestaties bij de start, hoe sneller leerlingen vooruitgaan, en omgekeerd: hoe lager dat beginniveau, hoe trager de ontwikkeling.

Dit betekent dat leerlingen op het moment dat in groep 3 de formele rekeninstructie begint, een verschillende startpositie hebben. Bovendien zullen die verschillen tussen leerlingen steeds groter worden. En inderdaad, Aunola en haar collega's zagen duidelijk twee groepen ontstaan: 121 zwakke en 73 goede rekenaars.

### **Invloeden op de ontwikkeling**

Wat bepaalt nou in welke groep een leerling terecht komt? Het rekenniveau bij de start (dus in groep 2) werd voorspeld door drie vaardigheden:

#### **MATTHEÛS-EFFECT**

'Want wie heeft, zal nog meer krijgen en wel in overvloed, maar wie niets heeft, hem zal zelfs wat hij heeft, worden ontnomen.' Deze woorden uit het evangelie volgens Mattheüs vormen de achtergrond voor wat leesonderzoekers het Mattheüs-effect noemen: het fenomeen dat goede lezers steeds beter worden en lezers die moeite hebben de lettercode te kraken, steeds verder achterop raken.

De studie van Aunola en collega's maakt duidelijk dat dit effect niet voorbehouden is aan lezen, maar ook bij rekenen opgaat. Leerlingen die de basis – tellen en getalbegrip – niet onder de knie hebben, raken steeds verder achterop. Gelukkig hoeft het er op school niet zo gortig aan toe te gaan als in het evangelie: in plaats van zwakke rekenaars iets te ontnemen, kun je hen met ondersteuning helpen de achterstand in te halen.

tellen, metacognitie en begrijpend luisteren. Voor de groeicurve sprongen vervolgens tellen en visuele aandacht eruit. Ook sekse speelt mee: jongens gaan sneller vooruit dan meisjes. Dat zou te maken kunnen hebben met het zelfbeeld van meisjes (zie ook hoofdstuk 22, 'Breek de ban van bange rekenaars'). Metacognitie helpt bij het snel kiezen van de juiste

### ***'De rekenontwikkeling is al voor de formele rekeninstructie volop in gang'***

strategie. Maar het helpt, anders dan tellen (zie hierna), niet bij het aanleren van nieuwe strategieën. Hetzelfde geldt voor begrijpend luisteren. Daarom voorspellen deze factoren wel het beginniveau, maar niet de groei. Bij zwakke rekenaars voorspelt visuele aandacht ook de groei: juist omdat ze nog niet zo rekenvaardig zijn, moeten ze hun aandacht er goed bijhouden.

### **Waarom tellen zo belangrijk is**

Telvaardigheid staat dus met stip op een. Die verklaart niet alleen de verschillende startposities van leerlingen, maar ook hoe steil of vlak hun groeicurve is. Deze vaardigheid laat goed zien dat het leerproces cumulatief is: dingen tellen letterlijk op.

De onderzoekers keken hoe soepel kinderen verder konden tellen vanaf 3, 8, 12 en 19 en terugtellen van 4, 8, 12 en 23. Vlot kunnen tellen bleek een belangrijke voorwaarde voor rekenen-wiskunde. Bij jonge kinderen is tellen de eerste strategie om een opgave te lijf te gaan. Hoe beter ze dat kunnen, hoe sneller ze leren om bewerkingen te automatiseren (zie ook hoofdstuk 10, 'Hoe leerlingen zich tafels eigen maken'). En dat automatiseren helpt weer om complexere opgaven aan te kunnen. Wie daarentegen moeite met tellen heeft, zal meer fouten maken en dat vertraagt het automatiseringsproces.

## IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Deze studie van Aunola en collega's maakt duidelijk dat de rekenontwikkeling van leerlingen al voor de formele rekeninstructie volop in gang is. Leerlingen beginnen in groep 3 niet blanco, maar bezitten al voorbereidende rekenkennis, al geldt dat niet voor iedereen in gelijke mate. Het is dus belangrijk om al in de kleuterklassen en eigenlijk nog eerder alert te zijn op niveauverschillen tussen leerlingen. Waar het bij de taalontwikkeling al gangbaar is om tijdig bij te spijkeren, bijvoorbeeld in programma's

voor voor- en vroegschoolse educatie, is er voor de vroege rekenontwikkeling minder aandacht. Aunola en haar collega's bepleiten om daar meer werk van te maken: een stevige basis op jonge leeftijd helpt latere achterstanden voorkomen. Daarbij is vooral aandacht voor tellen en getalbegrip essentieel.

Het onderzoek onderstreept verder het belang van differentiatie. Zwakke rekenaars hebben baat bij veel begeleide oefening, zodat ze leren om bewerkingen te automatiseren. Sterke rekenaars daaren-

in de  
praktijk

## GETALLEN ZIJN OVERAL

'We gaan de tafel dekken! Wie helpt me?' Vanuit de huizenhoek veren drie kleuters op. 'Ja!' klinkt het in koor. 'Mooi, met hoeveel zijn we', vraagt juf Yvonne. 'Vier? Heel goed, dan mag je vier bordjes pakken, Amy. Lisa, pak jij het bestek, en Mats, zet jij de bekers op tafel? Goed tellen, hè?'

Een 'rekenles' in de onderbouw op (excellente) basisschool De Waai in Cuijk is vaak een doeles. 'Lijfelijk, visueel en ontwikkelingsgericht', vertelt Yvonne Angenendt, leraar groep 1/2. En themagericht, met materialen zoals kastanjes en eikels in de herfst en spellen als *Ren je rot met cijfers*. 'Met deze visuele basis stimuleren we het getalbegrip van leerlingen', licht leerlingbegeleider Jetske Hollmann toe. Dat gebeurt op school, maar de leraren stimuleren ouders om ook thuis hun kind spelenderwijs kennis te laten maken met getallen. Getallenkennis bijspijkeren gebeurt op dezelfde manier. 'Zoveel mogelijk handelend, herhalend en oefenend', zegt Angenendt. 'Denk aan blokken stapelen en spelletjes met dobbelstenen; want een kind dat de dobbelsteenstructuur herkent,

begrijpt ook dat vijf stippen op een dobbelsteen hetzelfde is als vijf koekjes in hun werkboek.'

Ouders vragen weleens of hun kind een werkblad mee naar huis kan nemen. Dan legt Angenendt uit dat de leraren zo niet werken, maar dat de ouders kunnen oefenen met gezelschapsspellen of door hun kind te betrekken bij allerlei taken, zoals: We bakken een cake, wil jij vijf schepjes suiker in de kom doen? We gaan naar boven: hoeveel treden tel je en hoeveel sprongen zijn dat van de tweede naar de tiende trede?

'Vragen stellen vinden we heel belangrijk', zegt Hollmann. 'Omdat je ook hiermee getalbegrip stimuleert. Leerlingen die met LEGO een huis bouwen, stel ik vragen over de grootte van de deur (te smal) en het bed waarin het legopoppetje alleen met de benen omhoog kon slapen. In hun antwoorden zat veel rekentaal: "Oh, maar dan moeten we passen en meten. De deur moet breder, het bed langer." Die vragen en antwoorden zijn waardevol voor de leerling en voor ons. Ze laten zien dat getallen (onbewust) overal aanwezig zijn.'

tegen hoeven de basisbewerkingen niet eindeloos te oefenen, maar zijn sneller toe aan uitdagender rekenopgaven.

**JOUW EIGEN KLAS**

Net als bij taal is de rekenontwikkeling niet iets wat pas start als rekenen formeel op het lesrooster komt te staan. Jonge kinderen zijn al bezig voorbereidende rekenkennis te vergaren. En jij kunt hen daar een handje bij helpen. Dat begint al, of juist, in groep 1. Door spelenderwijs veel bezig te zijn met getallen en cijfers, en met rekenconcepten als meer, minder, groter en kleiner stimuleer je de rekenontwikkeling. Ook door het voorlezen van bijvoorbeeld prentenboeken kun je daaraan werken (zie hoofdstuk 6, ‘Een prentenboek in de rekenles’).

Je merkt op deze manier snel welke leerlingen nog moeite hebben met tellen en getallen. Dat kan een signaal zijn voor latere rekenproblemen. Als ze het tellen onvoldoende onder de knie hebben, duurt het langer voordat ze de basisbewerkingen automatiseren. En dat stagneert hun groei. Zonder ingrijpen raken deze leerlingen steeds verder achterop. Geef ze daarom extra oefening en begin daar bij voorkeur zo vroeg mogelijk mee, het liefst vanaf groep 1. Bij ernstige achterstand is mogelijk remediëring nodig (zie hoofdstuk 23, ‘Grijp vroeg in bij twijfel’). Kenmerk van sterke rekenaars is dat ze de basisbewerkingen al geautomatiseerd hebben. Zij groeien niet of nauwelijks meer door herhaling en oefening daarvan, maar hebben juist baat bij complexere opgaven. Zo bedien je elke leerling op maat en dank zij jou worden verschillen tussen leerlingen eerder kleiner dan groter.

**OM IN TE LIJSTEN**

- De rekenontwikkeling is cumulatief: zonder beheersing van basisvaardigheden stagneert de groei.
- Telvaardigheid voorspelt hoe snel leerlingen vooruitgaan.
- Moeite met tellen en kennis van getallen bij kleuters is een signaal voor latere rekenproblemen.
- Zwakke rekenaars zijn gebaat bij veel oefening, sterke rekenaars bij complexere opgaven.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M. K., & Nurmi, J. E. (2004).** Developmental dynamics of mathematical performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96(4), 699–713. doi:10.1037/0022-0663.96.4.699

### Verder lezen

In dit artikel lees je hoe je in de onderbouw kunt werken aan voorbereidend rekenen. *Didactiefonline.nl*.

Bakker, M., & Bouwman, A. (2009). Uitdaging voor groep 2 en 3. *Didactief-special Rekenen-wiskunde* (oktober), 4-5.  
[https://newsroom.didactiefonline.nl/bundles/newsroom/legacy/images/stories/Specials/rekenen\\_2009/special\\_rekenen.pdf](https://newsroom.didactiefonline.nl/bundles/newsroom/legacy/images/stories/Specials/rekenen_2009/special_rekenen.pdf)

Dit artikel vertelt hoe je bij kleuters een stevige rekenbasis kunt leggen. *Leraar24.nl*.  
<https://www.leraar24.nl/51381/bij-de-kleuters-leg-je-de-basis-voor-goede-rekenvaardigheid/>

Op Leraar 24 vind je een filmpje plus achtergrondinformatie over voorbereidende rekenvaardigheden in de kleuterklas.  
<https://www.leraar24.nl/50020/kleuters-goed-voorbereiden-op-rekenen-voorkomt-later-achterstand/>

Spelenderwijs bezig zijn met getallen is in de kleuterklas heel belangrijk: zo beginnen leerlingen beter voorbereid aan de rekenlessen in groep 3, stelt onderzoeker Egbert Harskamp in dit interview met *Didactief*.

Zunneberg, P. (2012). Begin met rekenen in de kleuterklas. *Didactief*, 5 (mei).  
<https://didactiefonline.nl/artikel/begin-met-rekenen-in-de-kleuterklas>



# 10. HOE LEERLINGEN ZICH TAFELS EIGEN MAKEN

Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995).

Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, 124(1), 83–97.

## INTRODUCTIE

*Langzaam, zo snel als zij konden.* Deze titel van het prachtige kinderboek van Toon Tellegen sprong in mijn hoofd tijdens het lezen van dit baanbrekende artikel van Patrick Lemaire en Robert Siegler. Hun verhaal is weliswaar minder poëtisch dan dat over hoe Mol leert om hollend een jas aan te trekken, maar het laat wel mooi zien hoe kinderen leren.

De twee onderzoekers hebben heel precies geobserveerd wat er gebeurt als leerlingen leren vermenigvuldigen. Welke strategie ze wanneer kiezen, hoe ze omwille van een goed antwoord soms een langzame route kiezen in plaats van de snelste en hoe ze juist door zo'n langzame route uiteindelijk sneller worden. Het artikel geeft inzicht in het leerproces en in hoe fouten van leerlingen jou iets vertellen over hun rekenontwikkeling.

## HET IDEE

De snelste strategie om een keersom op te lossen, is het antwoord uit je hoofd plukken (retrieval). En als je de tafels hebt geautomatiseerd, is dat ook de strategie die een goed antwoord oplevert. Dat is uiteraard niet iets wat een leerling meteen kan. Hij zal eerst langzamere routes moeten bewandelen alvorens hij in zijn hoofd olifantenpaadjes (afsnijdroutes) kan aanleggen.

***‘Het is geen enkel probleem  
als leerlingen verschillende strategieën  
door elkaar gebruiken’***

Leren kun je in dit geval dus definiëren als het ontdekken van de snelste route naar het goede antwoord. Vooral Siegler was al langer gefascineerd door hoe dit leren in zijn werk gaat. Hij had samen met een andere collega een computersimulatie

ontwikkeld om te voorspellen welke strategieën leerlingen kiezen en gebruiken bij het oplossen van rekenopgaven. Dat computermodel ging over optellen, maar – zo was zijn idee – het leerprincipe is bij vermenigvuldigen hetzelfde. Bovendien wilde hij

## VAN FOUTEN KUN JE LEREN

Fouten van leerlingen leren jou iets over waar ze staan in hun rekenontwikkeling.

Achter sommige fouten valt geen rekenlogica te ontdekken, bijvoorbeeld  $3 \times 4 = 17$ . Zeventien is namelijk nooit een product bij de tafels tot tien. En drie plus vier levert ook geen zeventien op. Zo'n antwoord wijst er dan ook op dat een leerling geen idee heeft wat hij moet doen en maar wat gokt.

Andere fouten wijzen erop dat leerlingen optellen en vermenigvuldigen door elkaar halen, zoals bij  $9 \times 5 = 14$ . In die gevallen is het belangrijk om aandacht te besteden aan wat het x-teken betekent. Verwarring van beide rekenbewerkingen komt ook aan het licht bij oneven/even oplossingen (zie ‘Steeds meer slimme fouten’ op pagina 59).

En dan zijn er fouten die verraden dat leerlingen de systematiek van de tafels al wel een beetje in de vingers hebben, maar ze soms nog door elkaar halen. Bij  $3 \times 6 = 21$  zijn bijvoorbeeld de tafel van zes en zeven verwisseld ( $3 \times 7$  is inderdaad 21). Ook een antwoord als  $8 \times 7 = 54$  duidt op zo'n verwarring van tafels: 54 is wel een product in de tafel van zes of negen, maar niet in die van zeven of acht. Met extra oefenen verdwijnen die fouten vanzelf.

zijn model weleens uitproberen in de praktijk om te zien of de voorspellingen ook echt kloppen. Samen met Lemaire heeft hij twintig leerlingen uit groep 4 van een Franse basisschool geobserveerd terwijl zij leerden vermenigvuldigen tot honderd (dus de tafels). Op drie momenten lieten de onderzoekers hen hardop keersommen maken. Op het eerste moment (januari) hadden de leerlingen net de eerste lessen in vermenigvuldigen achter de rug, bij het derde moment aan het eind van groep 4 beheersten de meesten de tafels. Zo konden de onderzoekers het leren op de staart trappen: ze zagen precies de ontwikkeling in manieren waarop leerlingen zochten naar het goede antwoord.

## DE INZICHTEN

In totaal zagen Lemaire en Siegler vijf soorten strategieën langskomen: het al genoemde retrieval (63 procent), herhaald optellen (20 procent), hoeveelheden op papier turven en dan optellen (1 procent), de opgave noteren (1 procent) en zeggen 'ik weet het niet' (16 procent). Ook dat laatste is een strategie, aldus de rekenonderzoekers, zelfs eentje die leerlingen snel kunnen uitvoeren. Nadeel is alleen dat deze strategie nooit tot het goede antwoord leidt.

Elke leerling gebruikte minstens twee verschillende strategieën (retrieval en herhaald optellen). Verder werden alle leerlingen steeds beter en sneller en zeiden ze steeds minder vaak 'ik weet het niet'. Gelukkig maar, dat betekent dat oefenen inderdaad kunst baart. Verder zagen de onderzoekers de volgende ontwikkelingen.

### Retrieval wordt winnaar

In de eerste sessie (dus na een week instructie) was retrieval al de winnaar bij de makkelijkste opgaven (keersommen met 1). De moeilijkere keersommen

konden leerlingen nog niet uit hun hoofd oplossen, dus daarvoor grepen ze terug op andere manieren, zoals herhaald optellen. En als ze echt niet wisten hoe ze het moesten aanpakken, zeiden ze 'ik weet het niet'. Ze pasten hun strategie aan aan de moeilijkheid van een opgave. Gaandeweg gingen ze steeds meer sommen uit het hoofd oplossen en aan het eind van groep 4 was retrieval bij alle keersommen, makkelijk of moeilijk, de meestgebruikte strategie.

### Snelheid wint ook

Dat leerlingen steeds vaker voor retrieval kiezen, is logisch: het is de snelste route naar een antwoord. En als ze merken dat ze zo ook steeds vaker de juiste oplossing geven, stimuleert dat alleen maar het uit het hoofd rekenen. Maar ook bij de andere manieren bleken de leerlingen steeds vaker de snelle variant te kiezen. Bij herhaald optellen kun je bijvoorbeeld het kleinste getal herhaald optellen ( $6 \times 3$  berekenen als  $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ ) of het grootste ( $6 \times 3$  als  $6 + 6 + 6$ ). Deze laatste variant is sneller én nauwkeuriger; omdat je maar drie optellingen hoeft te doen in plaats van zes, is de kans op fouten immers kleiner.

### Steeds meer slimme fouten

De onderzoekers constateerden dat het aantal fouten in de loop van groep 4 verminderde. Bovendien zagen ze dat gemaakte fouten steeds 'slimmer' werden: ze lieten zien dat leerlingen zich bepaalde rekenprincipes al eigen hadden gemaakt.

Zo werkt rekenen met even en oneven getallen bij optellen net anders dan bij vermenigvuldigen. Bij optellen leveren twee oneven getallen altijd een even som op, maar bij vermenigvuldigen leveren ze juist altijd een oneven product op. In het begin maakten de Franse leerlingen daardoor veel fouten, maar hun latere fouten tonen aan dat ze zich steeds

meer bewust waren van de even/oneven-regel bij vermenigvuldigen. Een oneven antwoord op bijvoorbeeld  $5 \times 4$  kwam niet of nauwelijks meer voor. Optellen en vermenigvuldigen zaten elkaar dus steeds minder in de weg.

### **Via langzaam naar snel**

Strategieën als herhaald optellen of turven zetten op papier mogen langzamer zijn, ze vervullen wel een belangrijke rol: ze helpen mee bij het automatiseren, in dit geval van de tafels. Als een leerling enkele keren  $6 \times 3$  succesvol uitrekent door herhaald optellen, gaat hij het antwoord onthouden. Een volgende keer weet hij het dan uit zijn hoofd. Zo helpt de langzame route leerlingen om steeds sneller te kunnen rekenen.

### **IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS**

Volgens kerndoel 27 moeten leerlingen basisbewerkingen met gehele getallen in elk geval tot honderd snel uit het hoofd uitvoeren, en moeten ze optellen en aftrekken tot twintig en de tafels van buiten kennen. Om dat te bereiken, moeten leerlingen eind groep 4 de tafels tot en met tien zonder nadenken kunnen oplepelen (automatiseren).

Afgezien van de tafel van 1 kunnen ze dat nog niet meteen, dat vergt oefening. Dit onderzoek van Lemaire en Siegler biedt een prachtig inkijkje in hoe dat leerproces verloopt en hoe kinderen zich de kunst van het vermenigvuldigen eigen maken.

Dat ze op weg daarnaartoe soms grijpen naar een langzamere strategie als herhaald optellen of turven zetten op papier, is alleen maar goed. Daardoor leren ze wat vermenigvuldigen precies is, welke systematiek erin zit (bijvoorbeeld dat  $6 \times 8$  hetzelfde is als  $8 \times 6$ ) en dat principes die gelden voor optellen, bij keersommen anders zijn. Het is ook geen enkel probleem als leerlingen verschillende strategieën door elkaar gebruiken om opgaven op te lossen.

Omslachtige strategieën vormen een opstapje tot snellere routes en worden steeds efficiënter door herhaalde oefening. Zo leren leerlingen bewerkingen automatiseren en memoriseren. Dit geldt niet alleen voor vermenigvuldigen, maar ook voor andere basisbewerkingen, zoals optellen en aftrekken tot twintig (zie ook hoofdstuk 8, 'Waarom vingertellen even nuttig is').

Beide rekenonderzoekers maken ook duidelijk dat het maken van fouten nuttig is voor het leerproces. Door die fouten goed te monitoren, kunnen leraren zicht krijgen op hoever leerlingen al onderweg zijn en hoe ze het best geholpen kunnen worden (zie ook kader op pagina 58).

### **JOUW EIGEN KLAS**

Als leraar in groep 4 leer je leerlingen de tafels tot tien aan. Belangrijk daarbij is dat je leerlingen voldoende tijd en oefenruimte geeft om de tafels te automatiseren. In het begin mag een leerling nog even nadenken over een tafelsom, herhaald optellen, turvend tellen of de tafelsom opdelen in makkelijke delen (bijvoorbeeld  $6 \times 5$  opdelen in het al geautomatiseerde  $5 \times 5$  en dan  $1 \times 5$  erbij optel-

***'Door hun fouten zie je hoe ver leerlingen zijn en hoe je hen het best kunt helpen'***

len). Het is ook niet erg als leerlingen verschillende strategieën benutten. Maar aan het eind van groep 4 moeten ze moeiteloos het antwoord kunnen geven. De fouten die leerlingen maken, geven jou inzicht in wat ze al wel en niet kunnen. Het antwoord 48 op  $7 \times 8$  in plaats van 56, verraadt dat leerlingen wel in de goede tafel zitten, maar nog bezig zijn met herhaald optellen (en daarbij een acht te weinig hebben geteld). Die feedback kun je dan ook geven: 48 hoort bij  $6 \times 8$ , dus wat zou dan  $7 \times 8$  zijn? Hoe vaker leerlin-

gen actief bezig zijn met deze sommen, hoe sneller ze het goede antwoord in hun hoofd prenten. Als je merkt dat leerlingen te vaak uit hun hoofd een verkeerd antwoord geven, kun je ze helpen door weer even terug te keren naar een langzamere strategie of door nog eens te wijzen op de systematiek in tafels. Meer voorbeelden van fouten en waar die op duiden, vind je in het kader op pagina 58. Ze helpen je om de vinger aan de pols te houden en leerlingen gericht te ondersteunen met het automatiseren van de tafels.

Ook als je lesgeeft in hogere groepen is het verstandig om aandacht te blijven besteden aan de tafels. Het menselijk brein is nu eenmaal zuinig: alles wat we niet regelmatig gebruiken, vergeten we.

### **OM IN TE LIJSTEN**

- Het automatiseren van tafels vraagt tijd en oefening.
- Bij leren vermenigvuldigen kan optellen eerst nog in de weg zitten.
- Door oefenen maken omslachtige oplossingsstrategieën plaats voor snellere.
- Blijf ook in de hogere groepen de tafels herhalen.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995).** Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, 124(1), 83–97. doi:10.1037/0096-3445.124.1.83

### Verder lezen

Rekenonderzoeker Tine Degrande legt in dit artikel op Didactiefonline.nl uit dat leerlingen fouten kunnen maken omdat ze een voorkeur hebben voor optellen of juist voor vermenigvuldigen.

Degrande, T. (2019). Optellen of vermenigvuldigen: voorkeur? *Didactiefonline.nl*.

<https://didactiefonline.nl/artikel/optellen-of-vermenigvuldigen-voorkeur>

Dit artikel geeft inzicht in hoe leerlingen leren vermenigvuldigen. *Volgens-bartjens.nl*.

Ven, S. van der, & Kroesbergen, E. (2012). De ontwikkeling van strategiegebruik; leren vermenigvuldigen. *Volgens Bartjens*, 31 (5), 4-7.

[https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-2216\\_De-ontwikkeling-van-strategiegebruik-leren-vermenigvuldigen](https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-2216_De-ontwikkeling-van-strategiegebruik-leren-vermenigvuldigen)

Dit artikel geeft tips om leerlingen speels te laten oefenen met het automatiseren van tafels.

*Leraar24.nl*.

<https://www.leraar24.nl/70142/spelenderwijs-de-tafels-oefenen/>

Op Kennisrotonde.nl kun je ook lezen hoe je leerlingen kunt helpen bij het automatiseren van rekenbewerkingen.

<https://www.kennisrotonde.nl/vraag-en-antwoord/rekenen-op-de-basisschool>

Op de Digitale Bibliotheek voor de Nederlandse Letteren kun je het boek *Langzaam, zo snel als zij konden* van Toon Tellegen lezen en downloaden. *Dbnl.nl*

[https://www.dbnl.org/tekst/tell003lang01\\_01/index.php](https://www.dbnl.org/tekst/tell003lang01_01/index.php)

# 11. VIA CONCREET NAAR ABSTRACT

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y., & Goldstone, R. L. (2015).

Concreteness fading in mathematics and science instruction: A systematic review. *Educational Psychology Review*, 26(1), 9–25.

## INTRODUCTIE

Stel je eens voor dat we alles een voor een en apart zouden moeten leren. Dat we het ons hoofd niet aan het verstand zouden kunnen brengen dat het een opgave als  $120 : 6$  op dezelfde manier kan oplossen als  $350 : 7$ . Of dat het eerlijk delen van winst (rekenkundig) hetzelfde werkt als het delen van een taart. Dat zou onbegonnen werk zijn.

Gelukkig bezit ons hoofd een prima wondermiddel: transfer. We leren niet alleen die ene oplossing in die ene specifieke context, maar maken ons ook de onderliggende regel eigen, zodat we die in nieuwe contexten kunnen toepassen. Hamvraag voor leraars is: hoe kun je die transfer het best bevorderen? Binnen het reken-wiskundeonderwijs is daarover veel discussie. Sommigen zeggen: je moet concreet en herkenbaar beginnen, anders begrijpen leerlingen er niets van. Anderen zeggen juist: nee, je moet meteen abstract insteken, anders komen ze nooit meer los van die concrete context.

Emily Fyfe en haar collega's vonden een gulden middenweg: *concreteness fading* (letterlijk: vervagende concreetheid). In hun artikel leveren ze bewijs dat dit werkt en leggen ze uit hoe je dit in de klas kunt toepassen.

## HET IDEE

Concreet of abstract, dat is de vraag waarover Fyfe en collega's zich bogen. Ze zagen bij beide aanpakken zowel voor- als nadelen. Voordeel van concreet materiaal – zoals knikkers of weegschalen – is dat het herkenbaar is en bij leerlingen alledaagse kennis oproept. Ze kunnen dingen vastpakken en er bewerkingen op loslaten. Iets letterlijk voor je zien, stimuleert visuele verwerking en die informatie blijft in het geheugen, lang nadat de materialen hebben plaatsgemaakt voor abstracte symbolen. Maar een nadeel is dat leerlingen afgeleid kunnen raken door details (hé, er zijn rode en gele knikkers en zelfs kat-

tenogen) of dat ze niet loskomen van het materiaal en dit dus de transfer in de weg staat.

Abstract beginnen heeft als voordeel dat je de aandacht van leerlingen meteen focust op de kern en de structuur en dit bevordert transfer. Nadeel is dat leerlingen het toch niet helemaal begrijpen: de symbolen en concepten blijven voor hen nietszeggend. Ze voeren dan wel de procedure uit, maar maken onlogische fouten of gebruiken inefficiënte oplossingsstrategieën.

### ***Maak de overgang van concreet naar abstract zo geleidelijk én expliciet mogelijk'***

En wat nu als we de voordelen van beide aanpakken benutten en de nadelen minimaliseren? Vanuit dat idee ontwikkelden Fyfe en haar collega's *concreteness fading*, een aanpak die begint met de voeten in de klei en leerlingen geleidelijk begeleidt naar abstract inzicht (en dus naar transfer).

## DE INZICHTEN

### **Drie stappen**

Voor hun aanpak van geleidelijk afbouwen van concrete contexten lieten Fyfe en collega's zich inspireren door het onderzoek van cognitiepsycholoog Jerome Bruner en diens begrip *scaffolding*, het ondersteunen van leerlingen tot ze het zelf kunnen. Bruner maakte duidelijk dat je nieuwe concepten en procedures achtereenvolgens in drie vormen moet aanbieden: een tastbare, concrete vorm (voorwerpen in 3D), een iconische vorm (een plaatje) en een symbolische vorm. Het concept 'vijf' introduceer je bijvoorbeeld eerst met vijf appels, daarna met een plaatje van vijf stippen en vervolgens met het getalsymbool 5. En het concept vergelijkingen, dus  $x$  is gelijk aan  $y$ , kun je introduceren met een weegschaal (zie kader op pagina 64).

## Expliciete begeleiding

Uit diverse onderzoeken bij leerlingen, ook door Fyfe en collega's zelf, blijkt dat deze geleidelijke aanpak werkt. Het vergroot het begrip bij leerlingen en bevordert transfer. Dat komt doordat je als leraar expliciet de overgang van concreet naar abstract

### KIKKER EN AAP

Leerlingen in de middenbouw moeten leren wat wiskundige vergelijkingen inhouden. Als ze dit nog aan het leren zijn, willen ze het =-teken in een opgave als  $3 + 4 + 5 = 3 + \dots$  nog weleens opvatten als een +-teken: ze tellen dan alle getallen op in plaats van op zoek te gaan naar de ontbrekende grootheid (9).

