

1-3

Exponentiële verbanden

A

x	1	2	3	4	5
y	3	6	12	24	48

B

x	4	5	6	7
y	5184	3888	2916	2187

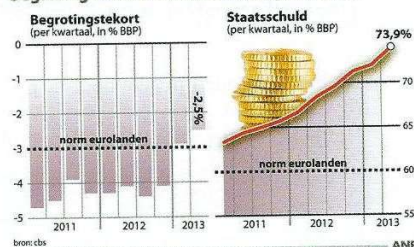
C

x	1	2	3	4	5
y	12	24	36	48	60

- 15** Zeg van elke tabel hierboven of er sprake kan zijn van een exponentieel verband tussen de variabelen x en y . Leg uit waarom wel of waarom niet.

- 16** Begin 2015 was de staatsschuld van Nederland opgelopen tot 467 miljard euro. De staatsschuld groeit sinds het jaar 2000 met ongeveer 5% per jaar.
- Welke groeifactor per jaar hoort bij een toename van 5%?
 - Geef een formule voor het verband tussen de staatsschuld S in miljarden euro's en de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ in begin 2015.
 - Bereken de verwachte staatsschuld in 2025 als de groei onveranderd 5% per jaar zal blijven. Rond af op miljarden euro's.
 - Bereken hoe groot de staatsschuld was in het jaar 2000.

Begrotingstekort ruim onder Europese norm



Theorie

Een **exponentieel verband** kun je op verschillende manieren herkennen.

- In een tabel wordt er bij gelijke stappen met hetzelfde getal vermenigvuldigd.
- Uit de tekst kun je opmaken dat er bij gelijke stappen een vast percentage bij komt of van af gaat.
- Uit de tekst kun je opmaken dat er bij gelijke stappen met hetzelfde getal vermenigvuldigd wordt.

Bij een exponentieel verband tussen de variabelen x en y hoort de **exponentiële formule** $y = b \cdot g^x$. Hierbij is b de beginhoeveelheid en g de groeifactor.

Bij een toename is de groeifactor groter dan 1.
Bij een afname ligt de groeifactor tussen 0 en 1.

Voorbeeld

Bij een exponentieel groeiproces hoort onderstaande tabel.

t	2	7	12	17
N	7168	5374	4028	3020

Stel een formule op bij de tabel.

Oplossing

De groeifactor per vijf jaar is

$$\frac{5374}{7168} = \frac{4028}{5374} = \frac{3020}{4028} \approx 0,75$$

De groeifactor per jaar is $0,75^{\frac{1}{5}} \approx 0,944$.

De beginhoeveelheid is $7168 : 0,944^2 \approx 8044$

De gevraagde formule is $N = 8044 \cdot 0,944^t$

- 17** Kijk nog eens naar de tabellen bij opdracht 15.
Stel een formule op bij de tabellen waar een exponentieel verband bij hoort.

- 18** Stel in de volgende gevallen een formule op voor het verband tussen het aantal N en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2014.
- In 2014 was het aantal ooeveaars in Nederland ongeveer 2600 en dit aantal neemt jaarlijks met 6% toe.
 - Het aantal banen in een sector groeit na 1 januari 2014 exponentieel. Tussen 1 januari 2015 en 1 januari 2016 is het aantal gegroeid van 11 500 naar 13 230.
 - In een land neemt het aantal krantenlezers elke maand met 0,13% af. Op 1 juli 2014 waren er nog 4,25 miljoen krantenlezers.
 - In 2014 vonden in een grote stad 3750 winkeldiefstallen plaats. Dat aantal verdubbelt elke 10 jaar.

- 19** De tabel hiernaast hoort bij de exponentiële formule $N = 1000 \cdot 1,25^t$.

t	-2	-1	0	1	2
N	1000	1250	...

$\div \dots$ $\div \dots$ $\times \dots$ $\times \dots$

- Volgens de formule is de beginhoeveelheid $1000 \cdot 1,25^0$. Hoe groot is $1,25^0$ blijikbaar?
- Bereken de waarde van N bij $t = -1$ door 1000 te delen door 1,25.
- Met welke factor moet je 1000 vermenigvuldigen om N bij $t = -1$ te berekenen?
- Leg uit dat je de waarde van N bij $t = -2$ kunt berekenen door 1000 te vermenigvuldigen met $\frac{1}{1,25^2}$.
- Je kunt N bij $t = -1$ ook berekenen met de formule, je krijgt dan $N = 1000 \cdot 1,25^{-1}$. Bij $t = -2$ wordt dit $N = 1000 \cdot 1,25^{-2}$. Vul in: $1,25^{-1} = \frac{1}{\dots}$ en $1,25^{-2} = \frac{1}{\dots}$.

Theorie

Bij machten zoals g^t is g het **grondtal** en t de **exponent**. Bij het rekenen met machten kun je de volgende rekenregels gebruiken:

$$g^0 = 1 \qquad g^{-1} = \frac{1}{g} \qquad g^{-n} = \frac{1}{g^n}$$

Voorbeelden

$$100 \cdot 2^0 = 100 \cdot 1 = 100$$

$$10 \cdot 2^{-1} = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$8 \cdot 2^{-4} = 8 \cdot \frac{1}{2^4} = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

- 20** Bereken de (positieve) waarde van g , gebruik daarbij de rekenregels hierboven.

a $g^{-1} = \frac{1}{5}$

c $g^2 = 2\frac{1}{4}$

b $g^{-2} = \frac{1}{9}$

d $2g^{-3} = \frac{1}{4}$

- 21** In stad A wordt het aantal winkeldiefstallen elke 8,5 jaar twee keer zo groot. In stad B neemt het aantal winkeldiefstallen toe met 8,5% per jaar. Onderzoek of de toename van het aantal winkeldiefstallen in de ene stad naar verhouding veel sneller gaat dan in de andere stad.