Hoe kun je dit concept concreet introduceren? Fyfe en collega's brachten in een eerder onderzoek twee knuffels de klas in: Kikker en Aap. Eerst mochten de leerlingen stickers verdelen tussen Kikker en Aap: zorg dat er aan beide kanten evenveel stickers zijn. In een tweede voorbeeld moesten leerlingen de twee mandjes van een weegschaal in balans brengen. Ook hier draaide het erom dat er aan beide kanten gelijke hoeveelheden waren. Als overgang tussen concreet en abstract (de schematische stap) kregen leerlingen een papier met daarop afbeeldingen van de knuffels of de weegschaal, en daaronder de notatie voor een vergelijking. Ten slotte maakten leerlingen de stap naar de volledig abstracte notatie. Dit leidde tot diep begrip: de leerlingen maakten weinig tot geen fouten in een toets, in tegenstelling tot leerlingen die het onderwerp kregen aangeleerd in louter concrete of louter abstracte vorm.

laat zien. Zo bewerkstellig je dat het concrete blijft doorklinken in het abstracte, en symbolen en concepten betekenisvol worden. Je geeft leerlingen visuele haakjes om de abstracte kennis aan op te hangen en dat vergroot hun begrip. Door hun meer voorbeelden aan te bieden, zorg je ervoor dat ze niet in dat ene voorbeeld of details daarvan blijven hangen, maar onder jouw begeleiding oog krijgen voor de achterliggende patronen en structuren. Zo versterken het concrete en abstracte elkaar.

### IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Transfer is in een specifieke context opgedane kennis toepassen in nieuwe contexten. Dit is bij alle vakken de motor voor leren, maar voor rekenen-wiskunde geldt dat eens te meer. Je zou kunnen zeggen dat dit de kern van het vak uitmaakt. Abstraheren, een belangrijk kenmerk van wiskunde, betekent immers dat je door tal van details en diverse fenomenen heen patronen kunt ontdekken.

De grote opdracht van iedereen die reken-wiskundeonderwijs geeft, is dan ook om leerlingen te helpen bij dit abstraheren. Het onderzoek van Fyfe en collega's geeft handvatten hoe leraren dat het best kunnen doen. Telkens bedenken leraren hoe ze abstracte lesstof die leerlingen moeten leren, met concrete voorbeelden kunnen introduceren en vervolgens kunnen schematiseren, als opstapjes naar die abstracte lesstof.

Het gebruik van aansprekende, herkenbare materialen en voorbeelden is uiteraard niet nieuw, leraren uit alle tijden deden en doen dat al. Maar de kneep zit 'm in de overgang van concreet naar abstract. Fyfe en collega's maken duidelijk waarom het belangrijk is om die overgang geleidelijk én expliciet te maken. Alleen zo ontstaat diep begrip en alleen zo kunnen leerlingen het geleerde toepassen op nieuwe casussen en in nieuwe situaties.

## JOUW EIGEN KLAS

Misschien denk je: in het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool valt het nog wel mee met die abstractie, dat komt pas in het voortgezet onderwijs om de hoek kijken. Maar vergis je niet: dat komt omdat jij al zo gewend bent aan de wereld van getallen en symbolen. Voor leerlingen is die wereld nog helemaal niet vanzelfsprekend. Zo kan het abstracte getalsymbool 4 verschillende dingen representeren: vier objecten (hoeveelheid), vier meter of vier minuten (maat) of buslijn 4 (meer een naam dan een hoeveelheid).

Jij begeleidt hen dus naar die abstractie. De drie stappen van Fyfe en collega's zijn daarbij een handig

richtsnoer. Ze helpen je om leerlingen geleidelijk de overgang te laten maken van het alledaagse en bekende naar geabstraheerde vormen daarvan (zoals getallen en andere wiskundige symbolen). Door niet

***“Juist de koppeling tussen het concrete, schematische en abstracte stimuleert begrip”***

een, maar meer voorbeelden te laten zien, kun je leerlingen attenderen op onderliggende patronen. Kijk: wat we met de weegschaal doen, is hetzelfde als stickers eerlijk verdelen (zie ook kader op pagina 64), kun

in de  
praktijk

## KEERSOMMEN FRÖBELEN

‘Dit is een keer-teken. Kijk er maar eens goed naar’, zegt leraar Lucy de Bie tegen groep 4 van basisschool de Regenboog in Cuijk. Lereren vermenigvuldigen begint bij De Bie met een visuele kennismaking: wat is het en hoe ziet dat keer-teken er dan uit? Daarop volgt een concrete opdracht met fröbelspullen: kraaltjes, boontjes, halve wasknijpers en paperclips. ‘Luister goed’, zegt ze, ‘jullie krijgen je allereerste opdracht: maak groepjes bij de som  $3 \times 4$ ’. In het lokaal klinkt het geluid van graaiende handjes in plastic bakjes. Druk tellend leggen de leerlingen twee groepjes op tafel: één groepje van 3 en één van 4. ‘Het gaat in het begin bijna altijd fout, ook nu weer’, weet De Bie, die al meer dan veertig jaar voor de klas staat. ‘Bij zo’n opdracht zie je dat keersommen abstract zijn.’ Daarom werkt ze eerst met materiaal en herhaalt ze dat, tot iedereen klaar is om al tekenend aan de slag te gaan met de volgende opdracht: 3 groepjes (rondjes) van 4 tekenen (stipjes). Als je  $3 \times 4$  maakt, is dat

3 keer een groepje van 4’, legt ze uit. ‘In het begin draaien ze de som nog vaak om, omdat er nog weinig begrip is. Als dat veel gebeurt, keer ik terug naar groepjes maken met materialen.’ Dit herhaalt De Bie tot het kind klaar is voor andere oplossingsstrategieën, zoals de 1-keer-meer-som. ‘Als je  $3 \times 4$  weet, tel er dan 4 bij op, dan heb je het antwoord op  $4 \times 4$ .’

Naast de vaste wekelijkse les vermenigvuldigen, oefent De Bie de tafels elke dag op verschillende manieren. Ze vraagt kinderen een verhaal bij de keersom te maken en met gym doen ze een balspel waarbij leerlingen onder hoge tijdsdruk de tafels opdreunen. Bij pauzes en naar huis gaan is ‘de codekraker’ bij de deur een mooie test om te zien wie de tafels (niet) beheerst. De leerling die het antwoord niet weet, sluit achteraan aan in de rij. ‘Bij de tweede ronde geef ik dan een tip over welke strategie ze kunnen gebruiken, dan is het antwoord meestal goed en kunnen ook deze leerlingen lekker naar buiten.’



je nog een voorbeeld bedenken waarin we dat zien? Als je merkt dat leerlingen iets nog niet begrijpen, bijvoorbeeld door de fouten die ze maken, kun je weer teruggrijpen naar dat concrete of de schematische voorstelling: weet je nog toen we met die weegschaal bezig waren, wat deden we toen ook alweer? Juist die voortdurende koppeling tussen het concrete, schematische en abstracte stimuleert begrip. En dat zorgt er weer voor dat leerlingen hun kennis ook kunnen toepassen in nieuwe situaties.

### OM IN TE LIJSTEN

- Transfer is de motor voor het leren.
- Het verbinden van concreet en abstract bevordert transfer.
- Concrete voorbeelden verstevigen het begrip: ze bieden leerlingen haakjes voor abstracte stof.
- Door het concrete expliciet af te bouwen, help je leerlingen de overstap naar het abstracte te maken.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y., & Goldstone, R. L. (2015).** Concreteness fading in mathematics and science instruction: A systematic review. *Educational Psychology Review*, 26(1), 9–25. doi 10.1007/s10648-014-9249-3

Fyfe, E., McNeil, N. M., & Borjas, S. (2015), Benefits of “concreteness fading” for children in mathematics understanding. *Learning and Instruction*, 35(October), 104–120.

### Verder lezen

In het hoofdstuk ‘Leren in de steigers’ uit het boek *Op de schouders van reuzen* kun je meer lezen over het onderzoek van Jerome Bruner over het geleidelijk afbouwen van begeleiding (*scaffolding*) bij probleemoplossen. Je kunt dit boek gratis downloaden op: [Opdeschoudersvanreuzen.nl](http://Opdeschoudersvanreuzen.nl). Kirschner, P. A., Claessens, L., & Raaijmakers, S. (2018). *Op de schouders van reuzen. Inspirerende inzichten uit de cognitieve psychologie voor leerkrachten*. Amsterdam: Didactief/Meppel: Ten Brink Uitgevers. <https://didactiefonline.nl/artikel/op-de-schouders-van-reuzen>

In zijn oratie vertelt Paul Drijvers over de rol van abstraheren bij rekenen-wiskunde. Drijvers, P. (2015). *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT*. Utrecht: Universiteit Utrecht. [https://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/Oratie\\_Paul\\_Drijvers\\_facsimile\\_20150521.pdf](https://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/Oratie_Paul_Drijvers_facsimile_20150521.pdf)

De Nederlandse Vereniging voor de Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs gaat in haar visiestuk in op abstraheren als een van de ‘hogere orde denkvaardigheden’ bij rekenen-wiskunde. *Nvorwo.nl*.

NVORWO. (2017). *Visie op reken-wiskundeonderwijs met aanbevelingen voor een toekomstige curriculum*. [http://www.nvorwo.nl/wp-content/uploads/2017/12/NVORWO-visiedocument-tbv-curriculum.nu\\_.pdf](http://www.nvorwo.nl/wp-content/uploads/2017/12/NVORWO-visiedocument-tbv-curriculum.nu_.pdf)

# III



# GEVORDERD REKENEN

Als leerlingen eenmaal de basisbewerkingen (optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen) hebben geautomatiseerd, zijn ze toe aan gevorderd rekenen. Ze gaan niet alleen rekenen met grotere getallen, maar leren ook nieuwe bewerkingen met getallen, zoals breuken.

In dit derde deel lees je wat er bij dit gevorderde rekenen allemaal komt kijken. Het doet bijvoorbeeld een groot beroep op het werkgeheugen. Om een opgave op te lossen moeten leerlingen bovendien inzicht krijgen in de tussenstapjes die ze moeten zetten. Jij kunt ze stimuleren om daarbij hun creativiteit volop te benutten.

Aan bod komen ook contextopgaven en rekenen met breuken. Je krijgt tips over hoe je kunt helpen deze zaken voor leerlingen behapbaar te maken.

# 12. GRIP OP BREUKEN

**Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011).**

An integrated theory of whole number and fractions development.

*Cognitive Psychology*, 62(4), 273–296.

## INTRODUCTIE

Dat een half meer is dan een kwart, dat weten de meeste leerlingen wel. Maar bij  $5/13$  versus

$5/7$  wordt het al lastiger. Ze laten zich afleiden door de noemer en denken dan: 13 is meer dan 7. En bij notaties als  $0,345$  versus  $0,67$  weten zelfs veel volwassenen niet precies wat nou het meest is.

Breuken vormen voor veel leerlingen dan ook een struikelblok. Dat komt, zo stellen nogal wat onderzoekers, omdat je met breuken een totaal nieuw gebied betreedt. Een gebied waarin je weinig hebt aan eerder opgedane getalkennis.

De gelauwerde psycholoog Robert Siegler maakte samen met zijn collega's Clarissa Thompson en Michael Schneider korte metten met die verklaring. Ze tonen aan dat er tussen hele getallen en breuken juist ook veel overeenkomsten zijn. En door deze te benadrukken in plaats van de verschillen maak je

het leerlingen gemakkelijker om grip te krijgen op breuken.

## HET IDEE

De kennis van hele getallen zit leerlingen in de weg bij het leren van breuken. Deze zogeheten *whole number bias* (letterlijk: vooringenomenheid door hele getallen) gold onder rekenonderzoekers jarenlang als verklaring waarom breuken aanleren zo moeilijk is.

Siegler en collega's vonden dat de verschillen veel te zwaar aangezet werden. Als je een niveau dieper kijkt, zo redeneerden zij, is er juist een essentiële overeenkomst tussen hele getallen en breuken. En dat is dat ze beide hoeveelheden aanduiden. Dat mag een futiele overeenkomst lijken naast alle verschillen, maar Siegler en collega's weten overtuigend uit te leggen waarom het wel belangrijk is. Wie inzicht heeft in die hoeveelheden, kan soepeler overweg met breuken. Je kunt daarbij juist voortbouwen op eerder opgedane kennis over hoeveelheden bij hele getallen.

Hun idee is dat niet alleen bij hele getallen, maar ook bij breuken de mentale getallenlijn een belangrijke rol speelt: hoe beter het gevoel voor hoeveelheden ontwikkeld is, hoe beter leerlingen opgaven met breuken oplossen. Om dit te bewijzen, deden zij een experiment bij 24 leerlingen uit groep 8 (11-12 jaar) en 24 leerlingen uit het tweede jaar voortgezet onderwijs (13-14 jaar).

## DE INZICHTEN

### De getallenlijntaak

Een goede manier om te kijken hoe het staat met getalbegrip is leerlingen te laten schatten: waar op de getallenlijn zou jij dit getal plaatsen? Kleuters en leerlingen uit groep 3 maken met hele getallen nog vaak inschattingfouten. Later weten ze steeds beter

## VEELGEMAAKTE FOUTEN

Overall ter wereld maken leerlingen tijdens het leren van breuken dezelfde soort fouten. Een veelgemaakte fout is dat ze een rekenbewerking uitvoeren met de tellers en noemers apart, alsof ze met gehele getallen bezig zijn in plaats van met breuken:  $3/5 + 1/2 = 4/7$ .

Een andere fout is dat ze bewerkingen door elkaar husselen. Ze hebben bijvoorbeeld goed onthouden dat je voor het optellen en aftrekken van twee breuken eerst moet zorgen dat je gelijke noemers hebt. Maar vervolgens passen ze dat ook toe op een vermenigvuldigingsopgave. Van  $3/5 \times 1/2$  maken ze dan keurig  $6/10 \times 5/10$  om vervolgens alleen de tellers te vermenigvuldigen en als antwoord  $30/10$  te geven (in plaats van  $3/10$ ).

en sneller welk getal groter of kleiner is (zie hoofdstuk 7, 'Laat ze lopen op een getallenlijn').

Ook bij breuken kun je leerlingen zo'n getallenlijntaak geven. En dat is precies wat Siegler en zijn collega's hebben gedaan. Ze vroegen de leerlingen om op een getallenlijn van 0-1 en van 0-5 enkele breuken te markeren, zoals  $1/19$ ,  $1/4$ ,  $7/5$  en  $11/4$ . Als derde taak moesten ze bij diverse breuken zeggen of ze kleiner of groter dan  $3/5$  waren. Ten slotte kregen de leerlingen nog acht opgaven voorgeschoteld waarin ze met breuken moesten rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen).

### **Zicht op hoeveelheden helpt**

Er was een duidelijk verband tussen de nauwkeurigheid van de schattingen op de getallenlijn en de rekenopgaven met breuken: hoe beter de schattingen van leerlingen, hoe beter hun prestaties bij de opgaven. Gevoel voor hoeveelheden helpt dus bij het oplossen van die opgaven (zie ook hoofdstuk 3, 'Leren schatten is van levensbelang').

Bovendien zagen de onderzoekers een ontwikkeling: de schattingen op de 0-1-lijn waren nauwkeuriger dan die op de moeilijkere 0-5-lijn. Ook ontwikkelt gevoel voor hoeveelheden bij breuken zich later dan bij gehele getallen: leerlingen in groep 8 beheersen dat vaak nog niet helemaal. Ze maakten meer fouten dan de oudere leerlingen en gebruikten minder vaak strategieën.

### **Behulpzame strategieën**

Bij breuken spelen strategieën om hoeveelheden te schatten een grotere rol dan bij hele getallen. De onderzoekers zagen verschillende strategieën langskomen. Bij de schattingstaken rondde leerlingen de breuk bijvoorbeeld af tot een gemakkelijker getal ( $6/13$  bijvoorbeeld tot  $1/2$ ) of vertaalden ze het in een percentage ( $12/13$  is ongeveer 90 procent); zo konden ze de breuk eenvoudiger op de lijn plaatsen.

Of ze verdeelden de lijn in stukken, bijvoorbeeld zeven delen om zo  $5/7$  gemakkelijker te kunnen plaatsen.

Die strategieën leunen op inzicht in hoeveelheden en helpen leerlingen. Het omgekeerde geldt ook. Zonder inzicht in hoeveelheden hebben leerlingen niet door dat ze verkeerde strategieën toepassen bij

### ***'Ook bij breuken speelt de mentale getallenlijn een belangrijke rol'***

het maken van opgaven (zie ook kader op pagina 70). Ze missen dan immers een ijkpunt om hun oplossingen te checken. Daarom, zo stellen Siegler en collega's, is het belangrijk om in de instructie bij breuken expliciet aandacht te besteden aan het verwerven van gevoel voor hoeveelheden.

### **IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS**

Rekenen met breuken is een bekend struikelblok. Het zou zelfs te moeilijk zijn voor leerlingen op de basisschool, vinden sommigen. Dat wil zeggen: op de basisschool zou het breukenonderwijs beperkt moeten blijven tot begripsvorming, waarna het formele rekenwerk in het voortgezet onderwijs aan bod zou komen.

Helemaal verdwijnen uit het basisonderwijs zullen breuken zeker niet. Alle reden om die lastige getallen wat eenvoudiger te maken voor leerlingen. Het onderzoek van Siegler en collega's biedt daarvoor goede handvatten. Allereerst leggen de onderzoekers uit hoe het komt dat breuken zo lastig zijn: het is een getalsoort die mensen zich niet vanzelf eigen maken, maar die expliciete instructie vergt. In die instructie is het belangrijk om niet de verschillen, maar juist de overeenkomsten tussen hele getallen en breuken als uitgangspunt te nemen. Per slot kan elk heel getal ook als breuk geschreven worden.

Door meer aandacht te besteden aan de hoeveelheden die getallen – heel of gebroken – uitdrukken, ontstaat er dieper begrip bij leerlingen, zowel van het concept breuken als van de bijbehorende

### ***‘Elk heel getal kan ook als breuk geschreven worden’***

bewerkingsregels. Leerlingen kunnen dan ook beter doorzien of een gevonden oplossing wel of niet

goed zal zijn, omdat ze al ruwe schattingen kunnen maken van die oplossing.

### **JOUW EIGEN KLAS**

In de bovenbouw ga je aan de slag met breuken. Dat is, zoals je zelf ongetwijfeld ook merkt in je klas, voor leerlingen pittige kost. Je kunt het voor hen wel gemakkelijker maken.

Om breuken aanschouwelijk te maken voor leerlingen, gebruiken veel leraren de befaamde pizza-

**in de  
praktijk**

### **GELIJKNAMIGE PANNENKOEKEN**

Als de breuken na de zomervakantie bij veel kinderen een beetje zijn weggezakt, neemt juf Anouk kant-en-klare pannenkoeken mee. ‘In groep 6 komen voor het eerst echte breuken aan bod, dus het is niet gek dat die kennis opgefrist moet worden,’ vertelt Anouk van der Heijden, leraar groep 7/8 op de Noord-Brabantse basisschool Sint Jozef in Lithoijen.

Voordat groep 7 zich op de pannenkoeken stort, laat Van der Heijden op een breukenposter met streken onder elkaar zien hoe het ook alweer zat. ‘Kijk  $2/8$  is evenveel als  $1/4$  en  $3/12$ .’ Met de pannenkoeken ervaren leerlingen op een aantrekkelijke manier hoe ze iets eerlijk verdelen, welke breuken daarbij horen en dat sommige breuken gelijkwaardig zijn.

‘Naarmate de sommen abstracter worden, halverwege groep 7, merk je dat het lastiger wordt. Ik geef daarom minstens één keer per week een breukenles van drie kwartier waar ik opdrachten klassikaal doe uit het boek *De wereld in getallen*.’ Ze start met het lesdoel en een instructie. De sterke rekenaars gaan vaak al snel zelfstandig aan de slag, de basisgroep volgt pas na de instructie,

waarin ze trouwens ook veel modelt. ‘Ik kijk eerst naar de breuk met de grootste noemer ( $5/6$ ), dan kijk ik of ik van  $2/3$  ook een breuk met die noemer (zesde) kan maken. Dat wordt dan  $4/6$ .  $2/3$  is dus evenveel als  $4/6$ .  $5/6$  blijft  $5/6$ . Het verschil is dan  $1/6$ .’

Bij de zelfstandige verwerking mag overlegd worden. ‘Het is leuk om te zien hoe leerlingen dan zelf trucs, manieren en strategieën ontdekken om een som sneller uit te rekenen. “Hé, het is gewoon de tafel van 4.”’

Wat doet Van der Heijden als het kwartje niet valt? ‘De zwakkere rekenaars krijgen een verlengde instructie. Ik begeleid ze met breukencirkels en -streken of met spellen uit de kist van het rekenprogramma *Met Sprongen Vooruit*. Er zitten bijvoorbeeld speelkaarten in met vijf breuken die ze per groepje van groot naar klein moeten neerleggen. Een spel dat ook in groep 8 nog werkt om de stap naar de abstracte som te vereenvoudigen. Als materiaal geen effect heeft, dan zit er iets anders onder. Zoals tafels die nog niet goed geautomatiseerd zijn. Dan gaan we terug naar de basis: tafels trainen.’



taartpunten. Dat is prima om leerlingen duidelijk te maken dat het bij breuken om deel-geheelrelaties gaat. Maar daar zitten ook beperkingen aan. Druk maar eens een breuk als  $734/878$  uit met taartpunten. Ook breuken als  $4/3$  vinden leerlingen met deze methode lastig: hoe kun je nu vier stukken halen uit een taart die in drieën is verdeeld?

Vul dit daarom aan met instructie en voorbeelden waarbij leerlingen gevoel voor hoeveelheden verwerven: wat voor soort getal is een breuk en welke hoeveelheid drukt het uit? Dat kan door bijvoorbeeld

te werken met een getallenlijn. Net zoals Siegler en collega's deden, geef je leerlingen schattingstaken: waar op deze lijn van 0-1 denk je dat deze breuk ligt? Begin met de lijn 0-1 en als leerlingen dat goed kunnen, kun je ook werken met de lijn 0-5. Je kunt ook elke dag een korte quiz van enkele minuten doen waarin leerlingen op papier of wisbordjes schrijven welke breuk van een setje de grootste hoeveelheid uitdrukt. Hoe meer gevoel leerlingen krijgen voor die hoeveelheden, hoe meer en gemakkelijker grip ze krijgen op breuken.

## OM IN TE LIJSTEN

- Breuken zijn ook getallen: benadruk liever de overeenkomsten met hele getallen dan de verschillen.
- Grip op hoeveelheden helpt leerlingen om te rekenen met breuken.
- Leg breuken niet alleen uit met deel-geheel, maar besteed ook expliciet aandacht aan gevoel voor hoeveelheden.
- Gevoel voor hoeveelheden kun je stimuleren met schattingstaken en de getallenlijn.



## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011).** An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273–296. doi:10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

### Verder lezen

In dit artikel vind je tips voor het lesgeven over breuken.

*Didactiefonline.nl.*

Koopman, M., Thurlings, M., & Den Brok, P. (2015). Beter in breuken. *Didactief*, 7 (september).

<https://didactiefonline.nl/artikel/beter-in-breuken>

In dit artikel vertelt een leraar hoe hij aan breuken werkt door met legostenen te bouwen.

*Didactiefonline.nl.*

Elzinga, A. (2020). Breuken bouwen. *Didactief-special Spelend leren*, januari-februari.

<https://didactiefonline.nl/artikel/breuken-bouwen>

Wat vraagt een les over breuken van jou als leraar?

Die vraag staat centraal in dit artikel.

*Didactiefonline.nl.*

Koopman, M., Bruin, G., & Den Brok, P. (2013). Ook bij breukenonderwijs maakt de leraar het verschil. *Didactief*, 10 (december).

<https://didactiefonline.nl/artikel/ook-bij-breukenonderwijs-maakt-de-leraar-het-verschil>

In dit artikel vind je tips om met leerlingen aan breuken te werken. *Volgens-bartjens.nl.*

Steinvoorte, S. (2005). Handig rekenen - Wat is meer: drie-vierde of twee-derde? *Volgens Bartjens*, 24(3), 7.

[https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3032\\_Handig-rekenen-Wat-is-meer-drie-vierde-of-twee-derde](https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3032_Handig-rekenen-Wat-is-meer-drie-vierde-of-twee-derde)

# 13. HOE HET WERKGEHEUGEN WERKT

**Friso-Van Den Bos, I., Van der Ven, S. H. G., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2013).**

Working memory and mathematics in primary school children: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 10(February), 29–44.

## INTRODUCTIE

Kennis is de basis. Maar voor de meeste taken is meer nodig: je moet ook kunnen goochelen met die kennis. De juiste informatie op de juiste tijd tevoorschijn halen en weten wat je daarmee moet doen. Gelukkig bezit ons brein daarvoor een meestergoochelaar: het werkgeheugen.

Dit werkgeheugen speelt een cruciale rol in de rekenontwikkeling van kinderen. Daarover zijn onderzoekers het eens. Alleen waren er tegenstrijdige bevindingen over welke functies van het werkgeheugen vooral van belang zijn. Ilona Friso-van den Bos en haar collega's wilden dat voor eens en altijd helder in kaart brengen. In hun meta-analyse

houden ze alle relevante onderzoeken kritisch tegen het licht. Daarmee geven ze inzicht in wat er komt kijken bij het maken van rekenopgaven en ook waar het mis kan gaan.

## HET IDEE

Naar de rol van het werkgeheugen bij (leren) rekenen is heel veel onderzoek gedaan. De algemene conclusie is: hoe beter het werkgeheugen functioneert, hoe beter leerlingen presteren. Zo zagen onderzoekers dat bij zwakke rekenaars het werkgeheugen (nog) minder goed ontwikkeld was.

Voor rekenen zijn drie executieve functies in het werkgeheugen van belang: inhibitie, shifting en updating (zie voor uitleg kader hiernaast). Maar over de vraag welke functie nu het best de rekenontwikkeling voorspelt, daarover waren onderzoekers het niet eens. En juist dat wil je weten, want dan kun je gericht ingrijpen bij leerlingen die achterblijven.

Daarom hebben Friso-van den Bos en haar collega's alle relevante onderzoeken over kinderen in de basisschoolleeftijd, 111 in totaal, goed geanalyseerd. Om te ontdekken waarom er zulke tegenstrijdige bevindingen waren, rafelden ze de opzet van elke studie uiteen. Want als bijvoorbeeld de soort taken waarmee je rekenprestaties meet, verschillen, vergelijk je appels met peren. Hetzelfde geldt voor de leeftijd van de onderzochte kinderen: misschien werkt het bij jonge kinderen wel anders dan bij oudere. Door dat goed op een rijtje te zetten, konden ze wel tot eensluidende conclusies komen.

## DE INZICHTEN

### De juiste informatie in de lucht houden

Alle vijf onderzochte aspecten van het werkgeheugen (zie kader hiernaast) bleken van invloed op rekenprestaties van leerlingen. Maar veruit de belangrijkste bleek *verbal updating*. Deze functie

## DE GROTE UITVOERDER

Ons werkgeheugen kun je zien als een gereedschapskist met diverse onderdelen. Voor elke klus is er een eigen handige tool. Zo zijn er twee systemen die zorgen voor tijdelijke opslag: eentje voor ruimtelijk-visuele en eentje voor talige informatie. Deze twee zijn, zeg maar, de domme krachten, voor het echte werk tekent de grote uitvoerder (*central executive*). Bij rekenen zijn drie executieve functies belangrijk. Allereerst voorkomen dat je te snel een dominante, maar foute oplossing kiest (inhibitie), bijvoorbeeld bij de som  $2 + 3 = ?$  je spontane eerste ingeving 4 (immers het volgende getal in de reeks) onderdrukken. Verder zorgen dat je soepel heen en weer kunt gaan tussen mogelijke oplossingsstrategieën (shifting) en dat je telkens monitort of de opgehaalde talige en ruimtelijk-visuele informatie wel de juiste is of dat er andere nodig is (updating).

zorgt ervoor dat je bij het oplossen van een rekenopgave de juiste informatie in de lucht houdt. Om  $9 + 6$  op te lossen, vul je 9 aan tot 10 door 6 in 1 en 5 te splitsen, dus je doet eerst de som  $9 + 1 = 10$  en vervolgens  $10 + 5 = 15$ . Als je onderweg iets kwijtraakt, lukt het niet meer en maak je fouten. Zwak

***‘Hoe beter het werkgeheugen functioneert, hoe beter leerlingen presteren’***

ontwikkelde updating is een voorspeller voor latere rekenproblemen. Eenvoudige opgaven kunnen leerlingen nog wel uit het hoofd leren (memoriseren en

automatiseren), maar als het ingewikkelder wordt, zijn ze echt aangewezen op updating.

**De rol van leeftijd**

Bij twee functies bleek er een relatie met leeftijd te zijn. Hoe ouder een leerling wordt, hoe nauwer de band tussen prestaties en ruimtelijk-visuele updating. Dit laatste wil zeggen dat je in je hoofd een voorstelling van een opgave maakt. Je gebruikt dus geen vingers meer, maar ziet de cijfersymbolen of bij de opgave horende handelingen voor je. Bij de opgave  $1/2 + 1/3$  zie je bijvoorbeeld een halve en een derde taart voor je. Maar hoe tel je die bij elkaar op? Daarvoor is updating nodig: je moet in je hoofd

in de  
praktijk

**‘SPELEN’ MET WERKGEHEUGEN**

Aan een ronde tafel zit een groepje leerlingen. Een jongen zegt: ‘5 en 5 is 10’. Zijn buurvrouw herhaalt: ‘5 en 5 is 10 én 9 en 3 is 12’, waarop een ander zegt: ‘5 en 5 is 10, 9 en 3 is 12, 3 en 1 is 4’. In het tweede rondje gaat het ‘mis’ als een leerling een van de eerdergenoemde rekensommen overslaat. ‘Oh, jij hebt er al veel onthouden. Nu gaan we proberen om nóg verder te komen’, moedigt leraar Arja de Jonge-Waardenburg aan. Ze speelt met haar leerlingen op basisschool De Ester in het Brabantse Escharen het spel *Ik reken en ik reken uit*, een variatie op *Ik ga op reis en ik neem mee*.

De spelinterventie is een idee van schooldirecteur Leontine Weijers, die in 2019-2020 aan de Open Universiteit onderzoek deed naar het onderwerp. Juf Arja ging drie keer per week een kwartier met vaste rekenspellen aan de slag, zoals stippenmemory en rekensommen flitsen op het bord om de zintuigen te activeren en (geheugen)spellen als:

*Brainbox Kaatje*, *Exago* en *Memory*. Bij het spel *Ik reken en ik reken uit* zag De Jonge-Waardenburg de meeste verbetering. ‘Een ontzettend leuk, opbouwend spel. De leerlingen werden steeds beter en sneller.’ Ook bij de groepjes zwakkere rekenaars zag ze verbetering. ‘Wel minder sterk, maar ook hun algemene rekenvaardigheden gingen vooruit.’

Ze moedigde de leerlingen steeds aan iets verder te komen. En hoe beter het ging, hoe groter hun enthousiasme. ‘Als je een spelelement hebt en kinderen vinden het leuk, dan gaan ze ervoor. Niemand had door dat ze aan rekenvaardigheden en werkgeheugen werkten.’

Inmiddels staat er op school een box met spellen om executieve functies te stimuleren, liefst bij alle groepen. Weijers: ‘Helaas is er door corona minder gebruik van gemaakt dan wenselijk, maar het staat dit schooljaar weer op het curriculum.’

de optelling anders formuleren, als het ware voor je zien dat een taart uit zes stukken kan bestaan en dat  $1/2$  gelijk is aan  $3/6$  en  $1/3$  aan  $2/6$ , dus dat de oplossing  $5/6$  is.

Shifting, het soepel kunnen wisselen tussen mogelijke oplossingsstrategieën, wordt minder belangrijk. Dat klinkt contra-intuïtief. Je zou denken dat deze functie bij ingewikkelder opgaven juist belangrijker wordt. Maar, zo leggen de onderzoekers uit, jonge leerlingen zijn vaak nog zoekende en druk bezig veel strategieën uit te proberen. Bij een opgave als  $7 - 3 = 2$  denken ze aanvankelijk vaak dat het om een minsom gaat. Ze moeten dus snel kunnen wisselen van strategie. Oudere leerlingen hebben zich de handigste strategieën al eigen gemaakt en voorzien beter hoe je een opgave kunt oplossen.

### De rol van leerstoornissen

Bij leerlingen met leerstoornissen is de invloed van het werkgeheugen op rekenprestaties nog groter. Zij gebruiken minder efficiënte oplossingsstrategieën en doen daarmee een groter beroep op de capaciteit van het werkgeheugen. Ze hebben bijvoorbeeld minder parate kennis en kunnen dus niet eenvoudigweg iets uit hun langetermijngeheugen plukken (retrieval), maar moeten alles uitrekenen. Tegelijkertijd is hun werkgeheugen vaak minder goed ontwikkeld, dus zijn ze dubbel in het nadeel.

### IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Het onderzoek van Friso-van den Bos en collega's stelt allereerst voor wetenschappers orde op zaken. Maar hun werk heeft zeker ook praktische implicaties. Het benadrukt hoe belangrijk het werkgeheugen is voor de rekenontwikkeling. Bovendien brengt het executieve functies onder de aandacht die vooral bij rekenen belangrijk zijn: inhibitie, updating en shifting. Bij rekenen draait alles om het kiezen en toepassen van de beste en efficiëntste oplossingsstrategie. En

dat is precies de taak van het werkgeheugen. Hoe soepeler leerlingen informatie kunnen ophalen, in de lucht houden en bewerken, hoe beter en sneller ze opgaven kunnen oplossen.

Dat kunnen leerlingen uiteraard niet meteen. Daarom is een goede, cumulatieve leerlijn belangrijk, waarin leerlingen steeds voort kunnen bouwen op wat ze al geleerd hebben (zie hoofdstuk 17, 'Een

### ***'Alles draait om het kiezen en toepassen van de efficiëntste oplossingsstrategie'***

logische lijn in rekenen'). Om overbelasting van het werkgeheugen te voorkomen, moeten leerlingen rekenbewerkingen automatiseren en omslachtige strategieën achter zich laten. Ze moeten bijvoorbeeld de tafels uit het hoofd kennen (zie hoofdstuk 10, 'Hoe leerlingen zich tafels eigen maken') en het veilige, maar inefficiënte vingertellen afleren (zie hoofdstuk 8, 'Waarom vingertellen even nuttig is'). Zo zijn ze klaar voor de volgende stap: complexere rekenbewerkingen.

Meer inzicht in de rekenontwikkeling en achterliggende breinmechanismen biedt handvatten om in te grijpen, bijvoorbeeld gericht trainen van executieve functies.

### JOUW EIGEN KLAS

Of leerlingen hun opgaven wel of niet goed hebben gemaakt, is eenvoudig te zien. De ontwikkeling van de executieve functies die voor rekenen van belang zijn, is minder makkelijk in beeld te krijgen. Maar rekenprestaties van je leerlingen geven daar wel indirect informatie over.

Als leerlingen snel en foutloos werken en zich nieuwe stof snel eigen maken, kun je ervan uitgaan dat hun werkgeheugen goed ontwikkeld is. Traag werken, veel fouten maken of een combinatie van

beide zijn daarentegen signalen dat er nog iets aan schort. Leerlingen die snel antwoorden, maar vaak de plank mislaan, zouden problemen kunnen hebben met inhibitie: ze noemen het eerste antwoord dat in hen opkomt. Ze moeten goed leren kijken naar opgaven en hun eerste ingeving checken: klopt dit wel met wat er wordt gevraagd? Door even te vertragen, maken ze minder fouten en dat bevordert het automatiseren.

Bij zwakke rekenaars is updating vaak minder goed ontwikkeld. Je kunt hen helpen met 'uitrekenpapier': ze kunnen dan tussenantwoorden op papier zetten om zo hun werkgeheugen te ontlasten. Bijvoorbeeld bij  $3 \times 17$  de tussenantwoorden noteren:  $17 + 17 = 34$   $+ 17 = 50 + 1 = 51$ . De kans dat ze een fout maken, is zo een stuk geringer dan als ze de oplossing volledig in hun hoofd uitrekenen.

Traag werken kan duiden op het moeite hebben met wisselen tussen strategieën (shifting) of, zeker als leerlingen ook veel fouten maken, het in de lucht houden van informatie. Dit kan betekenen dat ze basisbewerkingen nog onvoldoende beheersen. Help leerlingen om de opgave in kleinere stappen op te delen en deze veel te oefenen. Zo ontlasten ze hun werkgeheugen en leren ze om die basis te automatiseren. Er blijft dan later meer werkgeheugencapaciteit over voor het wisselen van en werken met informatie.

Het los trainen van executieve functies heeft weinig zin, wat aanbieders van cursussen hierover ook mogen beloven. Het is maar zeer de vraag of leerlingen het geleerde dan ook toepassen in de rekenles. Daarom is het belangrijk dat je training ervan altijd inbedt in die rekenles.

**OM IN TE LIJSTEN**

- Een goed ontwikkeld werkgeheugen is cruciaal voor de rekenontwikkeling.
- Het werkgeheugen heeft een beperkte capaciteit, daarom moeten leerlingen ook bewerkingen automatiseren.
- Een effectieve rekenstrategie leidt tot het goede antwoord én belast het werkgeheugen zo min mogelijk.
- Fouten van leerlingen leren je iets over de ontwikkeling van de voor rekenen belangrijke executieve functies.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Friso-Van Den Bos, I., Van der Ven, S. H. G., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2013).** Working memory and mathematics in primary school children: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 10(February), 29–44. doi:10.1016/j.edu-rev.2013.05.003

### Verder lezen

In een interview met *Didactief* vertelt rekenonderzoeker Ilona Friso-van den Bos onder meer over de rol van het werkgeheugen. *Didactiefonline.nl*.

Ros, B. (2014). Leer kleuters tellen. *Didactief*, 9 (november).

<https://didactiefonline.nl/artikel/leer-kleuters-tellen>

In het hoofdstuk 'De leerkracht als geheugenmanager' uit het boek *Op de schouders van reuzen* kun je meer lezen over hoe het werkgeheugen functioneert.

*Opdeschoudersvanreuzen.nl*

Kirschner, P. A., Claessens, L., & Raaijmakers, S. (2018). *Op de schouders van reuzen. Inspirerende inzichten uit de cognitieve psychologie voor leerkrachten*. Amsterdam: Didactief/Meppel: Ten Brink Uitgevers.

<https://didactiefonline.nl/artikel/op-de-schouders-van-reuzen>

In dit artikel legt Hans van Luit uit hoe een haperend werkgeheugen kan zorgen voor problemen met rekenen.

Luit, H. van (2013). Lees- of rekenprobleem. Waar begint het? *Balans*, 26(9), 27-29.

<https://www.leokannerschool-so.nl/uploads/portal/afbeeldingen/Leerproblemen-lees-of-rekenprobleem-waar-begint-het-Balans-jaargang-26-nr-9-2013-door-Professor-Dr-J.-E.-H.-van-Luit.pdf>

# 14. DE REKENRADERTJES IN ONS HOOFD

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., Schatschneider, C., & Fletcher, J. M. (2006).

The cognitive correlates of third-grade skill in arithmetic, algorithmic computation, and arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 98(1), 29–43.

## INTRODUCTIE

Ons hoofd ratelt erop los als we aan het rekenen zijn. Allerlei hersenfuncties werken samen om een opgave tot een goed einde te brengen. Bij sterke rekenaars is het een geoliede machine, waarin alle processen in elkaar grijpen. Maar bij anderen wil er weleens een radertje haperen of zelfs vastlopen.

Inzicht in dat raderwerk helpt om te begrijpen wat er bij rekenen allemaal komt kijken en dus om leerlingen gerichter te ondersteunen. Echt een totaalplaatje lag er nog niet, alleen een berg losse schroeven. Lynn Fuchs heeft met zeven collega's een titanenklus geklaard door alles in elkaar te passen. Hun onderzoek geeft inzicht in hoe diverse rekentaken, zoals cijferen en contextopgaven, zich bij leerlingen uit groep 5 tot elkaar verhouden en wat hun hoofd daarvoor precies moet kunnen.

## HET IDEE

Werkgeheugen, langetermijngeheugen, verwerkingssnelheid, aandacht, fonologische verwerking, woordherkenning en nog een zwijkje cognitieve processen. Alles was al eens langsgelopen in onderzoek naar wat succes in rekenen bepaalt. Maar de meeste onderzoeken focusten dan op één proces plus één specifieke rekentaak. Het waren allemaal een-tweetjes zogezegd. Zo krijg je nooit zicht op hoe rekentaken zich tot elkaar verhouden.

Nuttig voorwerk, maar nu is het tijd voor een totaalplaatje, vonden Fuchs en haar collega's. Ze wilden precies weten welke cognitieve processen bepalend zijn voor het goed uitvoeren van rekentaken. En dat niet alleen, ze wilden ook zicht krijgen op hoe die processen mogelijk per soort rekentaak wisselen. Het gangbare beeld is namelijk dat er een hiërarchie zit in het verwerven van reken-wiskundige vaardigheden: ze bouwen op. De lagere vaardigheden, zoals tellen en cijferen, moet je eerst onder de knie hebben alvorens je ingewikkelder bewerkingen en

procedures (logaritmes) kunt uitvoeren. Dat klinkt logisch, maar klopt het ook? Om dat uit te zoeken hebben Fuchs en collega's gekeken naar drie soorten rekentaken die in groep 5 aan bod komen: basisvaardigheden van rekenen met getallen onder de tien ( $3 + 2$ ), kale opgaven waarvoor je moet cijferen ( $35 + 29$  of  $45 - 34$ ) en contextopgaven met getallen onder de tien, waarvoor leerlingen dus de basisvaardigheden nodig hebben (Jan heeft 8 euro in zijn spaarpot. Hij geeft er 3 uit aan snoep. Hoeveel euro heeft hij nog over?).

Vervolgens hebben de onderzoekers 312 vijfdegraders met verschillende rekencapaciteiten (25 procent scoorde bovengemiddeld en 25 procent ondergemiddeld op de rekentoets eind groep 4) een hele batterij rekentoetsen en cognitieve toetsen afgenomen. Alle kandidaten voor bepalende cognitieve processen voor rekenprestaties uit eerder onderzoek kwamen langs. De leraren vulden een vragenlijst in

## TAAL EN REKENEN

Voor rekenen heb je ook taalvaardigheid nodig. Bij contextopgaven is dat duidelijk: hun kenmerk is immers dat de opgave in taal verpakt is. Maar ook als er alleen maar getallen aan te pas komen in een opgave, spreekt taal een woordje mee. Getallen en symbolen roepen namelijk onwillekeurig ook de klanken van de bijbehorende woorden op (fonologisch proces). Dus bij het zien van een 3 denk je hoofd 'drie'. Dat moet ook wel, want stel je voor dat dat niet zo zou zijn. Dan zou die 3 een betekenisloze vorm blijven. Het kan geen kwaad om te bedenken dat dat voor beginnende rekenaars ook het geval is: zij moeten via de taal de getallen veroveren.

over het concentratievermogen van hun leerlingen. Uit alle aldus verzamelde data konden Fuchs en collega's het raderwerk opbouwen.

## DE INZICHTEN

### Aandacht is essentieel

Eén factor (radertje) kwam als absolute winnaar uit de bus: aandacht. Dit bleek voor alle rekentaken essentieel: hoe slechter de concentratie van leerlingen, hoe slechter de rekenprestaties, of het nu om eenvoudig cijferen of de complexere bewerkingen ging.

Dat is logisch: als je het tellen nog moet leren, moet je je hoofd erbij houden. Bij de complexere bewerkingen mag het tellen dan bij de meeste leerlingen geautomatiseerd zijn, ze moeten alle aandacht houden bij het toepassen van bewerkingen in de juiste volgorde. Ze moeten zich bovendien niet laten afleiden door details die er niet toe doen, bijvoorbeeld in de verhaaltjes bij contextopgaven.

Overigens wijzen de onderzoekers erop dat leerlingen ook ongeconcentreerd kunnen zijn, omdat ze (nog) niet goed begrijpen wat ze moeten doen. Ze weten dus niet waar ze hun aandacht op zouden moeten richten. Met gerichte instructie van de leraar kunnen ze dat wel.

### Basisvaardigheden ook

Behalve aandacht blijkt ook de beheersing van basisvaardigheden (rekenen met getallen onder de tien) essentieel. Dit voorspelt hoe goed leerlingen zijn in het uitvoeren van bewerkingen, of dat nu kale sommen of contextopgaven zijn.

Dit ondersteunt de gedachte dat reken-wiskundige vaardigheden hiërarchisch zijn: je hebt de eenvoudigere vaardigheden nodig voor de complexere. Toch bleek het kunnen uitvoeren van procedures bij kale sommen, niet te voorspellen hoe goed leerlingen in contextopgaven zijn. Dat komt deels omdat de con-

textopgaven beperkt bleven tot rekenen met getallen onder de tien. Maar ook spelen talige radertjes een rol (zie hierna).

### Alle helpers

Voor het succesvol maken van kale optel- en aftrekopgaven zijn alleen aandacht en beheersing van basisvaardigheden van belang.

Bij cijferen zijn drie radertjes belangrijk. Aandacht noemden we al. De andere twee helpers zijn verwerkingssnelheid en fonologisch decoderen. Hoe sneller leerlingen kunnen tellen, hoe sneller ze zich eenvoudige sommen eigen maken en oplossingen automatiseren (zie ook hoofdstuk 8, 'Waarom vingertellen even nuttig is'). Bij fonologie denk je eerder aan taal, maar ook bij rekenen telt dit mee (zie kader op pagina 80).

### ***'Hoe slechter de concentratie van leerlingen, hoe slechter de rekenprestaties'***

Ook bij contextopgaven spelen, naast aandacht en beheersing van basisvaardigheden, talige processen een belangrijke rol: hoe beter leerlingen zijn in conceptvorming, woordherkenning, woordenschat, lees- en luistervaardigheid, hoe beter ze deze contextopgaven kunnen oplossen. Ze moeten vlot raad weten met de woorden en daaruit de concepten weten te halen die nodig zijn om de opgaven op te oplossen. Ook non-verbaal probleemoplossen is hiervoor nodig: leerlingen moeten kunnen ordenen en redeneren: wat is precies het probleem dat ik moet oplossen?

### En werkgeheugen dan?

Je mist vast een belangrijke helper in het geheel: werkgeheugen. Hoe kan het nou dat dat niet meedoet? Dat zou haaks staan op wat veel onderzoekers eerder hebben aangetoond.



Inderdaad speelt het werkgeheugen wel degelijk een rol. Maar deze helper zit, zo leggen Fuchs en collega's uit, verstopt in de andere cognitieve processen. Die doen namelijk stuk voor stuk een beroep op het werkgeheugen. Het speelt kortom op de achtergrond wel degelijk een onmisbare rol.

## IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Wil je leerlingen gericht ondersteunen, dan is het nuttig om te weten wat er nodig is voor soepel rekenen. Het onderzoek van Fuchs en haar collega's biedt leraren hiervoor enkele handvatten.

Allereerst onderstreept het dat de basis goed op orde moet zijn alvorens leerlingen toe zijn aan complexere bewerkingen. De inzichten uit dit onderzoek helpen dan ook bij het formuleren van een heldere leerlijn, waarin leraren uit hogere groepen voortbouwen op wat leerlingen in eerdere groepen hebben geleerd (zie ook hoofdstuk 17, 'Een logische lijn in rekenen'). Goede overdracht tussen leraren uit diverse groepen is daarbij cruciaal: bij sommige leerlingen is de rekenstof uit het voorgaande leerjaar mogelijk nog onvoldoende geland. Dat kan hen hinderen bij het zich eigen maken van nieuwe, vaak complexere stof. Verder biedt het onderzoek inzicht in wat er nodig is voor afzonderlijke rekentaken. Aandacht blijkt het allerbelangrijkst. Leraren kunnen leerlingen

### ***'Moeite met taalverwerking kan het oplossen van rekenopgaven in de weg zitten'***

hierbij helpen door te werken aan concentratie en werkhouding in het algemeen en door gericht te werken aan begrip van hoe een bepaalde rekentaak opgelost moet worden en welke informatie wel of niet relevant is.

Daarnaast speelt taalvaardigheid ook bij rekenen een rol, zeker bij contextopgaven. Moeite met taal-

verwerking kan het oplossen van rekenopgaven in de weg zitten. Door zich daarvan bewust te zijn, kunnen leraren problemen vóór zijn en tijdig werken aan zowel taal- als rekenbegrip.

## JOUW EIGEN KLAS

Als leerlingen in groep 5 bij jou binnenstappen, verwacht je dat ze de basisvaardigheden van rekenen tot tien beheersen. Daar kun je dan op voortbouwen bij bijvoorbeeld het werken aan contextopgaven. Maar je zult vast ook de ervaring hebben dat er altijd leerlingen zijn die de basis nog niet beheersen. Zij verdienen extra aandacht van jou. Kijk maar naar de leerlingen in het onderzoek van Fuchs en collega's: hoe slechter ze de basale rekenfeiten beheersten, hoe meer moeite ze hadden met complexere opgaven.

Als je dus merkt dat leerlingen die rekenfeiten nog niet geautomatiseerd hebben, bijvoorbeeld nog hardop tellen bij eenvoudige rekenbewerkingen met getallen onder de tien of nog steeds vanaf het kleinste getal in de som doortellen, is het belangrijk dat je eerst die achterstand wegwerkt. Ze zijn dan nog onvoldoende klaar voor het moeilijkere werk. Vraag je collega's uit vroegere groepen dus expliciet hoe het ervoor staat bij alle leerlingen.

Behalve beheersing van de basis is concentratievermogen belangrijk. Bij complexere opgaven moeten leerlingen vaak meer stappen zetten. Daarvoor moeten ze hun hoofd erbij houden. Leerlingen die snel afgeleid zijn, maken eerder fouten dan klasgenoten die geconcentreerd werken. Soms kan een slechte concentratie ook duiden op onbegrip: als leerlingen niet weten wat ze moeten doen, dan weten ze ook niet waar ze hun aandacht op moeten richten. Ze hebben jou nodig voor gerichte instructie en feedback om weer op gang te komen. Vooral bij contextopgaven is het verder belangrijk dat leerlingen zich leren afsluiten voor onbelangrijke details in het ver-

haaltje. Of Jan nou snoep of een voetbal koopt van zijn zakgeld doet er natuurlijk niet toe.

Heb je het gevoel dat gebrekkige taalvaardigheid het rekenen in de weg zit? Kijk bij taalzwakke leerlingen wat er precies misgaat bij het oplossen van opgaven: begrijpen ze de taal niet of zijn ze te lang bezig om het verhaaltje te begrijpen? Of zit het probleem echt bij de rekenbewerkingen? Door leerlingen hardop te laten vertellen hoe ze een opgave te lijf gaan, wordt vaak snel duidelijk waar het knelpunt zit. Zo kun je gericht ingrijpen.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., Schatschneider, C., & Fletcher, J. M. (2006).** The cognitive correlates of third-grade skill in arithmetic, algorithmic computation, and arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 98(1), 29–43. doi:10.1037/0022-0663.98.1.29

### Verder lezen

In het hoofdstuk ‘Puzzelen met kennis’ uit het boek *Leer ze lezen* kun je meer lezen over hoe onze hersenen taal, ook bij rekenen, verwerken. Je kunt dit boek gratis downloaden van [Leerzelezen.nl](http://Leerzelezen.nl).  
Ros, B. et al. (2021). *Leer ze lezen. Praktische inzichten uit onderzoek voor leraren basisonderwijs*. Amsterdam: Didactief/Meppel: Ten Brink Uitgevers.  
[www.leerzelezen.nl](http://www.leerzelezen.nl)

In dit artikel vind je tips over hoe je zwakke rekenaars kunt helpen basisvaardigheden te automatiseren. [Leraar24.nl](http://Leraar24.nl).  
<https://www.leraar24.nl/69600/sommen-tot-en-met-10-automatiseren-hoe-doe-je-dat/>

### OM IN TE LIJSTEN

- Beheersing van de rekenbewerkingen tot tien vormt de basis voor complexere rekentaken.
- Concentratie is essentieel voor alle rekentaken, van eenvoudig tot en met complex.
- Bij veel rekentaken komt ook taalvaardigheid kijken.
- Werkgeheugen speelt achter de schermen steeds een belangrijke rol.

# 15. MEER LEVEN IN DE REKENLES

**Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994).**

Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4(4), 273–294.

## INTRODUCTIE

Rekenen leer je voor het leven, niet voor school. Een open deur? Jazeker, maar het kan geen kwaad die deur weer eens bewust door te gaan. Want soms lijkt het toch alsof we het vooral voor school doen. Kijk maar eens naar je rekenmethode: allemaal afgepaste oefeningen die netjes zijn toegesneden op datgene wat leerlingen moeten kunnen.

Dat is handig, want zo kunnen leerlingen veilig oefenen. Maar er is ook een keerzijde. Als je in het echte leven een cakerecept moet aanpassen, omdat je maar 160 gram suiker in huis hebt in plaats van de voorgeschreven 250 gram, komen de getallen vaak veel minder handig uit. En bij het zagen van planken houd je altijd net een stukje over (of kom je een stukje tekort). Kortom, alledaagse problemen waar rekenen aan te pas komt, zijn zelden volgens het boekje, maar veel rommeliger. We moeten oppassen dat we leerlingen het levensechte rekenen niet afleren. Dat dat geen denkbeeldig gevaar is, bewijst het onderzoek van Lieven Verschaffel, Erik De Corte en Sabine Lasure. Ze toonden aan dat leerlingen bij contextopgaven afgeleerd hebben hun alledaagse kennis in te zetten en daardoor de mist in kunnen gaan.

## HET IDEE

Contextopgaven (ook wel redactie- of verhaaltjes-sommen genoemd) hebben altijd deel uitgemaakt van het rekenonderwijs. Het idee erachter is van oudsher om leerlingen te leren rekenbewerkingen die ze al geoefend hebben met kale sommen, ook toe te passen op levensechte, herkenbare situaties. Diverse onderzoekers hadden er al eens op gewezen dat contextopgaven uit lesmethodes wel erg afgepast zijn: met fijne ronde getallen, en sommen die altijd uitkomen en maar één juist antwoord hebben. Feitelijk hoeven leerlingen er nauwelijks meer over na te denken. Waarschijnlijk zullen ze, als ze te

maken krijgen met meer levensechte opgaven, er zelfs niet meer aan denken om hun alledaagse kennis, zeg maar hun boerenverstand, te gebruiken. En onderzoekers bedachten alvast wat voorbeelden van dat soort opgaven.

Leuke theorie, maar klopt die ook in de praktijk? Verschaffel en zijn collega's namen de proef op de som. Ze verzamelden tien sets met contextopgaven. Elke set bestond uit een opgave uit het boekje (standaardversie) en een parallelle versie: een qua rekenbewerking vergelijkbare opgave, maar dan gegoten in een levensechtere context (zie kader op pagina 85 voor voorbeelden). Ze vroegen drie scholen om deze opgaven tijdens de rekenles voor te schotelen aan hun leerlingen uit groep 7. De in totaal 75 leerlingen noteerden hun antwoorden op papier, waarbij er ook ruimte was om opmerkingen te maken. Tijdens het werken aan de opgaven mochten ze niet met elkaar overleggen en als ze de leraar om hulp vroegen, zei deze (volgens instructie van de onderzoekers): schrijf maar op wat je niet begrijpt.

## DE INZICHTEN

Bij een contextopgave moeten leerlingen uit een verhaaltje het probleem destilleren en dit vervolgens oplossen. Grote vraag in dit onderzoek is: zetten leerlingen hun alledaagse kennis in om vat te krijgen op de opgaven? Verschaffel en collega's hadden daar van tevoren al zo hun gedachten over: ze vermoedden dat leerlingen de sommen te lijf zouden gaan zoals ze gewend waren: de getallen eruit vissen en deze optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen, al naargelang de aanwijzingen in het verhaaltje. Een prima strategie voor de standaardversies, maar niet voor de parallelle versies.

## Standaard goed ...

Zoals verwacht maakten leerlingen de standaardversies heel goed: 628 oftewel 84 procent goede

antwoorden. Bij de foute antwoorden ging het doorgaans niet om een verkeerd gekozen bewerking,

## ZOEK DE VERSCHILLEN

De leerlingen in het onderzoek van Verschaffel en collega's maakten tien sets van contextopgaven die op elkaar leken, maar net anders waren. Elke set bestond uit een opgave volgens het boekje en eentje die uit het leven gegrepen was. We geven drie voorbeelden. Zoek de verschillen.

1a. Peter houdt een feestje voor zijn tiende verjaardag. Hij nodigt 8 jongens en 4 meisjes uit. Hoeveel vrienden nodigt hij in totaal uit?

1b. Karel heeft 5 vrienden en George heeft er 6. Ze besluiten samen een feestje te geven en al hun vrienden uit te nodigen. Iedereen komt. Hoeveel vrienden zijn er op hun feestje?

2a. Steven heeft 4 planken van elk 2 meter lang gekocht. Hoeveel planken van 1 meter kan hij hieruit zagen?

2b. Steven heeft 4 planken van elk 2,5 meter gekocht. Hoeveel planken van 1 meter kan hij hieruit zagen?

3a. Een zeilboot vaart met een snelheid van 45 kilometer per uur. Hoelang doet deze boot erover om 180 kilometer te zeilen?

3b. Johns beste tijd op de 100 meter is 17 seconden. Hoe lang doet hij erover om 1 kilometer te rennen?

De b-versies hebben allemaal een addertje onder het gras. Zonder inzet van alledaagse kennis kun je ze niet goed oplossen.

maar bijvoorbeeld om verrekeringen of leerlingen die niets hadden ingevuld.

Met hun rekenprestaties was kortom weinig mis. Toch bleek dat onvoldoende voor de parallelle versies.

## ... parallel door het ijs

Bij de parallelle opgaven waren er juist veel meer foute dan goede antwoorden, variërend van 23 tot maar liefst 72 foute antwoorden per opgave. Verschaffel en collega's beschrijven precies waar leerlingen de mist in gingen: ze benutten niet hun alledaagse kennis, maar gingen de contextopgaven te lijf als louter aangeklede kale sommen.

Neem deze opgave: 'Wat wordt de temperatuur van het water als je in een bak 1 liter water van 80 graden en 1 liter van 40 graden bij elkaar doet?' Leerlingen zien 80 en 40 staan en de signaalwoorden 'bij elkaar doet', denken: optellen, en geven vervolgens 120 als

***'Pas op dat je leerlingen  
het levensechte rekenen  
niet afleert'***

antwoord. Even los van het feit dat ze een rekenbewerking vergeten zijn (120 delen door 2), staan ze er ook niet bij stil dat water helemaal geen temperatuur van 120 graden kan hebben. En op de vraag hoeveel bussen (met plek voor 36 soldaten) je nodig hebt om 450 soldaten naar hun trainingsplek te vervoeren, antwoorden leerlingen ook rustig 12,5 bus. Terwijl er uiteraard geen halve bussen bestaan. Er was maar een handjevol leerlingen dat wel verder doordacht. Nou kun je zeggen: flauw hoor, dit soort instinkers. Maar het ging de onderzoekers erom aan het licht te brengen dat leerlingen afgeleerd hebben om hun alledaagse kennis ook op school in te zetten. Daarmee bereiken contextopgaven uiteindelijk het tegenovergestelde effect van waarvoor ze bedoeld zijn.

## Eerst begrip, dan rekenen

Verschaffel en collega's doen enkele suggesties voor een andere en betere aanpak. Om te beginnen zou er in klassen een gevarieerder aanbod van contextopgaven en andere levensechte vraagstukken mogen komen.

Verder kunnen leraren explicieter aandacht besteden aan het oorspronkelijke doel van dit soort opgaven: toepassen van rekenkennis in het echte leven. Dit vraagt om een andere instructie dan bij kale opgaven. In plaats van meteen de aandacht te

richten op welke formele rekenbewerkingen nodig zijn, moeten leerlingen leren om eerst het probleem in kwestie te begrijpen. Dus eerst begrip en dan pas rekenen.

## IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Sinds Verschaffel en collega's hun onderzoek deden, is er veel veranderd in het rekenonderwijs. Er is meer aandacht gekomen voor authenticiteit, uit het leven gegrepen rekenvraagstukken.

Toch zijn contextopgaven in de meeste rekenme-

in de  
praktijk

## TALIG REKENEN

'Vandaag gaan we verder met redactiesommen. Het doel is: aan het eind van de les kan ik een breuk aanvullen tot een hele. Deze moeilijke woorden: "een breuk", "aanvullen" en "een hele", gaan we tegenkomen', vertelt juf José terwijl ze de woorden op het bord schrijft. 'Oké, we spreken ze nu even hardop samen uit.'

Een les met redactiesommen op een school met NT2-leerlingen gaat niet alleen over cijfers en berekeningen, maar begint vaak bij taal, zeggen leraren Wietske Brunink (groep 6/7) en José Dullemond (groep 8) van obs Wereldwijs in Gouda. 'Onze NT2-leerlingen hebben vooral moeite om verhaaltjessommen om te zetten in feitelijke sommen', zegt Brunink. 'Informatie uit de tekst halen, is voor veel leerlingen lastig, helemaal als je rekenbegrippen niet kent.'

Bij verhaaltjessommen werkt de school daarom met een schema waardoor leerlingen stapsgewijs de som leren opbouwen: 1. Lees het verhaal twee keer rustig door. 2. Maak een plaatje in je hoofd. 3. Welke rekenwoorden zie je en wat betekenen ze? 4. Welke getallen heb je nodig? 5. Maak de som en

reken uit. 6. Check of de uitkomst een antwoord op de vraag is.

Voordat hun klas zelf aan de slag gaat, doen de leraren de som altijd een paar keer hardop voor met behulp van het schema.

'Stap 3 is een belangrijke vraag voor kinderen die moeite hebben met taal', vertelt Brunink. 'Als ze de rekenwoorden niet (her)kennen, kunnen ze de redactiesom eigenlijk al niet meer maken.' Daarom stoppen de leraren ook veel tijd in het leren van echte rekenwoorden of sleutelwoorden, zoals: evenveel, samen, meer dan, bij elkaar, uitdelen of verdelen. Dullemond: 'Die woorden schrijven we dan op het bord, zodat leerlingen ze bewust aanleren.' Daarnaast wordt ook onbewust geleerd met het naspelen van redactiesommen, vertelt Dullemond. 'Ik neem vaak spullen mee: aardappelen, een weegschaal, paaseieren en bij een som over een reuzenrad tekenden we de bakjes met het aantal kinderen dat erin gaat. Je ziet dan heel goed hoe ze het concrete handelen aan de som koppelen en of ze het begrijpen.'

thodes vaak nog vrij schools, in de zin dat ze geen beroep doen op alledaagse denkkraft van leerlingen. Het zijn kale sommen verpakt in een verhaaltje. Dit onderzoek laat ons weer even stilstaan bij waar contextopgaven eigenlijk voor bedoeld zijn: ze slaan een brug tussen abstracte rekenkennis en concrete, alledaagse werkelijkheid. Ze zijn dus veel meer dan een met een verhaaltje aangeklede som, en als ze louter als zodanig worden ingezet, schieten ze hun doel voorbij. Door leerlingen daarentegen te laten

***‘Nodig leerlingen uit hun eigen kennis in te brengen’***

nadenken en redeneren over alledaagse vraagstukken, leren ze om hun rekenkennis soepel in te zetten. Bovendien krijgen ze zo inzicht in wat rekenen precies is en wat je er allemaal mee kunt doen. Die vraagstukken kunnen een plek krijgen in de rekenlessen, maar zijn ook goed te integreren in bijvoorbeeld de zaakvakken of thematisch onderwijs. Zo leren leerlingen dat rekenen niet iets is dat je alleen in de rekenles doet voor school, maar dat het in veel situaties van pas komt (zie ook hoofdstuk 5, ‘Streetwise rekenen’).

**JOUW EIGEN KLAS**

Misschien herken je het verhaal over de schoolse contextopgaven. Bij dat soort sommen draait het om het zo snel mogelijk vinden en uitrekenen van het ‘sometje’. Je instructie is er dan vaak op gericht om snel de relevante getallen uit het verhaaltje te vissen en leerlingen te attenderen op signaalwoorden in de tekst. Staat er bijvoorbeeld ‘samenvoegen’ of ‘samen iets verdelen’, dan weten leerlingen meteen dat ze getallen moeten optellen dan wel delen. Om leerlingen ook rekenbagage voor het dagelijks leven mee te geven, kun je beter werken met betekenisvollere opgaven. Richt je instructie dan eerst op

de context: wat is er precies aan de hand, wat weet ik hier al over en hoe kan ik mijn rekenkennis inzetten om dit op te lossen? Vertel bijvoorbeeld hardop wat je denkt bij het lezen van zo’n vraagstuk en prikkel leerlingen via vragen om er ook over na te denken. Hebben we alle informatie of moeten we nog meer weten alvorens we iets gaan berekenen? Weten we bijvoorbeeld inderdaad wat er gebeurt als je water van verschillende temperaturen bij elkaar gooit of moeten we dat eerst uitproberen?

Nodig leerlingen uit hun eigen kennis in te brengen. Of hun eigen vraagstukken. Leuke voorbeelden daarvan vind je in het jeugdboek *Rekenen voor het leven* (zie bij Verder lezen). Zo’n vraag hoeft helemaal niet te beginnen met rekenen, leerlingen kunnen al doende juist ontdekken dat ze er rekenen voor nodig hebben. Zo krijgen ze meer grip op de wereld van getallen en de verbinding daarvan met hun echte (leef)wereld.

**OM IN TE LIJSTEN**

- Pas op dat je leerlingen niet afleert om hun alledaagse kennis te benutten bij het oplossen van contextopgaven.
- Met betekenisvolle contextopgaven kun je leerlingen leren nadenken over hoe je rekenen in de praktijk kunt benutten.
- Richt je instructie eerst op het begrijpen van de context en daarna pas op de rekenbewerking.
- Laat leerlingen (ook) zelf rekenvragen vanuit hun eigen leefwereld inbrengen om samen te bespreken.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994).** Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4(4), 273–294. doi:10.1016/0959-4752(94)90002-7

### Verder lezen

In dit interview vertelt Kees Hoogland hoe je met beeld leerlingen helpt om contextopgaven beter te begrijpen. *Didactiefonline.nl*.

Juárez, A. (2016). Verhaaltjessommen in beelden. *Didactiefonline.nl*.

<https://didactiefonline.nl/artikel/verhaaltjessommen-in-beelden>

Dit handelingsmodel biedt inzicht in de route van concreet naar abstract leren denken bij rekenen-wiskunde. Op de website van de Utrechtse lerarenopleiding vind je er meer informatie over. *Elbd.sites.uu.nl*.

<https://elbd.sites.uu.nl/2019/09/11/handelingsmodel/>

Dit artikel geeft tips over het werken met contextopgaven. *Leraar24.nl*.

<https://www.leraar24.nl/69590/zo-daag-je-leerlingen-uit-met-rijke-rekenproblemen/>

In dit jeugdboek vind je, behalve een fijn voorleesverhaal, leuke tips voor levensechte rekenvraagstukken, door leerlingen zelf bedacht.

Vendel, E. van de, Smeets, I., & Goede, F. de (ill.) (2021). *Rekenen voor je leven*. Amsterdam: Nieuwezijds.

Lees de recensie op *Didactiefonline.nl*.

Ros, B. (2021). Levensrekenlessen. *Didactief*, 7 (september).

<https://didactiefonline.nl/artikel/levensrekenlessen>

# 16. CREATIEF MET REKENEN

Assmus, D., & Fritzlar, T. (2018).

Mathematical giftedness and creativity in primary grades. In F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness. Enhancing creative capacities in mathematically promising students* (pp. 55–82). Springer.

## INTRODUCTIE

Creatief, dat ben je of dat ben je niet. Ja, dat wordt vaak gedacht. Maar niets is minder waar. Creativiteit is een vaardigheid die je kunt leren. Nog zo'n misverstand: het vak rekenen is exact en staat dus haaks op creatief zijn. Ook niet waar. Je kunt in elk vakgebied creatief zijn. Sterker, onderzoekers betwijfelen of er zoiets bestaat als algemene creativiteit.

Wat is creativiteit dan wel? En (hoe) kun je bij basisschoolleerlingen creatief wiskundig denken stimuleren? Die vragen staan centraal in het onderzoek van Daniela Assmus en Torsten Fritzlar. Hun focus ligt daarbij op talentvolle rekenaars. Maar hun conclusie is algemeen: alle leerlingen kun je uitdagen tot creatief wiskundig denken en zo werken aan dieper begrip.

## HET IDEE

Onderzoekers zijn het erover eens: zonder domeinkennis kan niemand creatief zijn. Als je met een creatieve oplossing wilt komen voor, zeg, een maaltijd met een minimum aan ingrediënten, voor het lerarentekort of een wiskundeopgave, zul je kennis moeten hebben van koken, het onderwijs of wiskunde. Anders is je oplossing mogelijk wel hoogst origineel, maar oneetbaar of slaat ze als een tang op een varken. Hebben leerlingen op de basisschool al voldoende kennis voor creatief wiskundig denken? Dat was

***‘Alle leerlingen kun je uitdagen tot creatief wiskundig denken en zo werken aan dieper begrip’***

de vraag die Assmus en Fritzlar zichzelf stelden. Ze redeneerden: misschien de doorsnee leerlingen niet, maar talentvolle rekenaars waarschijnlijk wel. Ze voerden twee casestudies uit: eentje bij 127 leerlingen uit groep 4 en 33 uit groep 7, en eentje bij zes leerlingen uit groep 8. Alle leerlingen zaten in talentklassen of speciale wiskundeklassen. De

onderzoekers bedachten enkele open rekenkundige vraagstukken (dus zonder een gegeven oplossing) en nodigden de leerlingen uit hun tanden erin te zetten, in de hoop dat zij met nieuwe creaties zouden komen.

## DE INZICHTEN

### Talent en creativiteit

Niet iedereen met een hoge IQ-score is per se ook een wiskundig natuurtalent. Het gaat om een specifieke begaafdheid: gevoel voor getallen en daar logisch over kunnen nadenken. Creativiteit is vaak een onderdeel van wiskundige begaafdheid. Die uit zich vooral bij probleemoplossen. Wiskundetalenten zijn daar beter in dan hun leeftijdsgenoten, ook al op de basisschool. Ze komen met diversere en originele oplossingen. Waarbij originaliteit wel relatief is: niet origineel in de wereld van wiskundigen, maar wel vergeleken bij leeftijdsgenoten.

Vaak geldt snelheid van denken (*fluency*) ook als kenmerk van creativiteit: in korte tijd met zoveel mogelijk oplossingen komen. Maar bij veel rekenproblemen op het niveau van basisschoolkinderen is dat helemaal niet zo moeilijk: er zijn bijvoorbeeld heel veel mogelijkheden om 90 als uitkomst van een opgave te krijgen ( $10 \times 9$ ,  $89 + 1$ ,  $360 : 4$ ,  $100 - 10 \dots$ ). Het aantal oplossingen zegt meer iets over hoe goed een leerling de rekenbewerkingen beheerst dan over zijn creativiteit.

### De eerste proef op de som

Kunnen rekentalenten uit de bovenbouw al wiskundige bewerkingen en objecten bedenken? Ja, zo blijkt uit het onderzoek van Assmus en Fritzlar. De leerlingen uit groep 6 en 7 kregen bijvoorbeeld de volgende casus voorgelegd:

‘Mark vindt optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen maar saai. Daarom heeft hij zelf een nieuwe



rekenbewerking bedacht met een bijbehorend symbool,  $\diamond$ . Zo rekent hij daarmee:  $1 \diamond 3 = 5$ ;  $6 \diamond 4 = 16$ ;  $3 \diamond 1 = 7$  en  $0 \diamond 5 = 5$ .

De leerlingen moesten niet alleen uitvogelen hoe Marks rekenbewerking in elkaar zat, ze mochten zelf ook een nieuwe rekenbewerking bedenken. Vooral dat laatste lieten ze zich geen twee keer zeggen. En ze toonden zich hierbij erg vindingrijk. Zo bedacht een leerling een bewerking plus symbool voor kwadrateren en optellen tegelijk:  $3 \square 1 = 14$ . En zoals een mol of kruis de toonwaarde van een muzieknoot kan wijzigen, bedacht een leerling een # om de volgorde van bekende rekenbewerkingen te veranderen.

### De tweede proef op de som

In de eerste casestudie mochten leerlingen vrij creëren. In de tweede ging het om het bedenken van oplossingen voor het volgende probleem: bedenk een manier om met munten met getallen onder de tien erop een niet te kraken code te maken om geheime boodschappen door te geven. Je boodschap moet een getal tussen de 1 en 999 zijn. Zes leerlingen uit groep 8 bedachten diverse oplossingen die ze samen bespraken (zie kader op pagina 91 voor een voorbeeld).

### Creativiteit verdiept begrip

Beide casestudies maken duidelijk dat ook basisschoolkinderen al wiskundige creativiteit aan de dag kunnen leggen. En dat, zo maakte het vervolgonderzoek duidelijk, is zelfs niet beperkt tot rekentalenten alleen. Vooral de eerste opdracht (verzin een nieuwe bewerking) kunnen ook leerlingen uit reguliere klassen goed uitvoeren. Hun oplossingen waren weliswaar minder complex en divers dan die van de rekentalenten, maar ze bedachten wel degelijk iets nieuws.

Behalve met nieuwe bewerkingen kun je basisschoolleerlingen ook laten stoeien met bijvoorbeeld nieuwe geometrische vormen. Dit soort creatieve opdrachten verdiept het conceptuele begrip van

leerlingen: ze moeten nadenken over wat een bewerking, een getal of vorm precies is. Dat kan dus alleen als je tegelijkertijd ook aan basiskennis werkt.

### IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Creativiteit is een veelgebruikt begrip in het onderwijs. Niet in het minst omdat dit een zogeheten 21<sup>e</sup>-eeuwse vaardigheid is. Net als andere onderzoekers vóór hen maken Assmus en Fritzlar duidelijk dat creativiteit zonder domeinkennis krachteloos is. Dan blijft het hooguit bij proefballonnetjes die nooit de hemel zullen bereiken, omdat ze geen rekening houden met de specifieke kaders van een vakgebied. Je kunt niet 'zomaar' creatief zijn, je bent altijd creatief binnen een bepaald vakgebied.

De onderzoekers maken ook duidelijk dat je al op de basisschool kunt inspelen op wiskundige creativiteit. In de eerste plaats om rekentalenten te bedienen. Maar ook in reguliere klassen voegen opdrachten die een beroep doen op de creativiteit iets belangrijks toe aan het rekenonderwijs. Zoals gezegd vormen dergelijke opdrachten niet de start. Alvorens bijvoorbeeld een nieuwe rekenbewerking te kunnen bedenken, moeten leerlingen eerst weet hebben van bestaande bewerkingen. Ze moeten begrijpen wat die doen en waarvoor die dienen. Gewapend met die kennis kunnen ze daarmee spelen, nieuwe wegen verkennen en zo een dieper begrip en inzicht verwerven in het vak.

### JOUW EIGEN KLAS

Rekenen lijkt een vak waarin procedures, formules en regels het voor het zeggen hebben. Maar juist ook in dit vak is creatief denken noodzakelijk. Het helpt leerlingen om nadrukkelijker inzicht te krijgen in wat het vak behelst.

Met open, creatieve opdrachten doe je in elk geval rekentalenten een plezier. Ze zijn misschien wel net zoals Mark uit de opdracht van Assmus en Fritzlar: ze hebben de gewone rekenbewerkingen in een

mum van tijd onder de knie en dreigen zich te gaan vervelen in de rekenles. Door een beroep te doen op hun wiskundige talent en creativiteit houd je ze weer betrokken en geboeid (zie ook hoofdstuk 25, ‘Geef talenten groeikansen op maat’). Niet alleen rekentalenten, maar alle leerlingen zijn gebaat bij lesactiviteiten die hen uitdagen voorbij de bekende regels en procedures te kijken. Juist door

daarmee te spelen, gaan ze beter begrijpen waar het bij rekenen-wiskunde om draait. Dat kan al met eenvoudige opdrachten. Je kunt leerlingen die een bewerking goed in de vingers hebben, bijvoorbeeld vragen of ze een andere manier weten om soortgelijke vraagstukken op te lossen. Of wat er zou gebeuren als je het getal 9 niet meer zou mogen gebruiken. Hoe zou je dat kunnen omzeilen? En kan dat eigenlijk wel?

***‘Creativiteit is krachteloos  
zonder domeinkennis’***

**WAT TIM BEDACHT**

Bedenk een geheime code om boodschappen, bestaande uit een getal tussen 1 en 999, door te geven via munten. En op die munten mogen alleen getallen onder de tien staan. Zo luidde een van de opdrachten uit het onderzoek van Assmus en Fritslar. Tim, een leerling uit groep 8, bedacht een ingenieus systeem: voor de honderdtallen gebruik je drie munten met het betreffende getal erop, voor de tientallen twee munten en voor de getallen onder de tien één munt. Het getal 812 bestond uit drie munten met een 8 erop, twee munten met een 1 erop en eentje met het getal 2. Een slimme code, maar niet helemaal waterdicht. Want hoe weet de ontvanger bijvoorbeeld of de boodschap 811 of 188 is? Daarom bedacht Tim een nieuwe code: de ontvanger kreeg twee munten met elk een getal erop en door deze te vermenigvuldigen, zou hij de geheime boodschap hebben ontcijferd. Ook weer slim bedacht. Maar ja, wat doe je dan met meercijferige priemgetallen als 17 of 23? Zijn derde idee was simpel: neem zoveel munten mee die opgeteld het boodschapgetal vormen. Simpel, maar ook makkelijk te kraken natuurlijk.

Kies daarbij open opdrachten, waarbij dus meer oplossingen mogelijk zijn en er niet bij voorbaat goede en slechte antwoorden zijn. Door leerlingen hier in groepjes of tweetallen aan te laten werken, wordt het laagdrempeliger en kunnen ze samen brainstormen en redeneren. Stimuleer ze om hun oplossing, net als bij Tim (zie kader hiernaast), te checken: werkt onze oplossing in alle gevallen? Zo wordt rekenen-wiskunde een vak waarin leerlingen leren (creatief) denken.

**OM IN TE LIJSTEN**

- Creativiteit is aan te leren.
- Om creatief te kunnen zijn, heb je (domein) kennis nodig.
- Creatief wiskundig denken is voor alle leerlingen van belang.
- Geef leerlingen de kans zelf te experimenteren met wiskundige symbolen en bewerkingen, dat verdiept hun begrip.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Assmus, D., & Fritzlar, T. (2018).** Mathematical giftedness and creativity in primary grades. In F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness. Enhancing creative capacities in mathematically promising students* (pp. 55–82). Springer. doi:10.1007/978-3-319-73156-8

### Verder lezen

Rekenonderzoeker Evelyn Kroesbergen legt in dit artikel uit hoe je kunt werken aan creatief rekenonderwijs.

Kroesbergen, E. (2017). Creatief rekenen-wiskunde in de basisschool. Bijdrage Panama-conferentie.

<https://panamaconferentie.sites.uu.nl/wp-content/uploads/sites/22/2017/01/27-Kroesbergen.pdf>

In haar oratie gaat Evelyn Kroesbergen ook in op creativiteit in de rekenles. Je vindt een samenvatting op *Didactiefonline.nl*.

Kroesbergen, E. (2018). Etiket dyscalculie zinloos? *Didactiefonline.nl*.

<https://didactiefonline.nl/artikel/etiket-dyscalculie-zinloos>

In dit artikel kun je meer lezen over de kenmerken van creativiteit, met tips voor eenvoudige creatieve opdrachten in de rekenles. *Didactiefonline.nl*.

Kroesbergen, E., & Westerink, A. (2015). Creatieve koppies. *Didactief*, 4 (april).

<https://didactiefonline.nl/artikel/creatieve-koppies>

In dit artikel kun je lezen over het onderzoeksproject Meetkunst, waarin rekenen en de beeldende vakken in het basisschoolonderwijs zijn gecombineerd.

*Didactiefonline.nl*.

Ros, B. (2019). Rekenen met schilderijen. *Didactief*, 6 (juni).

<https://didactiefonline.nl/artikel/rekenen-met-schilderijen>

Meer informatie over Meetkunst is te vinden op de projectwebsite:

<https://elbd.sites.uu.nl/2016/01/23/meetkunst/>

Meer tips over hoe je creatief denken kunt stimuleren, staan in dit artikel. *Volgens-bartjens.nl*.

Schoevers, E. (2020). Het bevorderen van creativiteit in het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. *Volgens Bartjens – Ontwikkeling en Onderzoek*, 39(4), 54–59.

<https://www.volgens-bartjens.nl/documenten/archief/bartjens/vb-39-4-o-en-o-schoevers-het-bevorderen-van-creativiteit.pdf>

In dit artikel kun je meer lezen over wat creativiteit is en hoe je het kunt bevorderen.

*Didactiefonline.nl*.

Ros, B., & Marreveld, M. (2018). Leid ze de diepte in. *Didactief*, 1-2 (januari/februari).

<https://didactiefonline.nl/artikel/leid-ze-de-diepte-in>

Wiskundige creativiteit en denken gaan hand in hand. Tips hierover vind je in dit artikel.

Goeij, E. de (2021). Kinderen houden van wiskundig nadenken. *Volgens Bartjens*, 41(1), 4–6.

[https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-6629\\_Kinderen-houden-van-wiskundig-nadenken](https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-6629_Kinderen-houden-van-wiskundig-nadenken)



# IV



# INSPLEN OP REKENONTWIKKELING

In de vorige drie delen is beschreven wat rekenen is en hoe de rekenontwikkeling van leerlingen verloopt. In dit deel staat centraal hoe jij als leraar het best kunt inspelen op die ontwikkeling en wat je daarvoor in huis moet hebben.

Deels gaat het om jouw eigen rekenbagage. Om leerlingen goed te kunnen helpen, is het belangrijk dat je zelf boven de stof staat. Dit betekent fouten van leerlingen weten te plaatsen en erop kunnen reageren én anticiperen. Dat vereist dat je vakkennis en vakdidactische kennis dik in orde zijn.

Daarnaast is samenwerking met je collega's essentieel. Samen zorgen jullie voor een doorlopende leerlijn die aansluit bij de rekenontwikkeling van leerlingen. En samen bespreek je hoe je in de klas flexibel kunt differentiëren. Zo helpen jullie alle leerlingen vooruit in hun ontwikkeling.

# 17. EEN LOGISCHE LIJN IN REKENEN

**Confrey, J., Maloney, A. P., & Corley, A. K. (2014).**

Learning trajectories: A framework for connecting standards with curriculum.

*ZDM Mathematics Education*, 46(5), 719–733.

## INTRODUCTIE

We verwachten jullie allemaal op de bovenste etage van Huize Rekenen. Hoe je er komt, zoek je zelf maar uit. Maar wie zich niet meldt, krijgt een onvoldoende en telt niet meer mee.

Simpel gezegd is dat wat leerstandaarden of referentieniveaus ons vertellen. Ze noemen het eindstation, dat wat leerlingen moeten kennen en kunnen, maar niet de route ernaartoe. Daarmee gooi je leraren in het diepe, stelden Jere Confrey, Alan Maloney en Andrew Corley. Leraren kunnen pas gericht toewerken naar standaarden als er ook routekaarten zijn, oftewel leerlijnen. In hun artikel beschrijven de drie rekenexperts de basisprincipes voor leerlijnen: ze moeten logisch en samenhangend zijn en gebaseerd op wat we weten over hoe kinderen wiskundig leren denken.

## HET IDEE

In 2010 werden in de meeste staten van de VS de *Common Core State Standards* voor rekenen-wiskunde (CCSS-M) van kracht. Ze zijn te vergelijken met de Nederlandse referentieniveaus, die eveneens in 2010 werden vastgesteld.

Confrey, die al vele onderzoeken naar rekendidactiek op haar naam had staan, was betrokken bij de totstandkoming van de Amerikaanse rekenstandaard-

***‘Intuïtieve kennis is  
aanvankelijk heel nuttig,  
maar werkt later averechts’***

den. Ze vond dat ze niet alleen A, maar ook B moest zeggen. Samen met haar collega's nam ze daarom de taak op zich om de standaarden te vertalen naar leerlijnen, en voor leraren inzichtelijk te maken hoe je leerlingen kunt begeleiden om van alledaagse kennis tot wiskundig denken te komen. In hun artikel leggen ze dit uit met als voorbeeld een onderdeel uit

de leerlijn voor het domein breuken, namelijk het maken van gelijke delen.

## DE INZICHTEN

Eerst even iets rechtzetten. Hierboven hebben we de tegenstelling tussen leerstandaard en leerlijn met opzet aangedikt om te verduidelijken dat je er met standaarden alleen niet bent. Maar standaarden geven al wel een beetje richting. Ze zijn, zoals Confrey en haar collega's schrijven, niet puur wiskundig, maar ook pedagogisch-didactisch. Ze houden er rekening mee hoe je leerlingen het best kunt inwijden in de wiskundige wereld. Zo is kunnen omgaan met een getallenlijn puur wiskundig niet zo belangrijk, maar het is in het reken-wiskundeonderwijs wel een belangrijk didactisch principe gebleken.

## Van concreet naar abstract

Leerlijnen houden rekening met inzichten uit onderzoek en lespraktijk over hoe kinderen leren rekenen. Zo vinden de meeste kinderen het gemakkelijker om rechthoeken in gelijke parten te verdelen dan cirkels. Je kunt dus beter met cakes dan met pizza's beginnen. Een leerlijn bouwt op van makkelijk naar moeilijk.

Verder is een belangrijk inzicht dat de intuïtieve kennis van kinderen aanvankelijk heel nuttig en productief is, maar op een gegeven moment averechts werkt. Jonge kinderen denken bijvoorbeeld dat als je iets eerlijk wilt verdelen, de stukken dezelfde maat en vorm moeten hebben. Dat is een goed vertrekpunt, maar ze zullen later (moeten) leren dat een helft van een diagonaal doorgesneden rechthoek gelijk is aan de helft van een verticaal doorgesneden rechthoek. Een leerlijn bouwt dus op van concreet en alledaags via schematisch naar abstract wiskundig denken. Bij het voorbeeld van gelijk verdelen gaat het van het eerlijk opdelen van één cake tot de algemene notie dat  $a$  objecten verdeeld onder  $b$  personen hetzelfde is als  $a/b$  objecten per persoon.

## Vijf perspectieven op leren

Als leraar is het belangrijk dat je je er voortdurend van bewust bent hoe leerlingen denken en redeneren en waar ze dus precies staan in hun ontwikkeling. Confrey en collega's noemen vanuit onderzoek

### VAN DE HELFT NAAR EEN KWART

Confrey weet waar ze het over heeft als ze zegt dat je goed moet luisteren naar wat leerlingen zeggen. In het artikel beschrijft ze enkele experimentele studies op scholen. Bijvoorbeeld die over leerlingen van zeven tot tien jaar die al heel goed wisten hoe je gelijke verdelingen moest maken. Ze luisterde en keek hoe ze dat deden en merkte dat de leerlingen spraken over de helft als ze bijvoorbeeld acht appels over twee personen moesten verdelen. Maar als het dan over vier personen ging, hadden de leerlingen het over twee appels per persoon. Het begrip 'een kwart' gebruikten ze niet. Tijd om de instructie aan te passen, besloot Confrey, en leerlingen een stapje verder te brengen. Niet alleen in taal, maar vooral in wiskundig denken. Want om een concept als een kwart te gebruiken, moet je begrijpen dat de hele collectie appels vier keer zo groot is als elke afzonderlijke portie. Om daar te komen, laat je leerlingen eerst ontdekken dat twee porties twee keer zo groot zijn als één en drie porties drie keer zo groot, enzovoort. Daardoor leren leerlingen bovendien dat het concept 'n keer zo veel/zo groot' het omgekeerde is van verdelen. Dat is de opmaat naar leren dat delen en vermenigvuldigen elkaars omgekeerde zijn en voorkomt dat leerlingen vermenigvuldigen louter zien als een herhaalde optelling.

vijf perspectieven op leren die je daarbij kunnen helpen.

### 1. Coherente structuur

Dit betreft de telkens terugkerende redeneerlijn binnen een bepaald reken-wiskundedomein. Bij breuken gaat het bijvoorbeeld om drie criteria: zorgen voor het gewenste aantal porties, zorgen voor gelijke porties en zorgen dat er niets overblijft van het oorspronkelijke geheel. Die redeneerlijn moet de voortdurende onderlegger in je instructie zijn.

### 2. Onderliggend concept of principe

Dit is de elementaire bewerking die centraal staat in een leerlijn. Bij breuken is dat delen. Leerlingen krijgen steeds meer inzicht in wat delen precies is en hoe het zich verhoudt tot andere bewerkingen.

### 3. Strategieën en misvattingen

Dit heeft te maken met alles wat leerlingen doen en denken tijdens het maken van opgaven. Goed kijken naar welke strategieën ze toepassen, hoe ze redeneren en welke mogelijke misvattingen ze hebben, biedt inzicht in wat een leerling al wel en niet beheerst. Een misvatting bij breuken is – zoals gezegd – denken dat alleen gelijke vormen even groot zijn.

### 4. Betekenisvol onderscheid en modellen

Leerlingen moeten zich de reken-wiskundetaal eigen maken. Deze taal is exacter dan het alledaagse taalgebruik en helpt leerlingen bij het wiskundig denken en redeneren. Die taal moeten ze geleidelijk leren. De weg naar een algemeen en abstract begrip loopt via diverse onderscheiden termen en modellen. Met het domein breuken weer als voorbeeld: je kunt niet meteen beginnen met de notatie  $a/b$ , maar hebt het over eerlijk delen, gelijk verdelen en het aantal objecten verdeeld over een aantal personen.



## 5. Overbruggende standaard

Confrey en haar collega's omschrijven dit als het bindweefsel tussen standaarden. Als je alle kerndoelen los zou gaan afvinken, dan ontbreekt het grote plaatje. Je bevordert juist het leren en het begrip door de samenhang tussen domeinen te laten zien.

## IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Net als de VS kent ook Nederland leerstandaarden, in de vorm van kerndoelen en referentieniveaus. Confrey en collega's maken duidelijk dat je er met zulke

leerstandaarden alleen nog niet bent. Weten wat de bestemming is, is belangrijk, maar een uitgewerkte routekaart is minstens zo belangrijk.

Het nut van heldere leerlijnen wordt ook in Nederland breed onderkend. Bij ons voorziet SLO daarin: ze hebben de kerndoelen en referentieniveaus vertaald naar tussendoelen en leerlijnen. Methodemakers bouwen daarop voort. Gewoon dus de methode volgen en klaar is Kees? Zo simpel is het niet. Want het echte werk gebeurt pas in de klas. Niet de methode, maar de ontwikkeling van leerlingen in wiskundig

in de  
praktijk

## DOELGERICHT LESGEVEN

Toen drie jaar geleden de rekenresultaten van christelijke basisschool De Lisbloem niet op orde bleken, nam de school uit Lisse zijn rekenonderwijs op de schop. Eerst keek het team naar het didactisch handelen en vervolgens naar het aanbod vanuit de methode. Het eerste was op orde, maar het aanbod uit de methode *Wereld in getallen* (met *Snappet*) bleek niet voldoende wat betreft instructie, inoefening en verwerking. 'Op een studiedag legden we daarom met het team alle cruciale rekendoelen naast elkaar', blikt directeur Ellen de Vries terug. 'We keken of de doelen per groep een doorgaande lijn hebben, welke doelen die worden getoetst overeenkomen met de cruciale doelen, en hoe vaak die onderdelen dan aan bod komen.' Hieruit kwamen twee 'lekken' naar boven: de tafels waren, ondanks het vele oefenen, niet goed geautomatiseerd en verhaaltjessommen kwamen niet frequent genoeg aan bod.

Voor de tafels is daarom onlangs gestart met een apart, schoolbreed aanbod: leerlingen die in groep 5 tot en met 8 onvoldoende op tafels scoorden, gaan twee keer per week het eerste halfuur

de tafels inoefenen met de methode *Stoplicht*. Bij verhaaltjessommen worden wisbordjes ingezet. 'Leraren zijn daar enthousiast over, omdat ze duidelijk zien welke leerlingen de som uit de verhaalsom al kunnen opschrijven. Daarnaast krijgen leerlingen de sommen mee naar huis en bespreken leraren de opdrachten klassikaal na: Hoe ben je tot dit antwoord gekomen? Welke som zit er in dit verhaal? Dat gebeurde voorheen niet.'

Naar aanleiding van de voortgangstoetsen analyseert het team of de leerlingen genoeg groei hebben doorgemaakt. Zo niet, dan bepaalt de leraar welk cruciaal doel niet is gehaald en zet hij of zij interventies per kind of per groep in.

Is het rekenonderwijs verbeterd? 'Dat verwachten we straks te gaan zien.' Maar De Vries vindt het sowieso winst dat het doelenbewustzijn bij leraren is toegenomen, de doorlopende leerlijnen zijn verbeterd en de onderbouw nog beter het belang inziet van automatiseren. 'Kortom: goed rekenonderwijs is een gedeelde verantwoordelijkheid geworden.'

denken moet leidend zijn voor wat er gebeurt in de reken-wiskundelessen. De vijf perspectieven helpen om zicht te krijgen op die ontwikkeling. Dat vraagt wel wat van leraren: boven de stof staan, onderliggende concepten in hun vingers hebben en weten wat opeenvolgende stappen in het denken zijn. En ook: bestaande leerlijnen soepel kunnen aanpassen

***‘Wees je er voortdurend van bewust hoe leerlingen denken en redeneren’***

aan hun eigen klas en voortbouwen op het werk van collega’s in eerdere groepen. De vijf perspectieven zouden daarom, zo bepleiten de onderzoekers, ook centraal moeten staan in de opleiding en professionalisering van leraren.

**JOUW EIGEN KLAS**

Een rekenmethode is een fijne basis, maar blijf vooral zelf nadenken. Dat is kort samengevat de les van Confrey en haar collega’s. Jij begeleidt leerlingen in hun ontwikkeling van concreet naar abstract denken. Door goed naar leerlingen te kijken, naar hoe ze redeneren en welke woorden ze gebruiken, kom je erachter waar ze staan in hun ontwikkeling (zie kader op pagina 97).

Daarnaast is overleg met collega’s belangrijk. Een leerlijn loopt immers van groep 1 tot en met groep 8. Je bouwt altijd voort op het werk van je collega’s en de bereikte resultaten in eerdere groepen. De leerlijn of methode kan wel bepalen dat je in groep 6 met breuken begint, maar als je merkt dat een deel van de leerlingen de tafels nog niet geautomatiseerd heeft, weet je dat je daar bij het werken aan breuken ook aandacht aan moet (blijven) besteden. Op jouw beurt geef je informatie door aan de collega na jou. Zo vallen er voor leerlingen geen gaten in hun rekenontwikkeling.

Leerlingen komen niet blanco je klas binnen. Voor-

dat ze naar school gaan, weten ze bijvoorbeeld al wat eerlijk delen is en hebben ze daarvoor eigen manieren en woorden bedacht. Daar sluit je in het reken-wiskundeonderwijs bij aan. Maar het is ook belangrijk om te weten wanneer het tijd is afscheid te nemen van die intuïtieve rekenkennis. Zo help je leerlingen telkens een stapje verder in abstract denken.

**OM IN TE LIJSTEN**

- Maak niet de methode, maar de rekenkundige ontwikkeling van leerlingen leidend.
- Leerlijnen vormen de route naar de kerndoelen en referentieniveaus.
- Een leerlijn gaat van makkelijk naar moeilijk en van concreet via schematisch naar abstract.
- Overleg met collega’s voor en na jouw groep zorgt voor een rekenontwikkeling zonder gaten.
- Laat leerlingen hardop redeneren: zo weet je wat ze al wel en niet begrijpen.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Confrey, J., Maloney, A. P., & Corley, A. K. (2014).** Learning trajectories: A framework for connecting standards with curriculum. *ZDM Mathematics Education*, 46(5), 719–733. doi:10.1007/s11858-014-0598-7

### Verder lezen

SLO heeft de elf kerndoelen voor rekenen-wiskunde toegelicht en verder uitgewerkt in leerlijnen per kerndoel.

<https://www.slo.nl/thema/meer/tule/rekenen-wiskunde/>

Bovendien heeft SLO de referentieniveaus voor rekenen-wiskunde in het po (1F/1S) nader uitgewerkt in tussendoelen.

Noteboom, A., Aartsen, A., & Lit, S. (2017). *Tussendoelen rekenen-wiskunde voor het primair onderwijs. Uitwerkingen van rekendoelen voor groep 2 tot en met 8 op weg naar streefniveau 1S*. Enschede: SLO.

<https://www.slo.nl/publicaties/@4587/tussendoelen-rekenen/>

Een veelgebruikt beeld voor de leerlijn is het rekenmuurtje. Daarover vind je op de website van Wijzer over de Basisschool meer uitleg.

<https://wijzeroverdebasisschool.nl/uitleg/rekenmuurtje>

Een tekort aan geautomatiseerde kennis kan grote invloed hebben op de rekenvaardigheid van leerlingen. In dit artikel lees je welke basale rekenkennis leerlingen wanneer moeten hebben om mee te kunnen komen.

Danhof, W., Bandstra, P., & Hofstetter, W. (2014).

Rekendrempels nemen. Een goede basis voor het leren hoofdrekenen. *Volgens Bartjens*, 34(3), 4–7.

[https://bareka.nl/wp-content/uploads/2015/12/Artikel-Volgens-Bartjens\\_Rekendrempels\\_nemen.pdf](https://bareka.nl/wp-content/uploads/2015/12/Artikel-Volgens-Bartjens_Rekendrempels_nemen.pdf)

Dit artikel gaat over hoe je met de Digilijn kunt werken aan doorlopende leerlijnen.

Buijs, K., Boswinkel, N., & Klein Tank, M. (2012).

Digilijn: Hulpmiddel bij doorlopende leerlijnen rekenen. *Volgens Bartjens*, 32(2), 4–7.

[https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-2188\\_Digilijn-Hulpmiddel-bij-doorlopende-leerlijnen-rekenen](https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-2188_Digilijn-Hulpmiddel-bij-doorlopende-leerlijnen-rekenen)

In dit artikel vind je kort samengevat bevindingen over effectief rekenonderwijs op de basisschool.

Jelier, W. (2017). Alles op een rij over ... rekenen in het po. *Didactief*, 5 (mei).

<https://didactiefonline.nl/artikel/alles-op-een-rij-overrekenen-in-het-po>

# 18. BEN JIJ VOORBEREID OP FOUTEN VAN LEERLINGEN?

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. (2008).

Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372–400.

## INTRODUCTIE

Denk als een beginner, handel als een expert. Dat zou een goed motto zijn voor je rekenles (of welke andere les dan ook). Want jouw lessen worden beter als je niet alleen de lesstof beheerst (als een expert), maar ook begrijpt welke fouten beginners (jouw leerlingen) kunnen maken.

Dit uitgangspunt staat centraal in het onderzoek van Heather Hill, Deborah Ball en Stephen Schillings. Ze zijn de eersten die systematisch hebben onderzocht wat die kennis van leraren precies inhoudt. De onderzoekers maken je er weer even bewust van hoe belangrijk het is om je in het hoofd van leerlingen te verplaatsen. Het merendeel van wat jij vertelt in een les, is nieuw voor ze.

## HET IDEE

In 1986 introduceerde onderwijspsycholoog Lee Shulman het begrip *pedagogical content knowledge*, kortweg PCK (in het Nederlands: vakdidactiek). Om goed te kunnen lesgeven, zo stelde hij, moet je niet alleen de stof beheersen, maar ook weten hoe je die het best kunt onderwijzen.

Sindsdien is er veel onderzoek gedaan naar PCK. Ook Hill en haar collega's namen Shulmans notie

***‘Bij goed lesgeven hoort dat je lesstof op veel verschillende manieren kunt onderwijzen’***

als basis. Maar ze vonden PCK een te breed begrip. Ze wilden dat nader uiteenrafelen: welke kennis en vakdidactiek heb je nou precies nodig voor goed reken-wiskundeonderwijs? Bovendien wilden ze een methode ontwikkelen om deze twee aspecten te meten bij (aanstaande) leraren. Ze ontwierpen een set multiplechoicevragen en namen die af bij ruim 1.500 leraren uit het basisonderwijs.

Het leverde nuttige inhoudelijke inzichten op over

de kennis en vakdidactiek die leraren in huis moeten hebben.

## DE INZICHTEN

### Vakkennis

Hill en collega's beschrijven zeer gedetailleerd wat je nodig hebt om goed reken-wiskundeonderwijs te geven. Allereerst is er natuurlijk inhoudelijke kennis vereist. Deze reikt verder dan algemene kennis van getallen en reken-wiskundige bewerkingen en omvat ook inzicht in en begrip van mogelijke oplossingen en wiskundige concepten. Zo kun je echt boven de stof staan.

### PCK 2.0

Die vakkennis is in de klas niets waard zonder PCK. Hierin onderscheiden de rekenonderzoekers drie onderdelen. Om goed les te kunnen geven, is het ten eerste belangrijk om te weten wat leerlingen moeten kennen en kunnen. Dat betekent dat je het curriculum en de leerlijn in je vingers hebt (zie ook hoofdstuk 17, 'Een logische lijn in rekenen').

Daarnaast omvat PCK een rijk didactisch repertoire: weten op welke manieren je lesstof kunt onderwijzen en daarmee kunnen spelen.

Kern van de PCK 2.0 van Hill en collega's is het derde element: *knowledge of content and students* (KCS). Hiermee bedoelen ze dat je inzicht hebt in hoe leerlingen zich de stof eigen maken en welke veelvoorkomende fouten en misvattingen er in het leerproces zijn. Als je bijvoorbeeld breuken aanleert, is het nuttig om te weten dat leerlingen aanvankelijk moeite hebben met de breuknotatie. Ze denken bijvoorbeeld dat  $\frac{1}{16}$  meer is dan 4, omdat ze vooral kijken naar de noemer (16) en de teller (1) over het hoofd zien dan wel nog niet begrijpen.

## Bewuste kennis

Weten waarom iets moeilijk of makkelijk aan te leren is: PCK-man Shulman had dat al in algemene zin aangeduid, maar Hill en collega's hebben een eerste poging gedaan om dat voor rekenwiskunde nader te specificeren. Hun toetsitems baseerden ze op veelvoorkomende fouten en misvattingen die bij alle leerlingen voorkomen, ongeacht welke rekenmethode een school gebruikt (zie

voor voorbeelden kader hiernaast). De leraren in hun onderzoek bleken deze inderdaad te herkennen.

Belangrijker nog dan herkennen is dat je fouten en misvattingen kunt verklaren en plaatsen in de rekenontwikkeling van leerlingen. Als leraar dien je feilloos te weten wanneer een leerling de stof al wel of niet voldoende beheerst. Hoe bewuster leraren zich zijn van deze KCS-kennis, hoe beter en gericht hun instructie en feedback worden.

## BONNY LEERT TIENTALLEN

Bonny moeten 23 damstenen tellen. Dat lukt haar goed. Ook als je haar vraagt hoeveel de drie in het getal 23 waard is, geeft ze een goed antwoord. Maar het gaat mis als je haar vraagt wat de twee waard is. Dan luidt haar antwoord namelijk twee. Wat is er aan de hand?

De leraren uit het onderzoek van Hill en collega's konden kiezen uit de volgende vier antwoorden:

a. Bonny weet niet hoe groot 23 is; b. Bonny denkt dat 2 en 20 hetzelfde zijn; c. Bonny begrijpt de betekenis van de plaatsen niet in het getal 23; d. Antwoord a, b en c zijn allemaal goed.

Wat zou jij antwoorden? Check hieronder of je het goed had.

Antwoord c is goed. Bonny kan tellen tot 23 (daarom is antwoord a en dus ook d fout) en ze weet ook wel dat twee en twintig damstenen niet evenveel zijn (daarom is antwoord b fout). Maar ze begrijpt het getalsymbool nog onvoldoende: ze weet niet dat de plaatsing van de getallen van betekenis is en dat de plaats van de 2 duidt op tientallen.

## IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Om goed les te geven moet je boven de stof staan. Hill en collega's voegen daaraan toe dat je niet boven de leerlingen moet staan. Het is belangrijk dat je juist kunt denken als beginner, als iemand die nog weinig weet van de stof en daarom anders denkt en redeneert dan een expert.

Kennis van hoe leerlingen denken en redeneren en weten wat veel voorkomende fouten en misvattingen zijn, zijn essentieel voor lesgeven. Zulke kennis zorgt ervoor dat leraren gericht instructie en feedback kunnen geven.

Ervaren leraren hebben zich die kennis doorgaans wel eigengemaakt. En als het goed is, handelen ze er ook naar en hebben ze oog voor waar het mis kan gaan bij het aanleren van nieuwe rekenwiskundestof. Vaak is die kennis *tacit*: onbewust aanwezig in het hoofd van leraren. Om de kennis overdraagbaar te maken, en bijvoorbeeld te benutten in teamprofessionalisering (of in de lerarenopleidingen), is het goed om haar te expliciteren. Hill en collega's hebben daartoe een eerste aanzet gegeven.

## JOUW EIGEN KLAS

Leerlingen die kijken naar de noemer in plaats van naar de hele breuk, of leerlingen die moeite hebben om in 23 in de twee het tiental te zien. Je zult

deze veelvoorkomende fouten die Hill en collega's aan leraren voorlegden, ongetwijfeld herkennen uit je eigen klas.

Dat je van fouten kunt leren, geldt niet alleen voor leerlingen, maar ook voor jou als leraar. De fouten bieden jou inzicht in wat leerlingen (nog) niet begrijpen en (nog) niet kunnen. Zo kun je gericht ingrijpen.

***‘Als leraar moet je boven de stof staan, maar niet boven de leerlingen’***

Je kunt de fouten ook proberen voor te zijn. Doordat je weet wat veelvoorkomende fouten en misvattingen zijn, kun je daar in je instructie al op anticiperen. Wel zo effectief. Tegelijkertijd hoort het maken van fouten bij het onder de knie krijgen van nieuwe concepten en bewerkingen. Zo zijn fouten onderdeel van de rekenontwikkeling van leerlingen.

**LITERATUUR**

**Gebruikte wetenschappelijke bron**

**Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. (2008).** Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372–400. Opgehaald van <https://www.jstor.org/stable/40539304>

**Verder lezen**

Oonk, W., Zanten, M. van, & Keijzer, R. (2007). Gecijferdheid, vier eeuwen ontwikkeling - perspectieven voor de opleiding. *Reken-wiskundeonderwijs: Onderzoek, Ontwikkeling, Praktijk*, 26(3), 3–18. [https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-2786\\_Gecijferdheid-vier-eeuwen-ontwikkeling-perspectieven-voor-de-opleiding](https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-2786_Gecijferdheid-vier-eeuwen-ontwikkeling-perspectieven-voor-de-opleiding)

**OM IN TE LIJSTEN**

- Voor een goede reken-wiskundeles sta je boven de stof.
- Het helpt als je weet welke veelvoorkomende fouten en misvattingen bij elk rekenonderdeel horen.
- Wie fouten en misvattingen ziet aankomen, geeft betere instructie en feedback.
- Denk als een beginner en handel als een expert.

# 19. RECEPT VOOR KRACHTIG REKENONDERWIJS

**Schoenfeld, A. H. (2014).** What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. *Educational Researcher*, 43(8), 404–412.

## INTRODUCTIE

Met onderzoek kun je onderwijs verbeteren en met feedback van leraren wordt je onderzoek beter. Dat is de vaste overtuiging van wiskundige en vakdidacticus Alan Schoenfeld. En hij heeft zeker recht van spreken. Al ruim veertig jaar doet hij, in nauwe samenwerking met scholen, onderzoek naar hoe je het beste wiskundeonderwijs kunt geven. In 2013 kreeg hij voor zijn werk de prestigieuze onderscheiding *Distinguished Researcher* van de American Educational Research Association. In zijn artikel in het vakblad van deze organisatie beschrijft hij zijn inzichten: vijf handzame principes voor krachtig reken-wiskundeonderwijs waarmee elke leraar, in basis- en voortgezet onderwijs, zijn voordeel kan doen.

## WISKUNDIG DENKEN

Het vak rekenen-wiskunde, zo stelt Schoenfeld, omvat meer dan het aanleren van procedures en formules. Het gaat om een manier van denken. En in dat denken staat het zoeken naar oplossingen en het verkennen van patronen centraal. De wiskundige kijkt dwars door de rommelige werkelijkheid heen en ziet constanten, lijnen en wetmatigheden. Denk bijvoorbeeld aan het werk van Mondriaan: ooit schilderde hij realistische landschappen met bomen. Die heeft hij steeds verder geabstraheerd en teruggebracht tot een spel van lijnen en vlakken. Op de basisschool werk je tegelijkertijd aan het verwerven van rekenkennis en het stimuleren van wiskundig denken. Dat kan door bijvoorbeeld samen alledaagse problemen of wiskundige raadsels te ontleden en te kijken welke patronen je daarin kunt ontdekken.

## HET IDEE

Schoenfeld is zijn hele loopbaan bezig geweest met de vraag hoe je leerlingen het best kunt inwijden in wiskundig denken (zie kader hiernaast). Hij schreef hierover onder meer de boeken *Mathematical problem solving* (1985) en *How we think* (2010). Het eerste boek vertrekt vooral vanuit de inhoud en de leerlingen (wat houdt ons vak in en waarom worstelen leerlingen daarmee?), het tweede juist vanuit de leraren en de didactiek: hoe gaan leraren te werk bij het overdragen van die inhoud?

***‘Schoenfeld formuleert vijf handzame principes waarmee elke leraar zijn voordeel kan doen’***

Door zijn nauwe samenwerking met scholen en lerarenopleidingen merkte Schoenfeld waar leraren in de praktijk mee worstelden. Hij formuleerde op basis van vele lesobservaties, onderzoek en gesprekken met leraren vijf principes voor krachtige rekenlessen. Samen met zijn onderzoeksteam vertaalde hij die vervolgens in praktische handleidingen voor leraren, zoals een *rubric* voor (collegiale) lesobservaties.

## DE INZICHTEN

### Waarom het soms misgaat

Schoenfeld zag in klassen vaak dat leerlingen strategieën en procedures wel toepasten, maar dat hun domeinkennis en wiskundig redeneren gebrekkig waren. Daardoor begrepen ze niet wat ze aan het doen waren. Beide moeten dus op orde zijn. Daarnaast is het belangrijk dat leerlingen hun eigen werk kunnen checken en bijsturen. Dat vraagt om metacognitieve vaardigheden. En ten slotte spelen het beeld van het vak en het zelfbeeld een rol. Als leerlingen wiskunde saai of moeilijk vinden of van zichzelf denken dat ze het toch niet kunnen (zie ook

hoofdstuk 22, 'Breek de ban van bange rekenaars'), dan ligt falen of afhaken op de loer.

## Hoe leraren kunnen helpen

Hoe kun je als leraar er nu voor zorgen dat alle leerlingen de kans krijgen wiskundig denken onder de knie te krijgen? Schoenfeld onderscheidde vijf dimensies of lesprincipes voor krachtig rekenonderwijs. Bij elk principe formuleerde hij een 'controlevraag' waarmee leraren kunnen nagaan of hun les eraan voldoet.

### 1. Vakinhoud

De leraar bepaalt per les zorgvuldig welke vakinhoud hij wanneer en hoe gaat behandelen. Hij zorgt voor een geleidelijke én samenhangende kennisopbouw. Dat betekent bijvoorbeeld dat hij het verband tussen procedures, concepten en (alledaagse) contexten benadrukt. Dus oefenen en begrijpen moeten steeds hand in hand gaan (zie ook hoofdstuk 2, 'Er leiden meer rekenwegen naar Rome').

*Controlevraag:* hoe nauwkeurig, samenhangend en weloverwogen is de rekeninhoud van mijn les?

### 2. Uitdagen tot reflectie

De leraar stimuleert met activerende werkvormen het wiskundig denken van leerlingen. Ze gaan zelf actief met de inhoud aan de slag, bijvoorbeeld door lesstof toe te passen op alledaagse vraagstukken. De leraar begeleidt dit proces en helpt leerlingen verder door voor te doen hoe je wiskundig kunt redeneren.

*Controlevraag:* welke mogelijkheden geef ik leerlingen om wiskundig denken te ontwikkelen?

### 3. Iedereen doet mee

De leraar zorgt ervoor dat alle leerlingen betrokken zijn bij de reken-wiskundeles en dat niemand afhaakt. Of iemand wel of niet meedoet, kan per lesonderdeel verschillen. Een leerling kan bijvoorbeeld goed luisteren naar je uitleg en ook de oefeningen

goed maken, maar nauwelijks een bijdrage leveren aan een gesprek over een rekenvraagstuk. De leraar kijkt wie wanneer meedoet en wat mogelijke oorzaken van afhaken zijn, bij de leerling én bij de lesopbouw en instructie.

*Controlevraag:* wie doet wel of niet mee in de les en hoe kan ik ook minder actieve leerlingen bij de les betrekken?

### 4. Eigenaarschap van leerlingen

De leraar zorgt ervoor dat leerlingen voldoende gelegenheid krijgen om zelf iets in te brengen in de les, zoals eigen wiskundige ideeën en redeneringen, en met elkaar daarover in gesprek kunnen gaan. Daarmee stimuleert hij dat ze zich het vak meer eigen maken, meer betrokken raken en meer zelfvertrouwen krijgen in hun eigen kunnen.

*Controlevraag:* welke mogelijkheden geef ik leerlingen om hun eigen wiskundige ideeën te uiten en op elkaars ideeën te reageren?

### 5. Formatief evalueren

De leraar weet hoever het wiskundig denken van leerlingen al ontwikkeld is en past zijn instructie daarop aan. Hij anticipeert op wat ze moeilijk vinden en herkent veelvoorkomende fouten en misvattingen in hun denken. Met gerichte feedback en instructie weet hij daarop aan te sluiten en leerlingen verder te brengen.

*Controlevraag:* wat weet ik over het wiskundig denken van leerlingen en hoe kan ik mijn instructie en feedback daarop aanpassen?

## IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Schoenfelds boodschap is dat rekenen-wiskunde meer omvat dan louter het (leren) toepassen van procedures en bewerkingen. Kern van het vak is juist dat leerlingen zich een specifieke, abstracte manier van denken eigen maken. Daarvoor moeten ze leren



om meer afstand te nemen van de concrete werkelijkheid én tegelijkertijd leren zien dat de wereld van getallen en formules niet losstaat van die werkelijkheid. Wiskundig denken is juist het voortdurend heen en weer pendelen tussen beide.

Van leraren vraagt het ruime vakkennis en inzicht in hoe leerlingen zich het vak eigen maken. Schoenfelds sleutels voor krachtig reken-wiskundeonderwijs zijn, zoals hij zelf ook stelt, een set algemeen-didactische principes, toegepast op het domein van rekenen-

wiskunde. Leraren kunnen hun lessen langs de meetlat van de vijf principes leggen en zo toewerken naar goed onderwijs.

## JOUW EIGEN KLAS

Je kunt de meetlat met controlevragen van Schoenfeld langs je eigen rekenlessen leggen. Met je collega's kun je bespreken of alle vijf elementen op orde zijn of dat een of meer ervan meer aandacht verdienen.

in de  
praktijk

## EENVOUD SIERT DE REKENLES

'We hadden het gevoel dat de basis bij bovenbouwleerlingen niet stevig genoeg was en mop-perden regelmatig over de tafels tot twintig die nog niet goed geautomatiseerd waren. In die tijd was er ook net een omslag in de literatuur gaande van contextrijk rekenen naar "toch maar weer de kale sommen". Wij geloofden ook steeds meer in die koers. Stampen, stampen, stampen.' Aan het woord zijn Esther Neve en haar duo-partner Carin Bestebeurtje in groep 8. Drie jaar geleden zetten ze na overleg met hun directeur de doorlopende rekenleerlijn uit op basisschool Hoffenne in Noordwijk.

Neve en Bestebeurtje keken bij lessen van collega's: Hoe bieden we de tafels, breuken, cijferend optellen aan? Welke woorden gebruiken we? Neve: 'Daar zagen we dat bijna elke groep de stof op een andere manier krijgt aangeboden. Uit de cognitieve leerpsychologie weten we wat dat betekent: het geleerde wordt minder goed opgeslagen in het werkgeheugen.'

Daarop maakten de twee leraren nieuwe afspraken met het team: we hanteren één klassikale instructie en leren leerlingen één strategie – en

geen tien, zoals voorheen. En we spreken van groep 1 tot en met 8 één rekentaal. Niet: plus en min, wel: erbij en eraf. Niet: keer, wel: vermenigvuldigen. En herhaald aftrekken vervangen we vanaf groep 7 door de ouderwetse staartdeling, zegt Bestebeurtje, 'zodat ook de zwakke rekenaars dit kunnen.'

De nieuwe, eenduidige aanpak lijkt zijn vruchten af te werpen. Schommelden de resultaten van de eindtoets Cito voor niveau 1S met 46,7 procent in 2018-2019 nog rond het landelijk gemiddelde, op de recentste eindtoets is dit 77,8 procent en voor niveau 1F zelfs 100 procent.

'Het mooie is dat niet alleen de zwakke rekenaars baat hebben bij de nieuwe aanpak, maar ook de (zeer) goede rekenaars', zegt Neve. 'Door de klassikale instructie met wisbordjes leren ze met één duidelijke strategie in stappen rekenen, in plaats van zonder uitwerking meteen het antwoord op te schrijven. Waar ze vroeger al snel hun eigen werk oppakten, omdat ze dachten de instructie wel te snappen, blijven ze nu betrokken bij de les. Dat is winst en dat zien we terug in de resultaten.'

Bij een nieuw lesonderdeel werk je natuurlijk in de eerste plaats aan basiskennis. Maar ook dan al kun je inspelen op alledaagse kennis en ideeën van leerlingen. Zo kun je van meet af aan wiskundig denken een plek geven in je lessen. Een les over verhoudingen en percentages kun je bijvoorbeeld herkenbaar starten door de klas te vragen wie volgens hen het meest aan sport doen: de jongens of de meisjes? Vervolgens kun je samen met leerlingen gaan turven: Wie sport er en hoeveel? Is dat gelijk verdeeld? Hoe verreken je het als er meer jongens dan meisjes in

***‘Domeinkennis en wiskundig redeneren moeten beide op orde zijn’***

de klas zitten? En telt hinkelen net zo zwaar mee als voetballen? Als je al wat langer bezig bent met een lesonderdeel, kun je zo’n voorbeeld verder uitdiepen met de klas. Nodig leerlingen daarbij nadrukkelijk uit zelf met ideeën en redeneringen te komen.

Ook door regelmatig samen wiskundige raadsels op te lossen, stimuleer je het wiskundig denken. Deze hersenkrakers dwingen leerlingen om al hun getalbegrip in te zetten, op zoek te gaan naar patronen en logisch te redeneren.

Zo gaat het vak meer leven voor leerlingen. Ze ontdekken dat rekenen meer is dan rijtjes sommen maken en dat het (ook) een manier is om naar de werkelijkheid te kijken.

**OM IN TE LIJSTEN**

- Kern van het vak rekenen-wiskunde is dat leerlingen abstract leren denken om zo de wereld om hen heen beter te begrijpen.
- Goed reken-wiskundeonderwijs combineert kennis, het werken aan vaardigheden en het gebruik van beide in (realistische) vraagstukken.
- Door lesstof te koppelen aan alledaagse voorbeelden gaat de rekenles meer leven en wordt kennis betekenisvoller.
- Stimuleer leerlingen om met eigen ideeën en redeneringen te komen.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Schoenfeld, A. H. (2014).** What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. *Educational Researcher*, 43(8), 404–412. doi:10.3102/0013189X14554450.

### Verder lezen

Dit artikel vertelt hoe je met thema's kunt werken aan rijke rekenlessen. *Volgens-bartjens.nl*.

Haan, M. de, & Verschuren, M. (2010). De winkel van Sinkel, rekenen in een rijke leeromgeving. *Volgens Bartjens*, 29(5), 4–7.

[https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-2404\\_De-winkel-van-Sinkel-rekenen-in-een-rijke-leeromgeving-Marleen-de-Haan-en-Maaïke-Verschuren](https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-2404_De-winkel-van-Sinkel-rekenen-in-een-rijke-leeromgeving-Marleen-de-Haan-en-Maaïke-Verschuren)

In dit rapport vind je voorbeelden van hoe je in de rekenlessen leerlingen kunt stimuleren tot nadenken. *Ktwt.nl*.

Galen, F. van, & Jonker, V. (2013). *Experimenteren in de rekenles. Combineren van rekenlessen met lessen wetenschap & techniek*. Utrecht: Kenniscentrum Talentontwikkeling, Wetenschap & Techniek Midden-Nederland.

[https://ktwt.nl/wp-content/uploads/sites/40/2015/09/Experimenteren\\_in\\_de\\_rekenles.pdf](https://ktwt.nl/wp-content/uploads/sites/40/2015/09/Experimenteren_in_de_rekenles.pdf)

Op de website van EEF, de Britse Education Endowment Foundation, vind je inspiratie voor je team om na te denken over rekenen-wiskunde.

<https://educationendowmentfoundation.org.uk/news/integrating-evidence-into-mathematics-teaching-developing-a-rich-network-of-mathematical-knowledge>

# 20. DE KUNST VAN DIFFERENTIËREN

**Prast, E. J., Van de Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2018).** Differentiated instruction in primary mathematics: Effects of teacher professional development on student achievement. *Learning and Instruction*, 54(January), 22–34.

## INTRODUCTIE

Niet elke leerling leert even snel. Dat is iets wat alle leraren zullen herkennen. Vraag is hoe je het best kunt inspelen op verschillen tussen leerlingen. Hoe zorg je bijvoorbeeld dat je achterblijvers erbij trekt en dat snelle leerlingen zich niet gaan vervelen?

Het toverwoord daarvoor is differentiatie. Door leerlingen op maat te bedienen, help je ze vooruit. Dat is makkelijker gezegd dan gedaan, weten we uit de praktijk. Veel leraren, vooral beginners in het vak, worstelen met hoe ze differentiatie handen en voeten moeten geven.

Daarom is in 2012 het project Gedifferentieerd RekenOnderWijs (GROW) gestart, een grootschalig nascholingsproject voor leraren in het basisonderwijs, gemonitord en gevoed door onderzoekers van de Universiteit Utrecht. In hun artikel vertellen Emilie Prast en haar collega's wat het project aan lessen heeft opgeleverd.

## HET IDEE

Differentiatie is even belangrijk voor leerlingen als moeilijk voor leraren. Om soepel in te spelen op leerbehoeften moet je gedegen vak kennis – in dit geval rekenen-wiskunde – paren aan diagnostische en didactisch-pedagogische kwaliteiten en goed klassenmanagement.

De basis daarvoor krijg je op de lerarenopleiding mee, maar het echte werk leer je pas in de praktijk. Hoe kunnen we leraren helpen om deze kunst van het differentiëren onder de knie te krijgen? Binnen GROW deden bijna driehonderd leraren van dertig basisscholen (met 5.658 leerlingen uit groep 3 tot en met 8) uit het hele land mee aan tien bijeenkomsten en kregen zij begeleiding door een projectcoach op de eigen school. De scholen waren verdeeld over drie cohorten: de eerste groep kreeg het eerste jaar de nascholing, waarbij groep 2 als controlegroep fungeerde; in het tweede jaar kreeg groep 2 de

nascholing en was groep 3 de controle (zij kregen in het derde jaar de nascholing). De onderzoekers hebben gemonitord of de nascholing effect sorteert door na te gaan of de leerlingen daadwerkelijk beter gingen rekenen.

## DE INZICHTEN

### Differentiëren in vijf stappen

Op basis van eerder onderzoek hebben de onderzoekers binnen het GROW-project de zogeheten differentiatiecirkel ontworpen. Deze beschrijft het proces van differentiëren in vijf stappen:

#### **1. Stel de onderwijsbehoeften van je leerlingen vast**

Om leerlingen gericht te kunnen bedienen, dien je te weten wat ze nodig hebben: wat beheersen ze al wel en wat nog niet? Resultaten op voortgangstoetsen, het werk in de klas en vragen die leerlingen stellen, geven je hierover informatie. Op basis hiervan verdeel je leerlingen over drie niveaugroepen: gemiddelde, boven- en benedengemiddelde prestaties. Na klassikale instructie werken leerlingen in deze groepen. Het gaat om flexibele niveaugroepen, waartussen leerlingen makkelijk kunnen wisselen, al naargelang het rekenonderdeel en de prestaties (zie kader op pagina 110).

#### **2. Stel doelen op maat**

Per niveaugroep stel je uitdagende, maar wel haalbare doelen. Zo leren leerlingen dat ze vooruitgaan en kunnen groeien.

#### **3. Geef instructie op maat**

Naast klassikale instructie geef je per niveaugroep gerichte of verlengde instructie en waar nodig ook individuele instructie. Dit vraagt om gedegen reken-wiskundige en vakdidactische kennis: je weet waar de schoen wringt en kunt fouten van leerlingen

duiden. In de laagste niveaugroep steek je je instructie concreter in, in de hoogste niveaugroep kun je juist een beroep doen op het abstractievermogen van leerlingen.

#### **4. Geef verwerkingsopdrachten op maat**

Het oefenmateriaal moet passen bij de leerdoelen. Je kunt differentiëren in omvang en moeilijkheidsgraad (ook mate van abstractie) van het oefenmateriaal. Dankzij opdrachten op maat kunnen alle leerlingen successen behalen. Dat versterkt hun zelfvertrouwen en motivatie.

#### **5. Evalueer het proces en de voortgang van je leerlingen**

Je evalueert je eigen aanpak: heb ik inderdaad de juiste instructie en oefeningen gegeven? En je gaat na of leerlingen vooruit zijn gegaan. Zo vormt de vijfde stap de opmaat voor het opnieuw doorlopen van de differentiatiecirkel. Door dit telkens te doen, voorkom je dat leerlingen vast blijven zitten in hun niveaugroep: het dwingt je om telkens te bekijken waar een leerling staat.

### **Groei van leerlingen**

Gingen leerlingen beter rekenen nadat hun leraren geschoold waren in deze vijf stappen? In cohort één was dit inderdaad het geval: leerlingen gingen sneller vooruit en haalden hogere scores dan de leer-

***‘Nascholing werkt, maar alleen als leraren er echt voor gaan’***

lingen uit de controlegroepen. En dat gold over de hele linie: alle leerlingen, zwakke en sterke rekenaars, hadden profijt van de gedifferentieerde aanpak. Maar in het tweede cohort vielen de resultaten tegen. Er waren geen verschillen van betekenis tussen leerlingen van nascholingsleraren en van de andere leraren. Betekent dit dat de aanpak toch niets

uithaalt? Nee, stellen de onderzoekers, mogelijk speelde mee dat scholen in cohort 2 aanvankelijk enthousiast waren om mee te doen, maar een jaar moesten wachten tot ze daadwerkelijk nascholing kregen. Toen was de motivatie wat gezakt, waren er personeelwisselingen of was de school alweer met andere zaken bezig. De les die de onderzoekers trokken, was dan ook: nascholing werkt zeker, maar alleen als scholen er echt voor gaan.

### **IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS**

Differentiatie is al jarenlang in beeld als manier om prestaties van leerlingen te verbeteren. De onderwijsinspectie beveelt het bijvoorbeeld dringend aan. Tegelijkertijd weten we ook uit onderzoek dat veel leraren ermee worstelen. Het is zo'n beetje het moeilijkste element van het leraarsvak.

### **ONGELIJKE BEHANDELING**

Differentiëren is belangrijk, maar pas er wel voor op om leerlingen op te sluiten in hokjes. Uit onderzoek weten we dat vaste niveaugroepen de verschillen tussen leerlingen vergroten. Ze tasten het zelfvertrouwen van kinderen in de laagste niveaugroepen aan: ik zit bij de slechten en zal nooit beter worden. Zo worden die groepen een *selffulfilling prophecy*. Een ander gevaar is dat leraren niet alleen hun instructie aanpassen, maar ook hun lesdoelen en verwachtingen. Dat bestendigt verschillen eerder dan dat het die verkleint. Leerlingen uit de laagste niveaugroepen krijgen zo geen kans om te groeien. Kortom, ongelijke behandeling in de zin van instructie op maat is prima, zolang het niet uitmondt in meer kansenongelijkheid.

De verdienste van het GROW-project is dat het een systematische aanpak voor differentiëren bij rekenen heeft ontwikkeld, het vijfstappenplan. Het maakt ook duidelijk welke kennis en vaardigheden leraren voor elke stap in huis moeten hebben. Allereerst dienen, aldus de onderzoekers, pabo's hun studenten een stevige rekenbasis mee te geven, met aandacht voor concepten en de reken-wiskundige ontwikkeling van leerlingen, zodat leraren in spe daadwerkelijk boven de stof staan en weten hoe ze die het best kunnen onderwijzen. In de lespraktijk kunnen leraren dan werken aan diagnostische vaardigheden en

het soepel inspelen op leerbehoeften van leerlingen, al dan niet ondersteund door nascholing. Onbedoeld heeft het GROW-project ook aangetoond dat een goede nascholing één is, maar het benutten ervan in de praktijk vers twee. Het vergt investeringen in tijd en geld plus inzet van scholen om hier serieus werk van te maken. De schoolleider speelt een cruciale rol om het team te faciliteren en te stimuleren. Verder is het van belang de uitgangspunten van een ingeslagen weg ook te blijven onderhouden en doorvoeren.

in de  
praktijk

## BEELDEN OPBOUWEN

In het lokaal van groep 8 op basisschool Het Telraam in het Noord-Brabantse Oeffelt zijn drie leerlingen druk aan het vouwen met gekleurde papierstroken. In de ontstane 'vakjes' schrijven ze steeds de betreffende breuk op. 'Ik laat ze even teruggaan naar de basis, en een beeld opbouwen van de situatie', legt Ursula Fiddelers uit. Ze staat voor groep 8 en begeleidt als rekenspecialist zwakke rekenaars. Vooral zij hebben veel baat bij het visueel of fysiek maken van rekenhandelingen, merkt Fiddelers. Ze werkt graag met de vertaalcirkel, waarbij leerlingen de som op verschillende manieren 'vertalen'. Zoals de handeling uitvoeren met concreet materiaal als papierstroken. 'Vouw het papier in tweeën, drieën, vieren, et cetera, en leg alle stroken onder elkaar.' Of de handeling uitvoeren met een verhaal. Dan begint ze met een kale som op het digibord, bijvoorbeeld een foto van een bus met twee getallen, 25 en 2550, en zegt dan: bedenk er in vijf minuten een verhaal met som bij. Bijvoorbeeld: er passen 25 mensen in de bus, maar er moeten er 2550

worden vervoerd, hoe vaak moet de bus rijden? 'Daarna presenteren ze hun som aan elkaar. Of ze voeren de handeling uit met een toneelstukje of een tekening bij de som.'

Doordat ze dezelfde situaties op verschillende manieren vertalen, krijgen leerlingen volgens Fiddelers een scherper beeld van en inzicht in de situatie. Hierdoor begrijpen en onthouden ze de formele bewerking. 'Iets wat ze zelf hebben bedacht, blijft meestal beter hangen dan een verhaal uit hun werkboek. Ook een pre is dat ik naar de verschillende situaties uit de vertaalcirkel terug kan grijpen: zie je wel, dit is eigenlijk dezelfde som als je met de papierstroken, je verhaal, je tekening of je toneelstuk maakte.'

De inzichten die leerlingen met de handelingen in de verhaalcirkel opdoen, vindt ze superwaardevol. 'Dan hoor ik ze ineens zeggen: "Oh nee, we zijn nu een erbijsom aan het doen, maar we moesten een keersom maken." Als ze dát zelf (gaan) beseffen, heb je al veel bereikt: ze weten waar ze mee bezig zijn.'

# JOUW EIGEN KLAS

Waarschijnlijk herken je het beeld dat differentiatie superbelangrijk is, maar ook supermoeilijk. Het vijfstappenplan van GROW kan helpen om er op jouw school gericht werk van te maken. Je kunt het bijvoorbeeld benutten om na te gaan waar jullie als team nog sterker in kunnen worden. Met welke stap hebben jullie in de praktijk moeite? Waar zouden jullie extra scholing in willen hebben? Pak het op met het hele (bouw)team, zodat je elkaar kunt ondersteunen en bij elkaars lessen kunt meekijken. Differentiëren is niet iets wat je uit een boekje leert, daar moet je samen mee aan de slag gaan.

***‘Differentiëren leer je niet uit een boekje, je moet er samen mee aan de slag’***

Belangrijk aandachtspunt bij differentiatie is hoe jij het presenteert in je klas. Benadruk vooral dat de niveaugroepen niet bedoeld zijn om leerlingen vast te pinnen, maar dat je hen juist kansen geeft om te groeien. Precies de reden waarom je altijd dient te werken met flexibele niveaugroepen. Bij het ene rekenonderdeel kan een leerling in de hoogste niveaugroep zitten, bij een ander in de middengroep of de lage niveaugroep. Bovendien kunnen ze per onderdeel opklimmen. Zo kun je ervoor zorgen dat leerlingen succeservaringen hebben.

## OM IN TE LIJSTEN

- Instructie en oefeningen op maat helpen alle leerlingen vooruit.
- Sluit leerlingen niet op in hokjes, maar werk altijd met flexibele niveaugroepen.
- Door te differentiëren kun je ervoor zorgen dat leerlingen succeservaringen hebben.
- Differentiëren moet je leren, dat kost tijd en scholing.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Prast, E. J., Van de Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2018).** Differentiated instruction in primary mathematics: Effects of teacher professional development on student achievement. *Learning and Instruction*, 54(January), 22–34. doi:10.1016/j.learninstruc.2018.01.009

### Verder lezen

Dit artikel geeft een uitgebreidere uitleg van het stappenplan voor differentiatie binnen GROW. *Didactiefonline.nl*.

Kaskens, J. et al. (2016). Groei in rekenen. *Didactief*, 7 (september).

<https://didactiefonline.nl/artikel/groei-in-rekenen>

Dit artikel geeft tips over hoe je werk kunt maken van differentiatie in de rekenles.

Kaskens, J., & Bakker, M. (2009). Effectief differentiëren is een kunst. *Didactief-special Rekenen-wiskunde* (oktober) 6-7.

[https://newsroom.didactiefonline.nl/bundles/newsroom/legacy/images/stories/Specials/rekenen\\_2009/special\\_rekenen.pdf](https://newsroom.didactiefonline.nl/bundles/newsroom/legacy/images/stories/Specials/rekenen_2009/special_rekenen.pdf)

In dit artikel kun je lezen wat rekenen voor leerlingen zo moeilijk maakt en vind je tips voor differentiatie. *Didactiefonline.nl*.

Broek, J. van den, & Ros, B. (2012). Van lastig naar leuk: leren rekenen. *Didactief*, 9 (november).

<https://didactiefonline.nl/artikel/van-lastig-naar-leukleren-rekenen>

In de hoofdstukken 'Hokjes: ze voelen zo veilig' en 'Aan de top of in de put' uit het boek *Werk maken van gelijke kansen* kun je meer lezen over de valkuilen van vaste niveaugroepen. Je kunt dit boek gratis downloaden van [werkmakenvangelijkekansen.nl](http://werkmakenvangelijkekansen.nl). Bergh, L. van den, Denessen, E., & Volman, M. (2020). *Werk maken van gelijke kansen*. Amsterdam: Didactief/Meppel: Ten Brink Uitgevers.

<https://werkmakenvangelijkekansen.nl>

Dit artikel geeft je tips voor flexibel differentiëren in de rekenles. *Volgens-bartjens.nl*.

Buys, K. (2004). Wie het kan verwoorden snapt het - Niveaudifferentiatie in de bovenbouw. *Volgens Bartjens*, 24 (1), 4–8.

[https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3120\\_Wie-het-kan-verwoorden-snapt-het-Niveaudifferentiatie-in-de-bovenbouw](https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3120_Wie-het-kan-verwoorden-snapt-het-Niveaudifferentiatie-in-de-bovenbouw)

Kennisrotonde bespreekt in dit artikel de verschillen tussen homogeen en heterogeen groeperen. *Kennisrotonde.nl*.

<https://www.kennisrotonde.nl/vraag-en-antwoord/groepsdoorbrekend-werken>



# 21. JIJ BENT DE SLEUTEL

Slavin, R. E., & Lake, C. (2008).

Effective programs in elementary mathematics: A best-evidence synthesis.

*Review of Educational Research*, 78(3), 417–515.

## INTRODUCTIE

'Kinderen verdienen het beste onderwijs dat er is, gebaseerd op het beste wetenschappelijke bewijs dat we kunnen leveren.' Dat zei Robert Slavin in 2007 in een interview met *Didactief*. Zijn hele loopbaan heeft deze gelauwerde onderzoeker, die voorjaar 2021 overleed, zich ingezet voor goed onderwijs. Hij zag met lede ogen aan dat de Amerikaanse overheid allerlei lesprogramma's liet ontwikkelen en over scholen uitstrooide zonder maar een greintje bewijs dat deze daadwerkelijk effectief waren. 'Ideologie is belangrijker dan bewijs', is een ander citaat van hem. In de studie die hij samen met Cynthia Lake deed, levert hij deze bewijzen wel. Hun conclusie: niet de methode of de digitale tool, maar de leraar vormt de sleutel voor goed onderwijs.

## HET IDEE

Om de rekenprestaties van leerlingen op de basisschool te verbeteren, kun je aan diverse touwtjes trekken. Je kunt bijvoorbeeld, zoals de Amerikaanse overheid deed, investeren in nieuwe, op constructivistische leest geschoeide lesmethodes (zoals *Everyday Mathematics*). Je kunt ook digitale tools de klas in dragen of de instructie van leraren verbeteren.

Welk touwtje werkt het best? Dat was de vraag die Slavin en Lake wilden beantwoorden. Want ze zagen dat het weliswaar wat beter ging met het rekenen-

zamelden alle effectstudies naar deze drie ingrepen (lesmethodes, ICT en instructie). Ze zagen dat veel van die studies methodologisch nogal rammelden. Die lieten ze links liggen. Zo hielden ze 87 studies over en konden ze de balans opmaken.

## DE INZICHTEN

### Lesmethode veranderen?

Van de dertien studies naar lesmethodes ging het gros over constructivistische methodes met een focus op probleemoplossen en leerlingen die zelf kennis construeren. Daarnaast was er een enkele studie naar rekenmethodes, waarin oefenen centraal staat. Voor beide gold dat de effectgrootte zeer bescheiden was. Oftewel: de lesmethode maakt niet het verschil tussen goed en minder goed onderwijs.

### ICT toevoegen?

Slavin en Lake spreken in hun onderzoek over *computer-assisted instruction*, dus de inzet van de computer als aanvulling op de instructie door de leraar en niet ter vervanging daarvan. De effectiviteit daarvan is vaak onderzocht (38 studies). Wel betrof het veelal ouder onderzoek, toen de tools nog niet zo geavanceerd waren (zie ook kader op pagina 115). Toch zijn er wel conclusies te trekken. Zelfs als je ICT beperkt inzet, dertig minuten per week, zet het al zoden aan de dijk. De effectgrootte is niet enorm, maar groter dan die bij de lesmethodes. De effecten zijn groter voor rekensommen dan voor probleemoplossen.

### Ondersteun de leraar!

In totaal 36 studies gingen over effecten van professionalisering van leraren, gericht op de dagelijkse lespraktijk. Dan gaat het bijvoorbeeld om leren hoe je je instructietijd goed benut, hoe je leerlingen zinvol aan het werk zet, hoe je de kracht van samen-

**'Leraren goed toerusten  
voor rekenonderwijs  
sorteert het grootste effect'**

derwijs, maar dat de prestaties van leerlingen uit etnische minderheidsgroepen achterbleven bij die van 'witte' leerlingen. Om dat probleem aan te pakken, moet je wel weten welke aanpak effectief is.

Tot dan toe bestond daar nog geen goed overzicht van. Slavin en Lake pakten de handschoenen op en ver-

werkend leren kunt benutten, hoe je als leraar zelf beter grip krijgt op wiskundige concepten en hoe je je klassenmanagement kunt verbeteren.

Dit bleek verreweg het beste touwtje om aan te trekken. Leraren goed toerusten voor rekenonderwijs sorteert het grootste effect. Dat geldt voor alle bovengenoemde zaken, dus van instructie tot en met klassenmanagement. Als leraren dit in de vingers hebben, maakt het niet meer uit welke lesmethode of digitale tool ze inzetten. En het mooie is: daarvan profiteren alle leerlingen, ongeacht hun achtergrond.

## IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Niet de methode of de materialen, maar de leraar maakt het verschil. Deze boodschap van Slavin en Lake is luid en duidelijk. En deze is inmiddels ook in Nederland bevestigd. In 2009 verscheen het KNAW-

rapport over rekenonderwijs op de basisschool met als conclusie: of leerlingen nu leren rekenen volgens een realistische of traditionele methode maakt geen verschil voor hun rekenniveau. De enige beslissende factor is de man of vrouw die de lessen geeft. Investeer dus liever in de scholing van leraren dan in geruzie over methode X of Y (zie ook hoofdstuk 2, 'Er leiden meer rekenwegen naar Rome'). Een

***'ICT is altijd een ondersteuning  
en nooit een vervanging van jouw lessen'***

latere Nederlandse reviewstudie naar rekendidactiek (2017) bevatte dezelfde conclusie.

Goed geschoolde leraren zijn allereerst de verantwoordelijkheid van de pabo's. Maar ook van schoolbesturen en -leiding. Benut de scholingsbudgetten voor (team)trainingen en professionalisering die gericht zijn op het werk in de klas: Wat is er nodig voor goede rekeninstructie? Hoe zetten we samenwerkend leren effectief in? Hoe zetten we ICT zinvol in? Zo kun je als school werken aan goed rekenonderwijs voor alle leerlingen.

## JOUW EIGEN KLAS

Allereerst mag je jezelf en je collega's feliciteren en complimenteren: jullie zijn degenen die het verschil maken voor leerlingen. Dankzij jullie inzet en professionaliteit leren kinderen rekenen.

Dat is tegelijkertijd een grote verantwoordelijkheid: het staat of valt allemaal met jou als leraar. Gelukkig is er voldoende kennis uit onderzoek waar je op kunt bouwen. Dit boek staat er vol mee.

Het onderzoek van Slavin en Lake kun je bijvoorbeeld in gedachten houden als jullie met je team een nieuwe rekenmethode gaan aanschaffen. Traditioneel, realistisch of nog een derde smaak, het maakt in principe niet uit. Kies vooral een methode die bij jullie schoolvisie past.

## INZET VAN ICT

In de digitale wereld gaan ontwikkelingen snel en sinds de reviewstudie van Slavin en Lake is er ook weer het nodige veranderd. Toch bevestigt een recente reviewstudie van Joanne Hardman hun conclusie: ICT kan goede diensten bewijzen in je rekenles.

Daarbij is het niet de technologie op zich die het verschil maakt, maar de manier waarop je die als leraar inzet. Het is belangrijk ICT zinvol in te bedden in je algehele instructie en didactiek. De tool die je kiest, moet passen bij je lesdoelen en deze ondersteunen. Dus als je het automatiseren wilt versterken, zijn oefenprogramma's een goede keuze, maar niet als je inzicht wilt vergroten. Hoofdmotto moet zijn: geen ICT om de ICT, maar om het leren te bevorderen.

Bij de keuze voor ICT is de belangrijkste overweging: ondersteunt deze tool mijn lesdoelen? Als je bijvoorbeeld behoefte hebt aan oefenmateriaal waar leerlingen zelfstandig mee aan de slag kunnen, dan kan een adaptief oefenprogramma handig zijn. Leerlingen krijgen oefeningen op maat en jij kunt meekijken wat ze al wel en niet beheersen. Het gaat dus om een doelbewuste inzet van ICT, en niet louter en alleen om de toevallige beschikbaarheid van een tool. ICT is bovendien altijd een ondersteuning en nooit een vervanging van jouw lessen.

## OM IN TE LIJSTEN

- Niet de lesmethode, maar jij als leraar maakt het verschil.
- Maar ook: kies vooral een methode die bij jullie schoolvisie past.
- ICT moet lesdoelen ondersteunen, alleen dan is het een goede aanvulling voor je rekenles.
- Hoe beter jij rekenconcepten in je vingers hebt, hoe beter je rekenlessen.
- Nascholing gericht op jullie lespraktijk is zinvol, vraag je schoolleiding er dus om.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Slavin, R. E., & Lake, C. (2008).** Effective programs in elementary mathematics: A best-evidence synthesis. *Review of Educational Research*, 78(3), 417–515. doi:10.3102/0034654308317473

Hardman, J. (2019). Towards a pedagogical model of teaching with ICTs for mathematics attainment in primary school: A review of studies 2008-2018. *Heliyon*, 5(5), Article e01726.

### Verder lezen

In dit interview met *Didactief* vertelt Robert Slavin over zijn missie: goed onderwijs voor alle kinderen. *Didactiefonline.nl*.

Barneveld, S. (2007). Kinderen verdienen het beste onderwijs dat er is. *Didactief*, 7 (september).  
<https://didactiefonline.nl/artikel/kinderen-verdienen-het-beste-onderwijs-dat-er-is>

Ter gelegenheid van zijn Groningse eredocoraat had *Didactief* een tweede interview met Robert Slavin, over zijn programma 'Success for All'. *Didactiefonline.nl*.

Jelier, W. (2014). Eredocoraat Robert Slavin. *Didactiefonline.nl*.  
<https://didactiefonline.nl/artikel/eredocoraat-robert-slavin>

In dit artikel vind je tips voor als je op zoek bent naar digitale rekentools. *Didactiefonline.nl*.

Jelier, W. (2014). Plattegrond voor het digitale woud. *Didactief*, 3 (maart).  
<https://didactiefonline.nl/artikel/plattegrond-voor-het-digitale-woud>

Dit artikel vat de bevindingen uit het KNAW-rapport *Rekenen op de basisschool* kort samen.

Boer, S. de (2009). Geef leraren meer rekengereedschap. *Didactief*, 10 (december).

<https://didactiefonline.nl/artikel/geef-leraar-meer-rekengereedschap>

Het volledige KNAW-rapport kun je downloaden op Kna.w.nl:

<https://www.kna.w.nl/nl/actueel/publicaties/rekenonderwijs-op-de-basisschool>

In dit artikel op de *Didactief*-website zet rekenonderzoeker Marian Hickendorff op een rijtje wat wel en niet werkt in rekenonderwijs. *Didactiefonline.nl*.

Hickendorff, M. (2021). Rekenen op de basisschool dramatisch? Nee hoor! *Didactief*, 7 (september).

<https://didactiefonline.nl/artikel/rekenen-op-de-basisschool-dramatisch-nee-hoor>

Lees over hetzelfde onderwerp ook:

Marreveld, M. (2018). Drie vragen aan Marian Hickendorff. *Didactief*, 5 (mei).

<https://didactiefonline.nl/artikel/drie-vragen-aan-marian-hickendorff>

Dit artikel vat inzichten samen uit het proefschrift van Mark van Houwelingen naar hoe pabo-studenten hun rekendidactiek kunnen verbeteren.

Ros, B. (2019). Rekenen op de pabo. *Didactief*, 3 (maart).

<https://didactiefonline.nl/artikel/rekenen-op-de-pabo>

Dit artikel zet op een rijtje wat we weten over effectieve rekenmethoden. *Kennisrotonde.nl*.

<https://www.kennisrotonde.nl/vraag-en-antwoord/rekenmethoden-voor-leerlingen-in-het-basisonderwijs>

Het hoofdstuk 'Zorg dat ze echt samenwerken' uit het boek *Op de schouders van reuzen* bevat handzame tips om samenwerkend leren vorm te geven. Je kunt dit boek gratis downloaden op [Opdeschoudersvanreuzen.nl](https://opdeschoudersvanreuzen.nl).

Kirschner, P. A., Claessens, L., & Raaijmakers, S. (2018). *Op de schouders van reuzen. Inspirerende inzichten uit de cognitieve psychologie voor leerkrachten*. Amsterdam: Didactief/Meppel: Ten Brink Uitgevers.

<https://didactiefonline.nl/artikel/op-de-schouders-van-reuzen>

V



# BIJZONDERE REKENBEHOEFTE

Niet elke leerling leert in hetzelfde tempo. Met differentiatie in de klas kom je al een heel eind. Maar soms is er meer nodig.

Dit vijfde en laatste deel gaat over leerlingen in jouw klas die extra aandacht en ondersteuning nodig hebben. Bijvoorbeeld leerlingen voor wie rekenen letterlijk angstaanjagend is. Rekenangst blokkeert de ontwikkeling. We beschrijven hoe dat werkt en hoe je ermee om kunt gaan.

Dan zijn er kinderen die al in de kleuterklas achterblijven in getalbegrip. Grijp tijdig in om hen weer bij de les te trekken. Ook zorgleerlingen en leerlingen met dyscalculie hebben maatwerk nodig, net als leerlingen die juist ver voor de troepen uitlopen. We geven tips hoe je hen allemaal het best vooruit kunt helpen.

# 22. BREEK DE BAN VAN BANGE REKENAARS

Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. Y. (2016).

Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? *Frontiers in Psychology*, 7, Article 508.

## INTRODUCTIE

Als je ergens bang voor bent, ga je dat het liefst uit de weg. Niet echt een probleem als het om bijvoorbeeld spinnen of bergbeklimmen gaat. Maar rekenangst is een ander verhaal. Om rekenen en wiskunde kun je op school – en vooral in de samenleving – niet heen: je hebt het nodig en zult in elk geval de basis moeten beheersen. Probleem is alleen dat de angst het leren in de weg zit.

In 1957 brachten onderzoekers rekenangst voor het eerst onder de aandacht (zie kader op pagina 121). Sindsdien is er heel veel onderzoek naar gedaan. In hun artikel beschrijven Ann Dowker, Amar Sarkar en Chung Yen Looi de inzichten van de afgelopen zestig jaar. Het is het eerste overzichtsartikel over de aard, oorzaken, invloeden en behandelingen van rekenangst.

## HET IDEE

Wie bang is voor rekenen-wiskunde, denkt dat dit heel moeilijk is en dat-ie het zelf nooit zal leren, krijgt onherroepelijk problemen. De spanning en angst hinderen het leren en zo raken leerlingen met rekenangst steeds verder achterop. Wat de angst alleen maar aanzwengelt en het idee bevestigt dat ze het niet kunnen.

Het is dus een serieus probleem. Des te belangrijker, zo vonden Dowker en haar collega's, om goed in kaart te brengen wat het precies behelst. Zelf hadden ze al veel onderzoek naar deelaspecten van het fenomeen gedaan. In dit artikel schetsen ze een totaalbeeld, op basis van zo'n 170 studies.

## DE INZICHTEN

Rekenangst zit in je hoofd en lijf tegelijk. Iemand is bezorgd over eigen kunnen en dat uit zich in fysieke spanning en nervositeit tijdens het maken van

opgaven en toetsen. Het lijkt op faalangst, maar dan specifiek gericht op rekenen-wiskunde. Ook voor andere vakken kunnen leerlingen angstig zijn, maar rekenangst is vaak hardnekkiger.

## Overbelast werkgeheugen

Reken je slechter omdat je er bang voor bent of ben je bang omdat je niet goed kunt rekenen? Deze kipeivraag is nog steeds niet beslecht. Onderzoekers houden het vooralsnog op wederzijdse beïnvloeding. Hoe angstiger, hoe slechter de prestaties. Dat komt

***‘Bij leerlingen met rekenangst is het belangrijk om te zorgen voor positieve ervaringen’***

doordat leerlingen met rekenangst er het liefst zo weinig mogelijk mee bezig zijn en dus onvoldoende oefenen (als jij niet oplet). Bovendien zorgt de angst voor een overbelast werkgeheugen tijdens het werken aan opgaven of toetsen. Leerlingen zijn meer bezig met bange gedachten dan dat ze geconcentreerd werken. Ze zijn langzamer en maken meer fouten, vooral bij opgaven waar ze getallen in hun geheugen moeten houden. Dat is ook aangetoond in breinonderzoek, zoals metingen met EEG en fMRI. Die tonen bij mensen met rekenangst veel activiteit in hersengebieden die met stress en negatieve emoties te maken hebben en minder activiteit in gebieden die horen bij het oplossen van rekenopgaven. Zulke mensen worden dus letterlijk in beslag genomen door hun zorgen.

## Zelfbeeld en beeldvorming

Bij het ontstaan van rekenangst grijpen persoonlijke en omgevingsfactoren op elkaar in. Op persoonlijke vlak gaat het om een (faal)angstige aanleg en het



al genoemde (gebrek aan) geloof in eigen kunnen (*self-efficacy*).

Naast zelfbeeld doet beeldvorming een duid in het zakje. Een leraar of ouder die zelf moeite heeft met rekenen-wiskunde of zelfs angstig is, geeft bewust of onbewust de boodschap door dat dit een heel moeilijk vak is. Ook een woord als 'wiskundeknobbel' bevestigt ten onrechte het idee bij mensen dat rekenen-wiskunde iets is wat je kunt of niet. Dat je je de vaardigheden door oefenen kunt eigen maken, verdwijnt dan naar de achtergrond.

Juist zwakke rekenaars zijn gevoelig voor dergelijke beeldvorming. Zo ontstaat een vicieuze cirkel: ze geven de moed bij voorbaat op, gaan oefenen uit de

weg en worden telkens bevestigd in hun idee dat ze het 'toch niet kunnen'.

### Meisjes zijn vatbaarder

In landen waar jongens en meisjes gelijke onderwijskansen krijgen, verschillen de rekenprestaties niet noemenswaardig. Toch zijn meisjes vaker onzeker en bang voor rekenen dan jongens. Dit uit zich vooral vanaf de adolescentiefase, maar ook in het basisonderwijs schatten jongens zichzelf al hoger in dan meisjes. Dit komt door socialisatie en de kracht van seksestereotypen: wiskunde is een mannenvak en vrouwen zijn nu eenmaal beter in letters dan in getallen.

Algemene stereotypen dat wiskunde zo moeilijk is, zijn medeoorzaak dat rekenangst erger wordt naarmate leerlingen ouder worden. Bij jonge kinderen is (ernstige) rekenangst nog nauwelijks aanwezig.

### Cirkel doorbreken

Voorkomen dat leerlingen rekenangstig worden, is uiteraard het beste. Daarvoor zijn positieve rolmodellen van ouders en leraren nodig en een positiever beeld van wiskunde in de media.

Bij leerlingen met rekenangst is het zaak de vicieuze cirkel te doorbreken en te zorgen voor positieve rekenervaringen. Dowker en haar collega's vermelden een veelbelovend experiment, waarbij leerlingen met rekenangst tien minuten voor een toets hun zorgen op papier zetten. Ze schreven hun angst eruit, waardoor ze zich tijdens de toets konden concentreren op het rekenen zelf.

Bij ernstige rekenangst is professionele hulp van een psycholoog nodig.

### IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Niet alle rekenproblemen komen voort uit cognitieve leerproblemen. Ook rekenangst kan achterstand

### BAKERRIJMPJE

In 1957 verscheen het eerste wetenschappelijke onderzoek over angst voor getallen en rekenen. Sindsdien bestaat het begrip *number anxiety* of rekenangst. Maar het fenomeen is al veel ouder. Een bekend Engels bakerrijmpje uit de zestiende eeuw verwijst er al naar: *Multiplication is vexation / Division is as bad / The rule of three doth puzzle me / And practice drives me mad* (vermenigvuldigen ergert me / delen is minstens zo erg / de tafel van drie snap ik niet / en van oefenen word ik gek). Overigens was de maker van dit versje, John Napier, zelf allerm minst bang voor getallen. Deze Schotse wiskundige werd beroemd door zijn 'uitvinding' van logaritmes, een manier om sneller ingewikkelde berekeningen te maken. Ook bedacht hij al een soort rekenmachine voor, inderdaad, vermenigvuldigen en delen.



veroorzaken. Dowker en haar collega's beschrijven duidelijk hoe het vermijden van oefening en, als het dan toch moet, overbelasting van het werkgeheugen zorgen voor slechte rekenprestaties.

Scholen kunnen niet alle oorzaken wegnemen. Wel kunnen ze zorgen voor positieve rolmodellen: leraren die overbrengen dat iedereen de basis van rekenen-wiskunde onder de knie kan krijgen en dat oefening kunst baart. En natuurlijk leraren die uitstralen dat rekenen leuk is en niet iets om bang voor te zijn. Mocht een leraar zelf met rekenangst kampen

(en ja, dat komt ook voor), dan kan het verstandig zijn om als schoolleiding afspraken te maken over behandeling of andere oplossingen.

Verder is tijdig ingrijpen belangrijk. Zoals Dowker en collega's melden, neemt de angst toe bij het ouder worden. Hoe vroeger je leerlingen positieve rekenervaringen bezorgt, hoe beter. Gelukkig is er op de basisschool nog alle ruimte om dat te doen, aangezien rekenangst bij jonge kinderen zelden voorkomt. Speciale aandacht verdienen de meisjes. Nog steeds schrikken zij, ondanks goede prestaties, terug voor

in de  
praktijk

## NIET FORCEREN, MAAR LOSLATEN

'Het begint bij het welbevinden van de leerling. Investeer in de relatie. Een kind dat zich emotioneel vrij voelt, kan meters maken. En zorg voor een prettig groepsklimaat; iedereen leert verschillend, hulp vragen mag en lach elkaar niet uit. Een leerling met rekenangst kan zich namelijk ook een slechte rekenaar *voelen* omdat hij of zij zichzelf vergelijkt met anderen.' Aan het woord is Erwin Kruik, leraar groep 4/5 op De Fonkelsteen in Zaltbommel, een kleine school met ervaringsgericht onderwijs.

Volgens Kruik ontstaat rekenangst vaak omdat het rekenen zeer moeizaam gaat, óf omdat een leerling negatieve ervaringen heeft. Van de uitleg niet snappen of niet gezien worden door de leraar, tot uitgelachen worden. 'Ik kan dan inzoomen op resultaten, hard aan iemand trekken, sommen oefenen, huiswerk meegeven, een-op-eenbegeleiding inzetten ... en dan maar hopen dat een leerling van zijn angsten afkomt.' Maar hij kiest liever een andere aanpak om 'kinderen te helpen die ergens in hun ontwikkeling hun vertrouwen en plezier in rekenen zijn verloren.' 'Ik begin met

open vragen: wat vind jij leuk en waar kan ik je bij helpen? Leerlingen zullen in eerste instantie hun schouders ophalen. Ik laat bewust stiltes vallen, ga het niet invullen. Bij een moeizaam gesprek help ik ze op weg met vragen als: Ik zie dit en dit, klopt dat? Is dat waar? Weet je het zeker? Hoe zou het zijn, als dat anders was? Uiteindelijk gaan ze hun behoeftes aangeven en weten ze goed wat ze willen (gezien worden) en niet willen (dat er aan ze getrokken wordt).'

Maak leren leuk, maak het niet zo zwaar, maak het luchtig, kinderen moeten al zoveel, zegt Kruik. Sommige doelen kun je volgens hem ook bereiken met rekenmaterialen en -spelletjes, waardoor ze niet eens doorhebben dat ze aan het rekenen zijn. 'Soms is een dag of een paar dagen helemaal niet rekenen de oplossing en spreek je daarna stappen af: maak eerst alleen de makkelijke sommen, maak de helft van het werkblad, et cetera. Kinderen van hun angsten afhelpen: het draait vaak om erkenning, ruimte en zelfvertrouwen geven. Het gras gaat in elk geval niet harder groeien als je eraan trekt.'

het bètaprofiel Natuur & Techniek en kiezen ze minder vaak voor een bèta- of techniekopleiding dan jongens. Dit houdt de stereotypen in stand dat bèta niks is voor meisjes en voorbehouden aan jongens. Juist basisscholen kunnen meisjes de bagage en het zelfvertrouwen meegeven waar ze later in hun schoolloopbaan hun voordeel mee doen.

**JOUW EIGEN KLAS**

De ene leerling met een rekenachterstand is de andere niet. Als je merkt dat iemand achterblijft met rekenen, is het daarom altijd goed om te kijken naar de oorzaak: snapt hij de stof nog onvoldoende of schiet hij in de stress tijdens het maken van opgaven en toetsen?

In beide gevallen is extra instructie en oefening nodig, maar bij leerlingen met rekenangst komt daar nog iets bij. Immers, zij worden alleen maar angstiger van oefeningen, en denken: ik kan het toch niet. Het is zaak om die vicieuze angstcirkel te doorbreken.

***‘Rekenangst is vaak hardnekkiger dan angst voor andere vakken’***

Je kunt het vertrouwen in eigen kunnen versterken met succeservaringen. Hoe vaker leerlingen ervaren dat ze iets wél kunnen en dat ze door oefenen vooruitgaan, hoe beter. Geef leerlingen taken die binnen hun bereik liggen en los die eerst samen met hen op. Doe het voor en begeleid ze net zo lang tot ze het zelf kunnen. Complimenteer hen als ze iets goed gedaan hebben en prijs ook hun doorzettingsvermogen. Je boodschap is telkens: fouten maken is niet erg, daar leer je juist van. Verder vervul je een voorbeeldfunctie: jouw eigen houding tegenover rekenen-wiskunde is van invloed op leerlingen. Hoe positiever jijzelf ertegenover staat, hoe gunstiger dat is voor jouw leerlingen. Pas ook op met uitspraken in de trant van ‘zo, nu is het

tijd voor iets leuks’ (na de rekenles) of ‘nu even alle aandacht erbij, want we gaan iets moeilijks doen’ (bij de start van de rekenles). Heb je zelf moeite met of angst voor rekenen-wiskunde? Bespreek dat binnen je team en met de directie om te kijken of en hoe dit op te vangen is.

Als je merkt dat een leerling te angstig is om open te staan voor jouw begeleiding, is het tijd om hulp in te schakelen. Misschien kan het binnen jullie team opgelost worden en misschien is er professionele therapie nodig. Kijk in overleg met ouders en je collega’s wat de beste oplossing is. Het belangrijkste is dat de angst aangepakt wordt, anders zal die alleen maar erger worden.

**OM IN TE LIJSTEN**

- Rekenangst zit in het hoofd (zorgen) en in het lijf (stress).
- Leerlingen met rekenangst belasten hun werkgeheugen met zorgen in plaats van met het oplossen van rekenopgaven.
- Met positieve rekenervaringen kun je de vicieuze angstcirkel doorbreken.
- Positieve rolmodellen zijn belangrijk, vooral voor meisjes.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. Y. (2016).** Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? *Frontiers in Psychology*, 7, Article 508. doi:10.3389/fpsyg.2016.00508

### Verder lezen

Dit artikel beschrijft hoe kinderen via hun ouders rekenangst kunnen opdoen. *Didactiefonline.nl*.

Redactie Didactief. (2016). Ouders geven rekenangst door aan kinderen. *Didactiefonline.nl*.

<https://didactiefonline.nl/artikel/ouders-geven-rekenangst-door-aan-kinderen>

Dit artikel gaat over meisjes die steeds beter worden in rekenen, maar toch blijven twijfelen aan hun eigen prestaties. *Didactiefonline.nl*.

Meelissen, M., & Luyten, H. (2006). Zelfverzekerde meisjes rekenen beter. *Didactief*, 8 (oktober).

<https://didactiefonline.nl/artikel/zelfverzekerde-meisjes-rekenen-beter>

In dit interview legt lerarenopleider Emmy de Kraker-Pauw uit hoe je leerlingen die denken dat ze iets niet kunnen, kunt helpen. *Didactiefonline.nl*.

Ros, B. (2018). Overtuig ze dat ontwikkeling mogelijk is. *Didactiefonline.nl*.

<https://didactiefonline.nl/artikel/overtuig-ze-dat-ontwikkeling-mogelijk-is>

In het hoofdstuk 'Geloof in eigen kunnen' uit *Op de schouders van reuzen* kun je meer lezen over hoe belangrijk zelfvertrouwen is voor leren. Je kunt dit boek gratis downloaden van [Opdeschoudersvanreuzen.nl](http://Opdeschoudersvanreuzen.nl).

Kirschner, P. A., Claessens, L., & Raaijmakers, S. (2018). *Op de schouders van reuzen. Inspirerende inzichten uit de cognitieve psychologie voor leerkrachten*. Amsterdam: Didactief/Meppel: Ten Brink Uitgevers.

<https://didactiefonline.nl/artikel/op-de-schouders-van-reuzen>

In dit dubbelinterview legt de favoriete leraar van keeper Jasper Cillessen uit dat een wiskundeknobbel niet bestaat en dat iedereen wiskunde kan leren. Ros, B. (2012). De favoriete docent van Jasper Cillessen. *Didactief*, 6 (juni).

<https://didactiefonline.nl/artikel/de-favoriete-docent-van-jasper-cillessen>

# 23. GRIJP VROEG IN BIJ TWIJFEL

**Toll, S. W. M., & Van Luit, J. E. H. (2014).**

Effects of remedial numeracy instruction throughout kindergarten starting at different ages: Evidence from a large-scale longitudinal study. *Learning and Instruction*, 33(October), 39–49.

## INTRODUCTIE

Sommige kinderen komen de kleuterklas binnen en kunnen al tot tien tellen, andere hebben geen idee van cijfers of getallen. Sommigen kennen alleen hun eigen leeftijd, anderen weten ook precies te vertellen hoeveel ouder ze zijn dan hun klasgenoten. Die verschillen trekken wel weer bij in groep 3, als de rekenlessen beginnen? Niet dus. De voorbereidende rekenvaardigheden van vier- en vijfjarigen blijken in diverse onderzoeken een belangrijke voorspeller van latere rekenprestaties. Kleuters bij wie die getal-kennis maar mondjesmaat of helemaal niet aanwezig is, staan in groep 3 meteen al op achterstand en blijven dat veelal.

Gelukkig kun je al in de kleuterklas bijspijkeren en zo alle kinderen met een stevige basis uitwaaien naar groep 3. De vraag is alleen: hoelang moet dat bijspijkeren duren voor het gewenste resultaat? En wanneer trek je aan de bel, omdat er misschien sprake is van een rekenstoornis? Daarover geeft het onderzoek van Sylke Toll en Hans van Luit uitsluitsel. Ze beschrijven welke effecten je mag verwachten van korte en lange remedial teaching (rt). Eén ding is duidelijk: niets doen bij achterblijvende kleuters is de slechtste keuze.

## HET IDEE

Dat ingrijpen loont, weten we uit eerder onderzoek. Sommige studies laten al resultaat zien na vier keer een kwartier gericht oefenen, andere gaan over rt-programma's van twee jaar, en alles ertussenin. Maakt de duur van je oefenprogramma dan niets uit? Dat is een te snelle conclusie, stellen Toll en Van Luit. In een eerder onderzoek (2012) zagen ze dat een relatief kort programma (zestien keer een halfuur) voor de zwakste leerlingen weinig opleverde. Niet handig, want juist deze leerlingen hebben de rt het hardst nodig. Reden voor beide rekenonderzoekers om er dieper in te duiken. Ze vroegen 31 basisscho-

len verspreid over het land om het door de beide onderzoekers ontwikkelde rt-programma, 'Op weg naar rekenen', te geven (zie kader op pagina 126) aan leerlingen die halverwege groep 1 bij de onderste 50 procent scoorden op een rekentoets.

De ene groep (155 leerlingen) kreeg de lange versie: deze start halverwege groep 1 en duurt anderhalf jaar (met wekelijks twee keer een halfuur gerichte ondersteuning). De andere groep (105) kreeg de korte versie: deze start halverwege groep 2 en duurt een halfjaar (28 sessies van 30 minuten). Een derde

***'Op eigen kracht  
kunnen zwakke leerlingen  
nooit de kloof dichten'***

groep (150) kreeg het reguliere aanbod (een jaar lang twee keer een halfuur per week). De groep leerlingen die bovengemiddeld scoorde (630), kreeg geen rt, maar volgde het reguliere aanbod. De onderzoekers konden zo de rekenontwikkeling bij verschillende leerlingen volgen en vergelijken.

## DE INZICHTEN

Het eerste wat opviel, was dat de 410 leerlingen die ondergemiddeld scoorden, gemiddeld jonger waren en uit gezinnen met een lagere sociaal-economische achtergrond kwamen. Hoe ontwikkelden ze zich? En hielp hun rt-programma om de kloof te dichten tussen kleuters met en zonder (of weinig) rekenbagage? Dat hebben Toll en Van Luit op vier momenten gemeten: aan het eind van groep 1, halverwege groep 2, aan het eind van groep 2 en halverwege groep 3.

## Ingrijpen helpt

De bovengemiddelde presteerders begonnen al sterk en werden alleen maar beter: van 40,5 procent goede antwoorden op de nulmeting naar 67 procent

aan het eind van groep 2. Ook de zwakke leerlingen gingen vooruit, zelfs de kleuters die geen rt kregen (van 19,9 naar 48 procent). Maar mét rt waren de vorderingen veel groter: van 21,4 naar 64,4 procent (lange versie) en van 21,5 naar 56,5 procent (korte versie).

Ingrijpen helpt dus. Leerlingen lopen met langdurige rt hun achterstand grotendeels in en de kloof tussen goede en zwakke presteerders wordt veel kleiner. Zonder rt gaan leerlingen wel vooruit, maar ze eindigen zo ongeveer op het niveau waarop de bovengemiddelde presteerders begonnen. Dat gat zullen ze zonder ingrijpen in hun verdere schoolcarrière nooit meer kunnen dichten.

### Kort of lang

De korte versie boekte wel enig resultaat, maar leerlingen die de lange versie van het rt-programma volgden, stonden in groep 3 steviger. Ze wisten hun

opgedane getallenkennis toe te passen op nieuwe rekentaken, niet alleen op simpele sommen, maar ook op wat ingewikkelder taken. Leerlingen die de korte versie hadden gevolgd, hadden in groep 3 bovendien meer moeite met optellen.

De echt zwakke presteerders (onderste kwart) ble-

### ***‘Niets doen bij achterblijvende kleuters is de slechtste keuze’***

ken het beste af met de lange versie. Ze hebben tijd nodig om de getallenkennis te automatiseren. De conclusie is dan ook dat, afhankelijk van je leerlingpopulatie, lang beter is dan kort. Maar vooral: dat iets doen verreweg beter is dan niets doen.

### IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS

Deze studie bevestigt dat ingrijpen loont. Met gerichte (spel)oefeningen kun je leerlingen die achterblijven in voorbereidende rekenvaardigheden helpen om hun achterstand in te lopen. Dat is geen luxe, maar noodzaak: een zwakke rekenbasis bij kleuters voorspelt latere rekenproblemen.

Niets doen is dus geen optie. Zonder rt gaan zwakke leerlingen weliswaar vooruit, maar op eigen kracht kunnen ze nooit de kloof dichten. Ze koersen vanzelf af op achterstand en rekenproblemen in de midden- en bovenbouw.

Of je als school voor korte of lange rt kiest, hangt – behalve van de mate van achterstand bij leerlingen – natuurlijk ook af van beschikbare budgetten en menskracht. De korte versie is een prima alternatief als langdurige rt er niet in zit. Kies voor een bewezen effectief rt-programma zoals *Op weg naar rekenen* (kleuters) of *Rekentuin* (vanaf groep 3).

Behalve de kloof dichten, heeft rt nog een ander voordeel: je kunt er al vroeg hardnekkige rekenproblemen mee op het spoor komen. Als kleuters niet vooruitgaan met rt, kan dat een signaal zijn dat er

### SPELEND REKENEN

Al spelend en luisterend maken jonge kinderen zich de nodige rekenmanieren eigen. Ze kunnen tellen, getalsymbolen herkennen, hoeveelheden schatten en vergelijken, classificeren, en snappen begrippen als ‘meer’ en ‘minder’, ‘hoger’ en ‘lager’.

Niet alle kleuters kunnen dit al. Voor hen is rt belangrijk (bijvoorbeeld *Op weg naar rekenen*). Kinderen doen hierbij in kleine groepjes (drie tot vijf leerlingen) twee keer per week een halfuur samen rekenspelletjes. Er zit met opzet telkens minimaal één dag tussen de oefendagen. Zo train je het voorbereidend rekenen spelenderwijs en komen alle belangrijke onderdelen aan bod.

meer aan de hand is (zoals dyscalculie) en kun je hen vroegtijdig doorverwijzen naar specialistische ondersteuning.

### JOUW EIGEN KLAS

In de kleuterklas geef je nog geen rekenles, maar je bent spelenderwijs al wel veel met cijfers en getallen bezig. Er hangt bijvoorbeeld een meetlat in de klas met alle lengtes van de kleuters erop geschreven, je leest voor uit *Rupsje Nooitgenoeg* of *Tien kleine dino's*, kinderen spelen met dobbelstenen of verdelen stukjes appel. Zo krijgen je leerlingen steeds meer gevoel voor maten en verhoudingen en voor getallen.

Jij krijgt op jouw beurt zicht op de voorbereidende rekenvaardigheden van je leerlingen. Belangrijke signalen dat daaraan iets schort, zijn dat kleuters moeite hebben om cijfers te benoemen of getsymbolen te herkennen. Ook zie je of ze hoeveelheden kunnen schatten, kunnen aanwijzen waar de 5 op een getallenlijn van 1 tot 20 ongeveer moet staan en of ze specifieke rekentaal als 'meer' of 'minder' begrijpen.

Het is belangrijk om vanaf halverwege groep 1 zicht te hebben op wie er achterblijft. Je kunt je eigen observaties aanvullen met bijvoorbeeld de Utrechtse *Getalbegrip Toets-3*. Kinderen die ondergemiddeld presteren (het onderste kwart) hebben rt nodig. Overleg dit met jullie ib'er of regel dat er een klassenassistent beschikbaar is, zodat jijzelf met kleine groepjes leerlingen (drie tot vijf) de oefeningen kunt doen. Het is belangrijk om rt regelmatig te geven, bij voorkeur twee keer per week (zie kader op pagina 126). Het is niet nodig om leerlingen uit de klas te halen.

### OM IN TE LIJSTEN

- Moeite met tellen en getallen is bij kleuters een signaal voor latere rekenproblemen.
- Zorg dat je halverwege groep 1 weet wie de achterblijvers zijn.
- Grijp al in de kleuterklas in en geef alle leerlingen een stevige rekenbasis mee.
- De zwakste leerlingen hebben het meest baat bij een lang rt-programma (anderhalf jaar).

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Toll, S. W. M., & Van Luit, J. E. H. (2014).** Effects of remedial numeracy instruction throughout kindergarten starting at different ages: Evidence from a large-scale longitudinal study. *Learning and Instruction*, 33(October), 39–49. doi:10.1016/j.learn-instruc.2014.03.003

### Verder lezen

Op Leraar24.nl vind je een filmpje plus achtergrondinformatie over voorbereidende rekenvaardigheden in de kleuterklas.

<https://www.leraar24.nl/50020/kleuters-goed-voorbereiden-op-rekenen-voorkomt-latere-achterstand/>

Spelenderwijs bezig zijn met getallen is in de kleuterklas heel belangrijk: zo beginnen kinderen beter voorbereid aan de rekenlessen in groep 3, stelt rekenonderzoeker Egbert Harskamp in dit interview met *Didactief*.

Zunneberg, P. (2012). Begin met rekenen in de kleuterklas. *Didactief*, 5 (mei).

<https://didactiefonline.nl/artikel/begin-met-rekenen-in-de-kleuterklas>

Wat kun je doen voor een leerling die dyscalculie heeft? Hans van Luit geeft in dit artikel tips aan de hand van Tonny uit groep 6.

Luit, H. van (2018). Dyscalculie! Wat nu?

*Didactiefonline.nl*.

<https://didactiefonline.nl/artikel/dyscalculie-wat-nu>

In dit artikel staan de bevindingen samengevat uit het proefschrift van Sylke Toll over preventief werken in de kleuterklas. *Didactiefonline.nl*.

Zunneberg, P. (2014). Rekenen met kleuters.

*Didactief*, 1-2 (januari-februari).

<https://didactiefonline.nl/artikel/rekenen-met-kleuters>

# 24. BESTE HULP VOOR ZORGLEERLING

**Gersten, R., Chard, D.J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. (2005).** Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research*, 79(3), 1202–1242.

## INTRODUCTIE

Kinderen met een leerstoornis hebben doorgaans moeite met rekenen. Het gaat om zo'n vijf tot zeven procent van alle leerlingen. Hoe kun je je instructie aanpassen zodat deze groep de meeste kans krijgt om mee te komen?

Daarover lag al het nodige onderzoek op tafel. Russell Gersten en zijn collega's hebben alle studies die tussen 1971 en 2007 zijn gepubliceerd naast elkaar gelegd en daaruit de werkzame elementen voor de instructie gelicht. Hun onderzoek biedt bruikbare tips om leerlingen met leerproblemen te ondersteunen bij rekenen-wiskunde.

## HET IDEE

Voor leerlingen met een leerstoornis zijn al vele interventies ontwikkeld en beproefd: van kleine aanpassingen in de les tot en met uitgebreide remediërende programma's. Gersten en zijn collega's wilden weten wat daarin de effectieve rode draden waren.

Ze verzamelden uit de periode 1971-2007 alle deugdelijk opgezette en goed onderbouwde studies met interventies, om leerlingen met een leerstoornis beter te leren rekenen. Hun oogst telde 42 studies. Die pelden ze af tot de kern: wat doen leraren nou precies? Ze kwamen tot vier categorieën: instructiekenmerken, gegevens over leerlingprestaties gebruiken, feedback geven en instructie door peers. De hamvraag was uiteraard: hoe effectief zijn die? Hun onderzoek leidde tot een setje effectieve componenten voor de rekenles aan leerlingen met een leerstoornis.

## DE INZICHTEN

### De toppers

Twee componenten sprongen eruit als zeer effectief: expliciete instructie en het aanleren van algemene

oplossingsstrategieën. Bij expliciete instructie doet de leraar stap voor stap voor hoe je een bepaald probleem kunt oplossen en moeten leerlingen deze stappen vervolgens toepassen op een vergelijkbaar probleem. Dit is duidelijk en gestructureerd, precies wat deze leerlingen nodig hebben.

Daarnaast werkt het goed om leerlingen algemene vuistregels aan te leren voor het werken aan rekenopgaven. Bijvoorbeeld: lees de opgave eerst goed door en check na het maken je antwoord. Ook deze structuur en regels helpen leerlingen met een leerstoornis om te focussen.

### Goede middenmoters

#### **Focus en voorbeelden**

Daarnaast bleken nog meer componenten effectief. Zoals leerlingen hardop laten vertellen hoe ze een opgave oplossen. Ook dit dwingt leerlingen om bij de les te blijven. Overigens zit deze component vaak al verweven in de toppers van hierboven, dus de expliciete instructie en de algemene vuistregels.

***'Leerlingen met een leerstoornis moet je voeden met voorbeelden, feedback en uitleg'***

Nog iets wat leerlingen helpt, is het letterlijk in beeld brengen van een opgave, ongeacht of leraren dat nu zelf doen dan wel leerlingen stimuleren dat te doen. Het gebruik van concrete materialen en een (fysieke) getallenlijn horen hier ook bij. Het beeld fungeert als kapstok om de abstracte stof aan op te hangen (zie ook hoofdstuk 11, 'Via concreet naar abstract'). Het geven van voorbeelden heeft hetzelfde effect. Die concreetheid blijft voor deze groep leerlingen heel belangrijk; doe het niet alleen bij de start van een nieuw rekenonderdeel, maar voer dat door tot en met de nieuwe rekenstof in groep 8.



### **Data en feedback**

Het gestructureerd en frequent verzamelen van data over leerlingen zorgt voor gerichtere instructie en daarmee voor betere rekenprestaties. Het is belangrijk om die informatie ook terug te koppelen naar leerlingen: dit gaat nog niet zo goed, dus daar gaan we verder mee oefenen. Heldere feedback zorgt ervoor dat leerlingen weten waar ze aan toe zijn.

Een-op-eenfeedback door leerlingen uit een hogere groep werkt alleen als deze tutoren getraind zijn in het geven van passende feedback.

### **Twee verliezers**

Twee componenten bleken weinig zoden aan de dijk te zetten. Het geven van feedback werkt weliswaar (zie hiervoor), maar leerlingen zelf doelen laten stellen in vervolg hierop, is vaak te hoog gegrepen voor deze groep. Ze hebben meestal moeite met plannen

### **DYSCALCULIE**

Dat een leerling achterblijft met rekenen, kan verschillende oorzaken hebben. Je hebt 'gewoon' zwakke rekenaars. Die kun je met extra aandacht en oefening weer bij de groep trekken. Dan heb je leerlingen met een al dan niet aangeboren stoornis die het leren bemoeilijkt, zoals autisme of ADHD. Dyscalculie is een aangeboren leerstoornis die specifiek te maken heeft met rekenen en omgaan met getallen. Kinderen met dyscalculie hebben niet alleen moeite met het automatiseren van basisbewerkingen, maar ook met het inhoudelijke rekenen. Als extra instructie en oefening weinig tot niets opleveren, is het goed om gespecialiseerde hulp in te schakelen en te kijken of er sprake is van dyscalculie.

en zelfregulering, dus dit kun je hun beter uit handen nemen.

Hoewel een-op-eenfeedback en uitleg door klasgenoten bij zwakke rekenaars wel werkt, sorteert dit bij leerlingen met een leerstoornis weinig effect. Waarschijnlijk lopen de niveauverschillen te zeer uiteen om van elkaar te kunnen leren. Bovendien zijn medeleerlingen niet getraind om passende feedback of voorbeelden te geven. De leerlingen met een leerstoornis zijn gebaat bij professionele, duidelijke feedback.

### **IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS**

Leraren in het speciaal onderwijs zijn al langer gewend aan het maken van handelingsplannen. Met passend onderwijs is dit ook op reguliere scholen verplicht geworden: scholen moeten voor elke zorgleerling de leerbehoeften en haalbare lesdoelen in kaart brengen.

Het onderzoek van Gersten en collega's geeft scholen daarbij een set componenten in handen die hun waarde bewezen hebben. Deze componenten hebben gemeen dat ze de rekenstof duidelijk structureren en bij ieder nieuw domein heel rustig opbouwen van concreet naar abstract. Dit is effectief voor alle leerlingen, maar leerlingen met een leerstoornis kunnen niet zonder. Ze hebben veel hulp en begeleiding nodig en moeten goed gevoed worden met voorbeelden, feedback en uitleg.

### **JOUW EIGEN KLAS**

Het reguliere onderwijs kent steeds meer zorgleerlingen, onder wie kinderen met een leerstoornis. Misschien heb je er zelf ook enkele in de klas. Dan weet je dat ze extra aandacht, structuur en helderheid nodig hebben bij rekenen-wiskunde. Ze hebben moeite om zelf lesstof en opgaven te overzien. Maar jij kunt ze helpen hun aandacht te focussen en de inhoud te leren begrijpen. Het onderzoek van

Gersten en collega's biedt je een aantal componenten die je kunt benutten om tegemoet te komen aan de leerbehoeften van zorgleerlingen. Die componenten kun je dus meenemen in je handelingsplan. Zoals gezegd hebben alle leerlingen baat bij zaken als expliciete instructie en een geleidelijke opbouw van concreet naar abstract, maar voor zorgleerlingen zijn ze essentieel. Bespreek samen met je collega's en zorgteam hoe jullie deze effectieve componenten inweven in de rekenlessen.

***'Expliciete instructie  
en een geleidelijke opbouw  
zijn voor zorgleerlingen essentieel'***

Als je merkt dat een zorgleerling ondanks alle extra aandacht weinig vooruitgaat, kan er sprake zijn van dyscalculie. In dat geval is specialistische hulp nodig om een diagnose te kunnen stellen en een gericht handelingsplan te maken. Wacht daar niet te lang mee: hoe sneller een leerling met dyscalculie hulp op maat krijgt, hoe beter. Bij Verder lezen vind je links naar meer informatie over de signalen waarop je kunt letten.

**OM IN TE LIJSTEN**

- Expliciete instructie biedt zorgleerlingen de broodnodige structuur.
- Voor deze leerlingen blijven concrete voorbeelden te allen tijde belangrijk.
- Geef hun duidelijke feedback en stel zelf leerdoelen vast.
- Je kunt zorgleerlingen helpen focussen door ze (hardop) te laten vertellen hoe ze een opgave oplossen.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Gersten, R., Chard, D.J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. (2005).** Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research*, 79(3), 1202–1242. doi: 10.3102/0034654309334431

### Verder lezen

In dit artikel staat op een rijtje hoe je zwakke rekenaars kunt helpen. *Didactiefonline.nl*. Gelderblom, G. (2007). Elk kind kan rekenen! *Didactief*, 5 (mei).  
<https://didactiefonline.nl/artikel/elk-kind-kan-rekenen>

Dit artikel geeft antwoord op de vraag hoe je zwakke rekenaars kunt helpen. *Kennisrotonde.nl*.  
<https://www.kennisrotonde.nl/vraag-en-antwoord/rekenen-op-de-basisschool>

In zijn oratie legt rekenonderzoeker Hans van Luit uit wat dyscalculie is.  
Luit, J. E. H. van (2010). *Dyscalculie, een stoornis die telt*. Doetinchem: Graviant.  
<https://docplayer.nl/4726066-Dyscalculie-een-stoornis-die-telt.html>

In dit artikel kun je lezen wat dyscalculie wel en niet is en waar je op kunt letten. *Dyscalculie.org*.

Luit, J. E. H. van, & Ruijsenaars, A. J. J. M. (2004). Dyscalculie, zin en onzin. *Reken-wiskundeonderwijs: Onderzoek, Ontwikkeling, Praktijk*, 23(2), 3-8.  
[http://www.dyscalculie.org/pictures/zin\\_onzin\\_dyscalculie.pdf](http://www.dyscalculie.org/pictures/zin_onzin_dyscalculie.pdf)

Ook dit artikel biedt tips over hulp aan leerlingen met dyscalculie. *Leraar24.nl*.  
<https://www.leraar24.nl/51189/hoe-help-je-leerlingen-met-dyscalculie-in-het-po-en-vo/>

Informatie over expliciete instructie vind je in dit artikel. *Leraar24.nl*.  
<https://www.leraar24.nl/105711/rekenles-volgens-het-directe-instructiemodel/>

# 25. GEEF TALENTEN GROEIKANSEN OP MAAT

Gavin, M. K., Casa, T. M., Adelson, J. L., Carroll, S. R., & Sheffield, L. J. (2009).

The impact of advanced curriculum on the achievement of mathematically promising elementary students. *Gifted Child Quarterly*, 53(3), 188–202.

## INTRODUCTIE

‘De meest verwaarloosde leerling is de wiskundig getalenteerde leerling.’ Katherine Gavin en haar collega’s plukten dit citaat uit een oud rapport (1980) van de Amerikaanse National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). En ze voegen er meteen aan toe dat de situatie sindsdien niet veel is verbeterd.

We halen er nog steeds niet uit wat erin zit, is hun boodschap. Om die trend te keren, hebben Gavin en collega’s tussen 2002 en 2007 in opdracht van het Amerikaanse ministerie van Onderwijs een curriculum op maat ontwikkeld voor getalenteerde leerlingen. Ze noemden het Project M3: Mentoring Mathematical Minds. In hun artikel beschrijven ze de uitgangspunten en laten ze zien dat leerlingen met hun lessen daadwerkelijk meer floreren.

## HET IDEE

Scholen, zo constateren Gavin en collega’s, staan nog steeds een beetje met hun mond vol tanden bij reken-wiskundetalenten. Ze geven hun oefenstof uit hogere groepen of wiskundige puzzels, maar eigenlijk is er meer nodig. En dat ‘meer’ is een curriculum dat leerlingen stimuleert om rekenkundig de diepte in te gaan.

Gavin en collega’s hebben op een rijtje gezet waaraan dit lesmateriaal zou moeten voldoen en vervolgens

**‘Alleen versneld door de lesstof gaan, is niet genoeg voor rekentalenten’**

op deze leest een curriculum voor groep 5 tot en met 7 van het basisonderwijs ontwikkeld. Elf basisscholen deden mee aan hun onderzoek. Samen met de onderzoekers selecteerden ze eerst de talentvolle leerlingen, vervolgens volgden 370 van hen twee jaar lang M3-lessen en 211 volgden reguliere lessen. Het ging om leerlingen met diverse culturele achter-

gronden en van hoog- en laagopgeleide ouders. Wat ze deelden, was een bovengemiddeld talent voor rekenen-wiskunde.

## DE INZICHTEN

### Wat talenten nodig hebben

Rekentalenten, ongeacht hun leeftijd, denken anders dan de gemiddelde leerling. Ze ‘zien’ oplossingen in een oogopslag en gebruiken vlotjes en spontaan verschillende probleemoplossingsstrategieën. Hun denken en redeneren lijkt op dat van professionele wiskundigen. De gangbare schoolse aanpak is voor hen dan ook eerder frustrerend dan behulpzaam. Daarom helpt het ook niet echt om hen vooruit te

## HOOGVLIEGERS

Sinds 1995 meet het peilingsonderzoek TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) elke vier jaar overal ter wereld de rekenprestaties van leerlingen uit groep 6. En elke vier jaar blijkt weer dat Nederlandse leerlingen het in de basis heel aardig doen, maar dat er nauwelijks uitblinkers zijn. Jarenlang behaalde slechts 4 procent van de Nederlandse leerlingen het hoogste niveau (*advanced*).

In de laatste TIMSS (2019) was dat opgeklommen naar 7 procent. Dat is ook het internationale gemiddelde. Maar landen als Singapore (54 procent), Hong Kong (38 procent) en Japan (33 procent) liggen hier ver boven. En het zijn heus niet alleen de Aziaten die ons kloppen. Ook dichterbij huis doen landen het beter: Engeland zit op 21 procent en Finland op 11 procent.

laten werken in de reguliere lesmethode. Ze hebben lesmateriaal op maat nodig, aansluitend bij hun abstractere manier van denken. Samen problemen

***‘Rekentalenten hebben lesstof nodig die hen stimuleert om de diepte in te gaan’***

oplossen en samen hardop redenerend praten over oplossingen en wiskundige concepten zijn centrale elementen van zo’n aanpak op maat.

## **De inhoud van Project M3**

Het door Gavin en haar collega’s ontwikkelde materiaal bestaat uit twaalf lesmodules, vier voor elk leerjaar (groep 5, 6 en 7). Elke module behandelt belangrijke wiskundige concepten binnen de algebra, kansberekening, meetkunde en getallen & bewerkingen.

De opdrachten prikkelen leerlingen om concepten en kennis uit verschillende rekendomeinen in te zetten om bijvoorbeeld games te ontwerpen. De leraar moedigt hen aan om hun oplossingen toe te

**in de  
praktijk**

## **STOF VOOR REKENTALENTEN**

‘Als ik dit lokaal voor 80 procent onder water laat lopen, hoeveel water gaat er dan in? En hoe lang ben ik daarmee bezig als de afstand tot de kraan 20 meter is, ik gemiddeld 5 km/uur loop, in 1 emmer 3 liter water gaat en ik 2 emmers tegelijk kan dragen?’ Rekentalenten bij meester Emiel op basisschool de Teugelaar in Oss hoeven zich niet te vervelen. ‘Soms zijn ze in tweetallen wel twintig minuten bezig. “Oh, maar als je heen moet lopen naar de kraan, moet je ook nog terug. Ik heb een andere uitkomst, hoe kom jij aan jouw antwoord?” Leerlingen zijn kritisch op hun eigen berekening, maar ook op die van de ander.’

Emiel Kroese geeft les in groep 8. In zijn klas zitten 5 leerlingen (van de 26) die aan het begin van het schooljaar de rekenstof voor groep 8 al voor 95 procent beheersen. ‘Ze gaan snel door de stof, hebben ruimtelijk inzicht en leggen gemakkelijk de link tussen breuken, procenten en komma-getallen.’ Kroese laat de rekentalenten tijdens de pre-klassikale instructie twee sommen maken uit het boek. Als ze het kunnen, maken ze er minder dan de rest en mogen ze sneller door de stof, die

ze zelf nakijken. ‘Die verantwoordelijkheid kunnen ze aan’, zegt Kroese. ‘Ze kennen mijn aanpak: eerst zelf proberen, dan samen, kom je er nog niet uit, dan kom je bij mij of je slaat de opdracht even over. Vinden ze het toch nog moeilijk, dan volgen ze de les met de groep.’

De rekentalenten krijgen naast het gewone boek en hun plus-werkboek één dag per week in twee- of viertallen lesstof op maat. Zoals: van Breda naar Utrecht is 100 kilometer, de auto rijdt 1 op 16, hoe lang doe ik erover om daar te komen en wat kost dat aan brandstof? Of ze doen een Google Maps-opdracht op de computer: meet de oppervlakte van een land en bereken hoeveel groter dat land is dan Nederland.

Kroese gelooft in de kracht van ‘levende’ lesstof. ‘Verrijksstof speciaal voor hoogbegaafden, opdrachten die doorgaans niet betekenisvol zijn, vind ik niet motiverend.’ Ook wiskunde-lesstof van de middelbare school aanbieden, doet Kroese bewust niet. ‘Dan beginnen ze al verveld in de brugklas.’

lichten en te beredeneren en als ware wiskundigen bewijzen te leveren.

Elke module duurt ongeveer zes weken, dus per leerjaar waren de leerlingen hier een halfjaar mee bezig. In de resterende tijd deden ze versneld het reguliere lesprogramma.

### **De effecten van Project M3**

De vorderingen van alle talentvolle leerlingen werden gemeten met twee soorten toetsen. Leerlingen die hadden meegedaan aan de M3-lessen presteerden op beide beter dan hun even talentvolle schoolgenoten uit de controlegroep.

Juist de combinatie met verrijkte lesstof blijkt vruchten af te werpen. De aanpak op maat biedt deze leerlingen ruimte om hun talenten te tonen.

### **IMPLICATIES VOOR ONDERWIJS**

In het onderwijs zijn we vaak meer gespitst op leerlingen die achterblijven dan op leerlingen in de voorhoede. Die laatste redden zich wel, is het idee. En dat doen ze ook wel, zolang je de gemiddelde meetlat als maat neemt. Maar sommige leerlingen hebben de potentie om (ver) boven dit gemiddelde uit te stijgen. Het is aan scholen om hun die ruimte en kansen te bieden. En daar is nog een wereld te winnen, zoals ook telkens weer blijkt uit de scores op het internationale TIMSS-peilingsonderzoek (zie kader op pagina 133).

Dit onderzoek van Gavin en collega's laat zien hoe je leerlingen met een talent voor rekenen-wiskunde kunt helpen met lesstof op maat. Gelukkig zijn er ook in Nederland diverse materialen en websites beschikbaar (zie bij Verder lezen).

### **JOUW EIGEN KLAS**

De meeste leerlingen gedijen goed bij de reguliere lesmethode of aanpak voor rekenen-wiskunde. Deze leidt hen geleidelijk de abstracte wereld in van getal-

len en wiskundige concepten als verhoudingen en vergelijkingen.

Maar sommige leerlingen leven al in die wereld. Misschien kennen ze de woorden nog niet, maar hun brein denkt al als dat van een wiskundige. Ze hebben geen concrete voorbeelden nodig om de stof te begrijpen, sterker, die leiden hen alleen maar af. In plaats van de schoolse route te nemen naar de oplossing van een opgave weten ze intuïtief die oplossing al. Ze hebben vaak ongebruikelijke en creatieve manieren om iets op te lossen.

Deze leerlingen moet je feitelijk de omgekeerde route aanleren: Beredeneer eens hoe je dit opgelost hebt. Zijn er meer manieren om dit op te lossen? Hoe zou jij dit aanpakken? En 'dit' moeten dan geen opgaven uit de methode zijn, maar complexere vraagstukken waar ze hun tanden in kunnen zetten. Het is goed als ze zich bewust worden van hoe ze tot een oplossing komen. Anders bestaat het risico dat ze vastlopen als de lesstof in het voortgezet onderwijs pittiger wordt. Heb je ook een of meer van dit soort wiskundetalenten in je klas? Overleg dan met jullie rekencoördinator of de ib'er welke mogelijkheden er zijn om hun verrijkte lesstof aan te bieden. Eén ding is duidelijk: ze alleen maar vooruit laten werken in de methode helpt ze niet echt verder.

## LITERATUUR

### Gebruikte wetenschappelijke bron

**Gavin, M. K., Casa, T. M., Adelson, J. L., Carroll, S. R., & Sheffield, L. J. (2009).** The impact of advanced curriculum on the achievement of mathematically promising elementary students. *Gifted Child Quarterly*, 53(3), 188–202. doi.10.1177/0016986209334964

### Verder lezen

Op deze Amerikaanse website vind je meer achtergrondinformatie over Project M3.

[www.projectm3.org](http://www.projectm3.org)

In Nederland zijn er enkele websites waar je verrijkt lesmateriaal kunt vinden: Vierkant voor Wiskunde

<https://www.vierkantvoorwiskunde.nl/>

Rekenweb

<http://www.fi.uu.nl/rekenweb/leraren/>

Op de website van Onderwijsadvies vind je meer informatie over methodes voor rekentalenten.

[www.onderwijsadvies.nl](http://www.onderwijsadvies.nl)

Op de website van *Didactief* vind je samenvattingen van de laatste twee TIMSS-peilingen.

Ros, B. (2016). We zakken, en nu echt.

*Didactiefonline.nl*.

<https://didactiefonline.nl/artikel/we-zakken-en-nu-echt>

Lebouille, M. (2020). Rekenprestaties stijgen, natuuronderwijs is ondergeschoven kindje. *Didactiefonline.nl*.

<https://didactiefonline.nl/artikel/rekenprestaties-stijgen-natuuronderwijs-is-ondergeschoven-kindje>

### OM IN TE LIJSTEN

- Wiskundetalenten denken anders dan andere leerlingen.
- Alleen versnellen is niet genoeg, geef talenten ook verrijkte lesstof.
- Daag talenten uit ook na te denken over hoe ze tot een oplossing komen.
- Geef álle leerlingen kans om te groeien, ook degenen die al goed presteren.

In dit artikel vind je tips hoe je getalenteerde leerlingen extra uitdaging kunt bieden.

Hamstra, D., & Brouwer, G. (2009). Motiveer de top-pers. *Didactief-special Rekenen-wiskunde* (oktober), 2-3.

[https://newsroom.didactiefonline.nl/bundles/newsroom/legacy/images/stories/Specials/rekenen\\_2009/special\\_rekenen.pdf](https://newsroom.didactiefonline.nl/bundles/newsroom/legacy/images/stories/Specials/rekenen_2009/special_rekenen.pdf)

In dit rapport vind je achtergrondinformatie en tips over inspelen op behoeften van getalenteerde rekenaars. *lpabo.nl*.

Hotze, A., Dijk, G. van, & Keijzer R. (2017). De uitdager van de maand: Activiteiten van excellente leerlingen leiden tot extra opbrengsten voor de hele groep. Hogeschool iPabo & Onderwijsadvies. Den Haag: School aan Zet.

<https://www.ipabo.nl/upload/Kenniscentrum/handleiding%20uitdager%20van%20de%20maand.pdf>

Dit artikel zet op een rijtje wat we weten over onderwijsbehoeften van sterke rekenaars. *Kennisrotonde.nl*.

<https://www.kennisrotonde.nl/vraag-en-antwoord/onderwijsbehoeften-van-sterke-rekenaars-in-het-basisonderwijs>

In dit artikel lees je verhalen over wat snelle rekenaars zelf graag zouden willen. *Volgens-bartjens.nl*.

Dijk, I. van (2004). Hou nou maar op, wij willen rekenen. Wat wil de goede rekenaar nou zelf? *Volgens Bartjens*, 24(2), 32–34.

[https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3106\\_Hou-nou-maar-op-wij-willen-rekenen-Wat-wil-de-goede-rekenaar-nou-zelf](https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3106_Hou-nou-maar-op-wij-willen-rekenen-Wat-wil-de-goede-rekenaar-nou-zelf)



# OVER DE MAKERS

## REDACTIE



**Marian Hickendorff** is universitair hoofddocent onderwijswetenschappen aan de Universiteit Leiden. Haar onderzoek is erop gericht om vragen en discussies rondom rekenen-wiskunde en het rekenonderwijs een empirische basis te geven. Ze onderzoekt onder meer het effect van verschillende vormen van rekeninstructie, hoe leerlingen rekenopgaven oplossen en hoe goed Nederlandse leerlingen aan het eind van de basisschool presteren.



**Ronald Keijzer** is lector rekenen-wiskunde aan Hogeschool IPABO in Amsterdam/Alkmaar. Hij is auteur van een groot aantal publicaties voor leraren en lerarenopleiders over verschillende aspecten van het reken-wiskundeonderwijs. Verder is hij hoofdredacteur van het online tijdschrift *Volgens Bartjens - ontwikkeling en onderzoek* en voorzitter van de onderzoeksgroep van het Expertisecentrum Lerarenopleidingen Wiskunde en Rekenen (ELWiER).



**Hans van Luit** is emeritus hoogleraar Diagnostiek en behandeling van kinderen met dyscalculie aan de Universiteit Utrecht. Hij is orthopedagoog-generalist en klinisch psycholoog (BIG), en heeft uit dien hoofde duizenden kinderen met rekenproblemen onderzocht en behandeld. Hij schreef over dit onderwerp zo'n vierhonderd boeken, artikelen, tests en behandelprogramma's. Daarnaast is hij onder meer voorzitter van het Kwaliteitsinstituut Dyscalculie.

## AUTEUR



**Bea Ros** is neerlandica en zelfstandig (onderwijs)journalist. Ze is wetenschapsredacteur bij onderwijsvakblad *Didactief* en publiceert daarnaast over leesbevordering, (jeugd)literatuur en cultuureducatie. Ze was eindredacteur van *Op de schouders van reuzen* (2018), coauteur van *Werk maken van gelijke kansen* (2020) en auteur van *Leer ze lezen* (2021). Als buitenpromovenda aan de Radboud Universiteit doet ze onderzoek naar de naoorlogse jeugdliteraire kritiek.

# Gun jezelf:

- Een maandelijkse dosis vakkennis
- Inzicht in onderwijsonderzoek
- En inspiratie.



- ✓ Het laatste onderwijsonderzoek vertaald naar de klassenpraktijk
- ✓ Meer inzicht in gedrag en interesses van leerlingen
- ✓ Praktische tips & ideeën voor nóg betere lessen
- ✓ En nu al 50 jaar ervaring in het onderwijs(onderzoek)

U ontvangt:

- 10 nummers van *Didactief*
- toegang tot het online archief
- Welkomscadeau bij afsluiten abonnement

[www.didactiefonline.nl/aanbieding](http://www.didactiefonline.nl/aanbieding)

# Wijze lessen

**Twaalf bouwstenen voor effectieve didactiek**



*Door Tim Surma, Dr. Dominique Sluijsmans,  
Kristel Vanhoyweghen, Dr. Gino Camp,  
Prof. dr. Daniel Muijs en Prof. dr. Paul A. Kirschner*  
120 pagina's, softcover  
ISBN: 978 907 786 6528  
Bestellen: [www.tenbrinkuitgevers.nl](http://www.tenbrinkuitgevers.nl)

Welke bouwstenen voor effectieve lessen kunnen docenten in het VO gebruiken en hoe pas je ze toe in de dagelijkse lespraktijk?

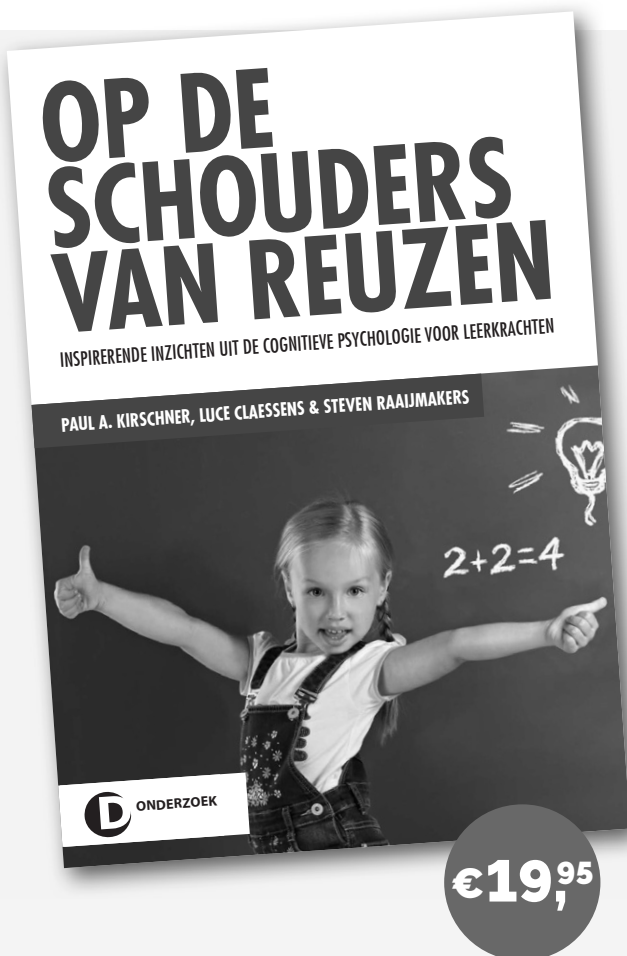
## **Over WIJZE LESSEN**

In dit Nederlandstalig boek wordt voor docenten in het voortgezet onderwijs, het ABC van effectieve instructie helder en praktijkgericht beschreven. Wil jij als docent naast lesgeven, leerlingen actief laten participeren en heb je zelfstandig werken hoog in het vaandel staan? wIn het boek WIJZE LESSEN kun je het volgende verwachten:

- Gebaseerd op het werk van o.a. Barak Rosenshine (2010) en Pashler en collega's (2007);
- Wetenschappelijk onderbouwd;
- Veel praktijkvoorbeelden en concrete lessuggesties;
- Bouwstenen onder de noemer van directe instructie, responsive teaching en expliciete instructie;
- Een auteursteam van formaat: Tim Surma, Kristel Vanhoyweghen, Dominique Sluijsmans, Gino Camp, Daniel Muijs en Paul Kirschner.

*Paul Kirshner is ook bekend van  
Op de Schouders van Reuzen.*

# Op de schouders van Reuzen



Paul A. Kirschner, Luce Claessens en Steven Raaijmakers  
162 pagina's, softcover  
ISBN 978 907 786 6504  
Bestellen: [www.tenbrinkuitgevers.nl](http://www.tenbrinkuitgevers.nl)

Hoe zorg je dat je het werkgeheugen van leerlingen niet overbelast? Hoe laat je nieuwe kennis goed landen? En hoe geef je goede feedback? De hersenen op de beste manier aanspreken is voor leerkrachten dagelijks werk. Dit boek helpt hen om dat nog beter te doen. Paul A. Kirschner, Universiteitshoogleraar aan de Open Universiteit en bekend onderwijs blogger, selecteerde uit de schatkamer van het onderwijsonderzoek 24 pioniers binnen de cognitieve psychologie. Samen met coauteurs Luce Claessens en Steven Raaijmakers (beiden Universiteit Utrecht) beschrijft hij hoe deze 24 reuzen onze blik op onderwijzen en leren hebben verhelderd. Geschreven in een aanstekelijke, heldere stijl en met ruim aandacht voor praktische tips. Een inspirerend boek voor alle leerkrachten in het basisonderwijs om, staand op de schouders van reuzen, hun prachtige vak verder vorm te geven.

## Inhoudsopgave

1. Onze hersenen en het leren.
2. Wat leerlingen doet leren.
3. Hoe de sociale (leer)omgeving het leren beïnvloedt.
4. Welke leeractiviteiten leren ondersteunen.
5. Hoe de leerkracht leren kan ondersteunen.

# Werk maken van gelijke kansen

Papieren  
boek te koop  
én gratis te  
downloaden



Auteurs: Linda van den Bergh, Eddie Denessen,  
Monique Volman, Bea Ros en Monique Marreveld  
Boek: 124 pagina's, softcover  
ISBN: 978 907 786 6580

Als leraar wil je het beste voor je leerlingen. Hoe zorg je ervoor dat je daadwerkelijk iedereen gelijke kansen geeft? En dat je jongens en meisjes op hun talenten - en niet op bijvoorbeeld hun afkomst of taal - beoordeelt? Dit boek geeft inzicht in hoe verwachtingen van leraren tot stand komen en welke invloed dit heeft op de prestaties van leerlingen. Het helpt je om bewuster werk te maken van gelijke kansen.

Lector Linda van den Bergh (Fontys) en hoogleraren Eddie Denessen (Radboud Universiteit/ Universiteit Leiden) en Monique Volman (Universiteit van Amsterdam) selecteerden uit de schatkamer van het internationale onderwijsonderzoek twintig kernpublicaties.

Onderwijsjournalisten Bea Ros en Monique Marreveld beschrijven in een aanstekelijke en heldere stijl de kerninzichten, met ruim aandacht voor praktische tips. Een inspirerend boek voor alle leraren die hun leerlingen het beste willen bieden.

# LEER ZE REKENEN

Rekenen is een van de belangrijkste basisvaardigheden, op school en in de samenleving. Dit boek ondersteunt leraren en schoolleiders uit het basisonderwijs bij het verzorgen van goed reken- en wiskundeonderwijs. Het bestrijkt het hele palet van ontluikende rekenvaardigheid tot en met gevorderd rekenen en geeft uitsluitsel over het belang van onder meer getalbegrip, schattend rekenen, automatiseren en het tegengaan van rekenangst.

Rekenonderzoekers Marian Hickendorff, Ronald Keijzer en Hans van Luit selecteerden uit de schatkamer van het internationale onderzoek 25 kernpublicaties. Onderwijsjournalist Bea Ros vertaalt in een aanstekelijke en heldere stijl de inzichten uit de theorie over wat rekenen is, naar het klaslokaal: wat heb je nodig voor goed rekenonderwijs en hoe onderwijs je het? Elf basisscholen hebben meegewerkt aan deze publicatie; daarom is er ruim aandacht voor praktische tips van leraren. Kortom, *Leer ze rekenen* is een inspirerend boek voor alle leraren die hun leerlingen rekenvaardig de wereld in willen sturen.

Bestel meer boeken in deze serie, zoals *Op de schouders van reuzen: inspirerende inzichten uit de cognitieve psychologie voor leerkrachten*, *Werk maken van gelijke kansen: praktische tips uit onderzoek voor leraren basisonderwijs* en *Leer ze lezen: Praktische inzichten uit onderzoek voor leraren basisonderwijs*.